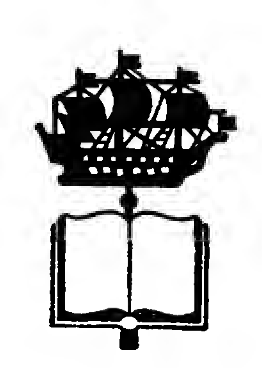

Н.А. ПАВЛОВ

В. А. ПАВЛОВ

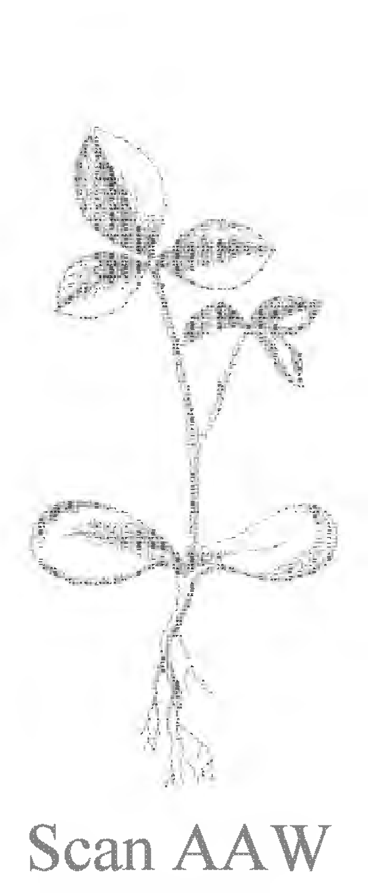
ТЕОРИЯ ГИРОСКОПА И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ

2-е исправленное
и дополненное издание

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования РСФСР в качестве учебного пособия для приборостроительных вузов и факультетов



ИЗДАТЕЛЬСТВО
«СУДОСТРОЕНИЕ»
ЛЕНИНГРАД
1964



УДК 681.2 (075.8)

Книга предназначена в качестве учебного пособия для студентов высших технических учебных заведений, специализирующихся в области гироскопического приборостроения. В ней изложены прикладная теория гироскопа, основы теории гироскопических приборов, применяемых в системах стабилизации и управления подвижными объектами, а также принципы устройства, конструктивные особенности, методические и некоторые инструментальные погрешности однороторных гироскопических приборов.

Значительное внимание уделяется объяснению физической сущности гироскопических явлений. Для лучшего уяснения теоретических положений книга снабжена большим количеством примеров, способствующих самостоятельному изучению предмета, особенно студентами заочных и вечерних факультетов.

Книга может быть полезна научным и инженерно-техническим работникам, занимающимся проектированием, расчетом и исследованием гироскопических приборов и устройств.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Автоматизация процессов управления кораблями, самолетами, ракетами-носителями искусственных спутников Земли и подобными им подвижными объектами предъявляет с каждым годом все более высокие требования к точности гироскопических приборов, используемых в качестве отдельных звеньев в современных системах навигации и стабилизации. Обеспечение высокой точности является в настоящее время основной проблемой гироскопического приборостроения, которая требует глубокого изучения проявлений гироскопического эффекта и его практического использования. В этих условиях уже невозможно ограничиваться исследованием законов движения идеализированного гироскопа без учета конструктивных и технологических погрешностей, вызывающих отклонения его главной оси от заданного в пространстве направления.

Современная научная дисциплина «Теория гироскопа и гироскопических приборов» базируется на теории гироскопических явлений, развитие которой во многом обязано работам русской классической школы механиков и трудам советских ученых и специалистов. Новейшие методы анализа, использующие математические вычислительные и моделирующие машины, позволили более глубоко изучить динамические процессы, протекающие в гироскопической системе, и выяснить влияние сил трения в опорах подвеса и других возмущающих факторов на поведение гироскопа.

В настоящей работе, предназначенной в качестве учебного пособия для студентов высших технических учебных заведений, специализирующихся в области гироскопии, рассматриваются вопросы прикладной теории гироскопа, а также основы теории, принципы устройства и конструктивные особенности гироскопических приборов. Книга является дальнейшим развитием вышедшего в 1954 году в свет учебника автора [28]. В новом, переработанном и дополненном, издании учтены критические замечания, высказанные при обсуждении учебника, и устранены имевшиеся в нем неточности.

За время, прошедшее с 1954 года, теория и практика гироскопических приборов пополнилась большим количеством новых исследований, посвященных проблеме повышения их точности. Изучено влияние отдельных возмущающих факторов на характер движения гироскопической системы и установлены оптимальные

соотношения между ее основными конструктивными параметрами, при соблюдении которых обеспечивается наибольшая точность системы. Появились принципиально новые гироскопические устройства, выполняющие самые различные функции в автоматических системах навигации и стабилизации подвижных объектов. Указанное потребовало коренного пересмотра материала учебника и внесения в него новых разделов, что в свою очередь обусловило целесообразность издания еще одной книги, в которой будут рассмотрены инструментальные погрешности и методы расчета основных конструктивных параметров гироскопических приборов.

При изложении материала автор стремился дать наглядное физическое объяснение результатов, вытекающих из общей теории гироскопа и его отдельных технических приложений. На основе анализа законов движения гироскопа в каждом отдельном случае исследуется специфика конкретного гироскопического прибора, его методические погрешности и ошибки, порождаемые силами трения в опорах подвеса. Такое построение книги облегчит самостоятельное изучение предмета.

Автор приносит глубокую благодарность всем организациям и лицам, принявшим участие в обсуждении материалов книги и способствовавшим ее улучшению, и в особенности С. С. Ривкину, взявшему на себя труд редактирования книги, С. Ф. Фармаковскому и П. И. Сайдову за полезные замечания при рецензировании рукописи, а также И. В. Павлову и Л. А. Северову за помощь при ее оформлении. Все критические замечания по содержанию настоящей работы будут приняты автором с искренней признательностью.

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА НАВИГАЦИИ

Для управления подвижными объектами — летательным аппаратом, кораблем, подводной лодкой и др. — необходимо иметь постоянную информацию о их местоположении. В любой момент времени должны быть известны координаты той точки A земной поверхности (рис. 1), через которую проходит линия $O_зZ$, соединяющая центр $O_з$ Земли с центром тяжести объекта, и расстояние R между этими центрами. Для этой цели используется обычно географическая система координат, положение точки A в которой определяется двумя углами: широтой φ и долготой λ. Пренебрегая весьма малыми углами рассогласования между направлениями гравитационной и геоцентрической вертикалей [1] и считая Землю шаром радиуса $R_з$, будем полагать, что угол φ образован радиусом Земли $O_зA$, который при сделанных допущениях совпадает с вертикалью места, и плоскостью экватора, проходящей через центр Земли $O_з$ перпендикулярно оси NS ее вращения.

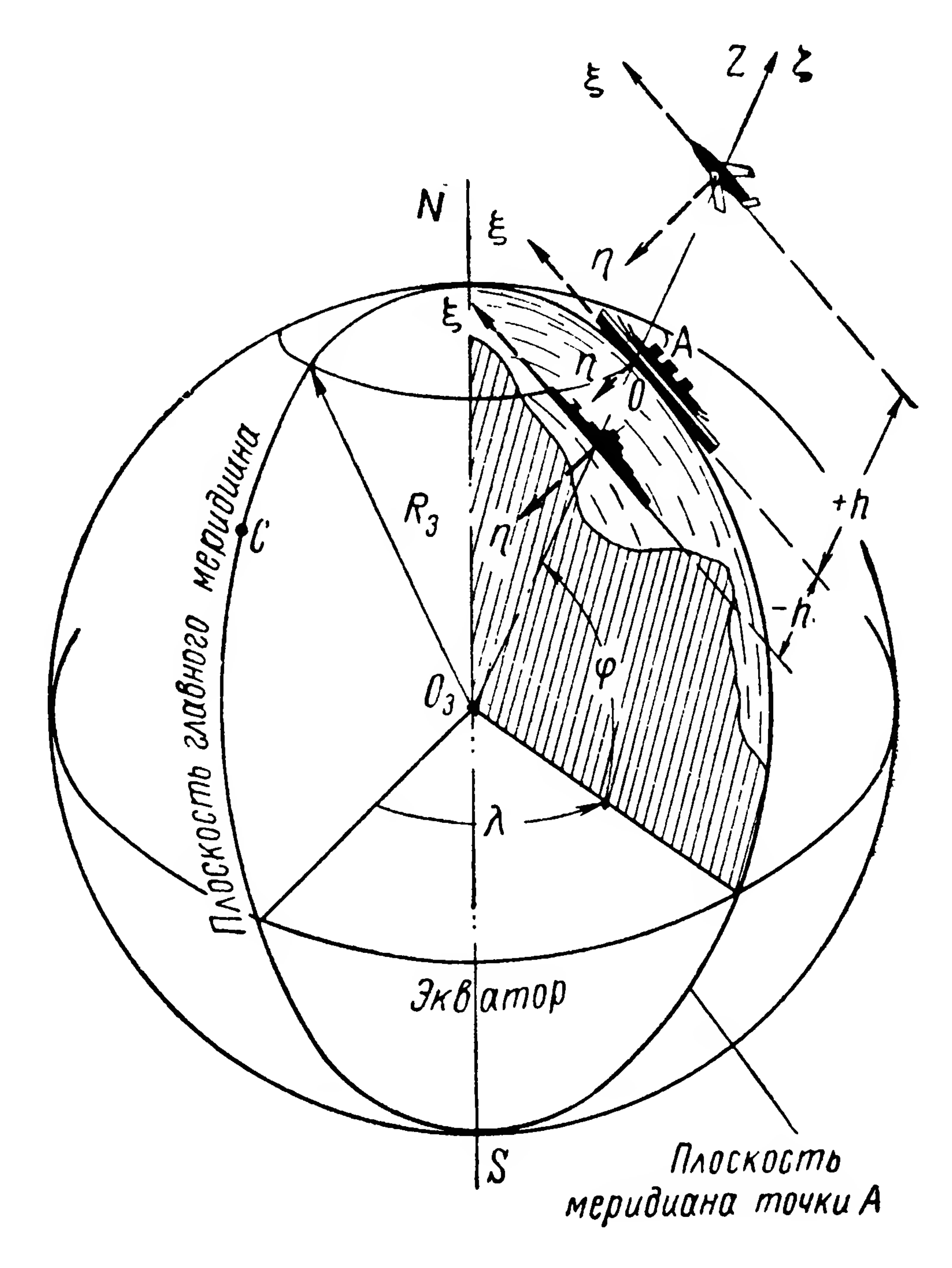


Рис. 1. Географические координаты.

Второй координатный угол λ образуется плоскостями меридиана данной точки и главного меридиана. Плоскость меридиана данной точки проходит через центр Земли $O_з$, выбранную на земной поверхности точку A и оба географических полюса, северный N

[1] См.: В. И. Селезнев. Навигационные устройства. Оборонгиз, 1961, стр. 15 и 23.

и южный S. Плоскость главного меридиана проходит через те же точки $O_з$, N, S и точно определенный на земной поверхности пункт C, выбор которого утверждается соответствующими международными соглашениями.

Таким образом, положение подвижного объекта в географической системе координат будет определяться двумя углами φ и λ и длиной радиуса-вектора

$$R = R_з + h, \tag{1}$$

где $R_з$ — расстояние от центра Земли $O_з$ до точки A, расположенной на ее поверхности на уровне моря;

h — расстояние от центра тяжести объекта до уровня моря.

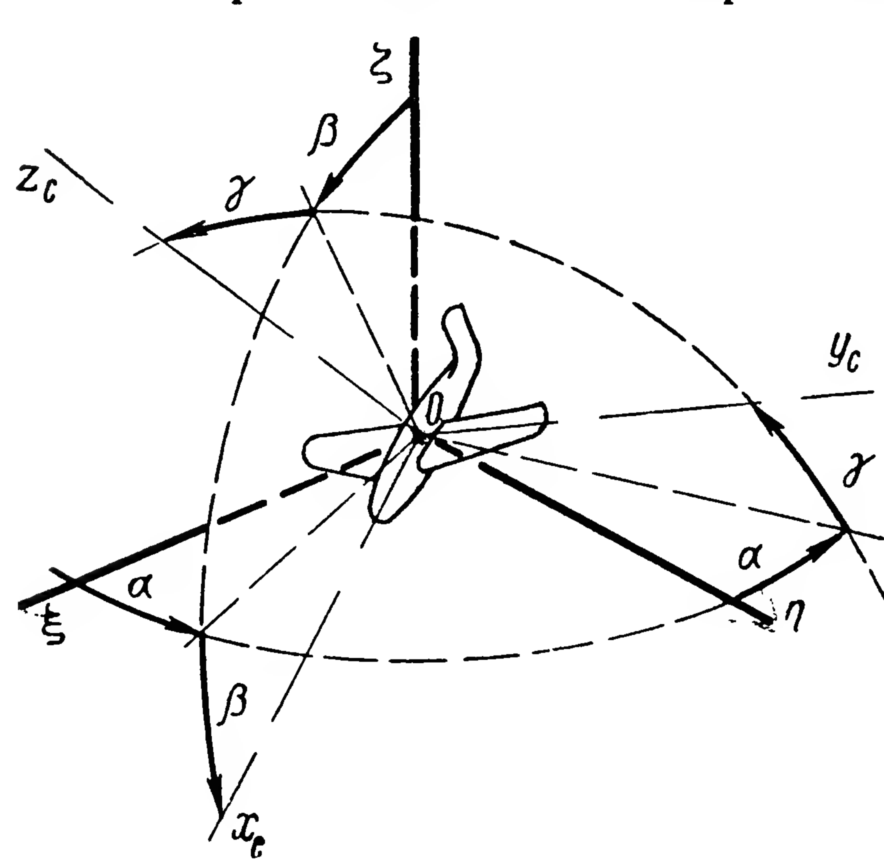


Рис. 2. Положение объекта в системе координат.

При перемещениях объекта относительно земной поверхности величины φ, λ и R претерпевают в общем случае непрерывные изменения. Характер этих изменений с течением времени зависит непосредственно от направления и скорости движения объекта, что дает возможность задавать программу движения объекта и контролировать ее выполнение по законам изменения во времени параметров φ, λ и R. Следовательно, их определение и является основной задачей навигации.

Основная задача навигации может быть решена различными методами, каждый из которых обладает своими преимуществами и недостатками. Однако для их применения необходимо, чтобы подвижные объекты были оборудованы приборами, неизменно фиксирующими направление в пространстве осей так называемой опорной системы координат. Если опорная система координат связана с земными ориентирами, то ее начало O совмещают обычно с точкой A земной поверхности, направляя ось $O\zeta$ по радиусу $O_зA$ Земли в зенит Z. Две другие оси $O\xi$ и $O\eta$ будут совмещены при этом с плоскостью горизонта, проходящей через точку A перпендикулярно земному радиусу $O_зA$.

Положение объекта, с которым неизменно связана координатная система $Ox_cy_cz_c$ (рис. 2),[1] относительно осей координат $O\xi\eta\zeta$,

[1] При исследовании динамики подвижных объектов ось Ox_c координатной системы $Ox_c\,y_c\,z_c$, неизменно связанной с объектом, всегда совмещается с его продольной осью и направляется в сторону движения. Направление осей Oy_c и Oz_c выбирается по-разному. Существуют самолетная, корабельная и тому подобные

остающихся неподвижными на земной поверхности, принято[1] определять по значениям трех углов — рыскания α, тангажа β и крена γ. В частном случае ось $O\xi$ опорной системы координат может быть совмещена с полуденной линией, получающейся в результате пересечения плоскости горизонта с плоскостью $NASO_з$ географического меридиана (рис. 1), и направлена в сторону северного географического полюса N. При таком ориентировании опорной системы координат $O\xi\eta\zeta$ угол α будет характеризовать курс объекта. Однако необходимо иметь в виду, что в навигации[2] курс определяется углом K (рис. 3) и отсчитывается от меридиана NS по часовой стрелке. Поэтому между углами α и K будет существовать зависимость

$$\alpha = -K. \tag{2}$$

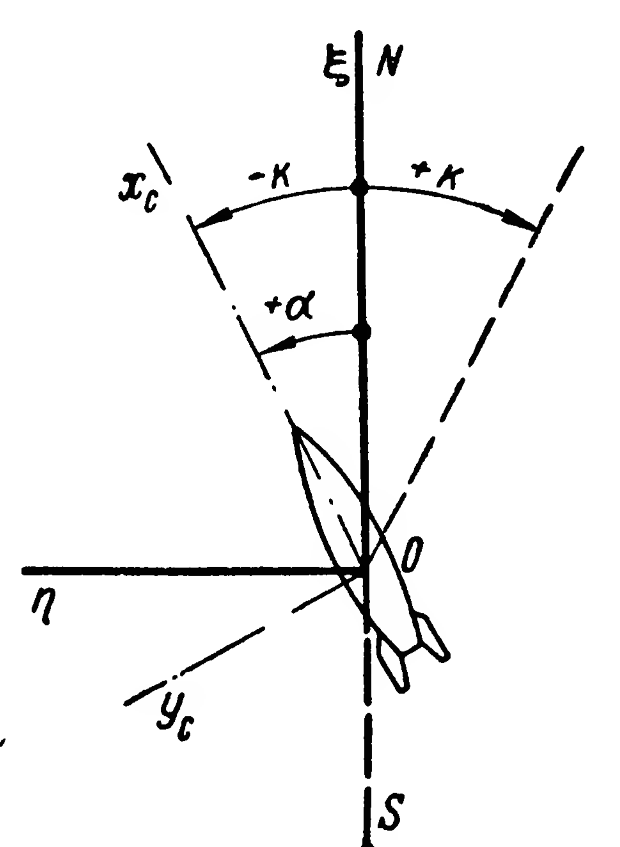


Рис. 3. Угол курса объекта.

В первых навигационных приборах опорная система координат $O\xi\eta\zeta$ создавалась весьма простыми средствами: в них использовались свойства магнитной стрелки и маятника устанавливаться под воздействием магнитного поля Земли и поля земного тяготения соответственно в плоскости магнитного меридиана N_mS_m (рис.4) и по вертикали $O_зZ$. Учитывая значения угла δ магнитного склонения, составляемого плоскостями магнитного N_mS_m и географического NS меридианов и заранее определяемого для каждого района земной поверхности, пользовались показаниями магнитной стрелки для определения курса α. В свою очередь по показаниям маятника определяли углы β тангажа и γ крена объекта. Однако совершенствование морских и воздушных средств сообщения сопровождалось увеличением скорости движения, заменой деревянных конструкций объектов более прочными металлическими и оснащением их мощными двигателями и источниками электрической энергии. В этих условиях ни магнитная стрелка, ни маятник уже не могли удовлетворять предъявляемым к ним требованиям, так как они не оставались стабильными относительно плоскости меридиана и вертикали места.

схемы ориентации осей. В настоящей книге принято, что оси Oy_c и Oz_c совмещены соответственно с поперечной и нормальной осями объекта и направлены первая в сторону его левого борта, вторая — вверх.

[1] См.: А. А. Лебедев и Л. С. Чернобровкин. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. Оборонгиз, 1962, стр. 43.

[2] См.: К. С. Ухов. Навигация. Водтрансиздат, 1954.

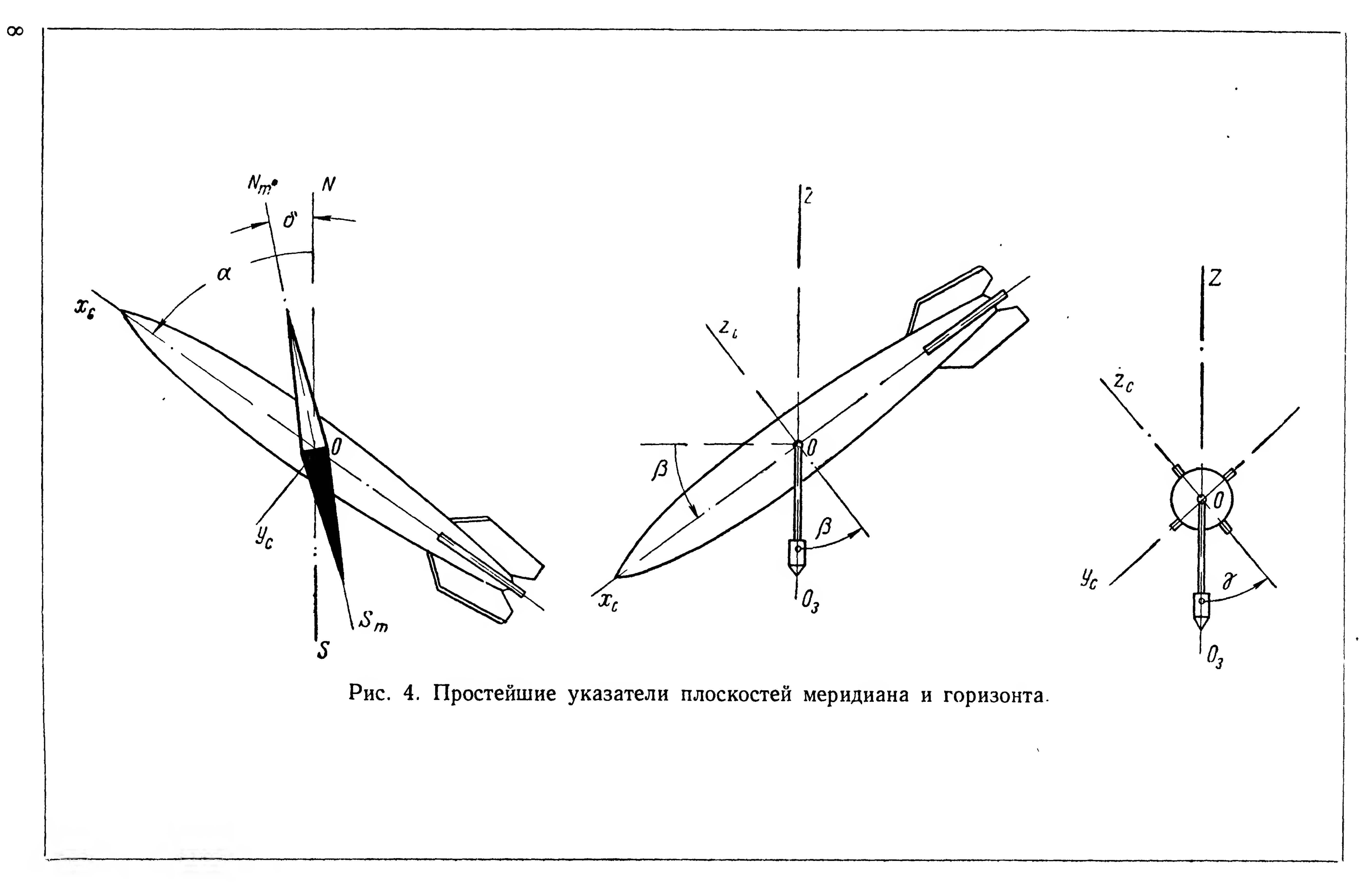


Рис. 4. Простейшие указатели плоскостей меридиана и горизонта.

§ 2. РЕАКЦИЯ МАГНИТНОЙ СТРЕЛКИ И МАЯТНИКА НА ВНЕШНИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Неудовлетворительная работа магнитной стрелки и маятника на подвижном основании объясняется в первую очередь их высокой чувствительностью к внешним возмущениям. Между тем при движении современных объектов целый ряд факторов оказывает возмущающее воздействие на магнитную стрелку и маятник. Так, на отклонения стрелки от плоскости магнитного меридиана оказывают влияние магнитные поля, порождаемые электрическим

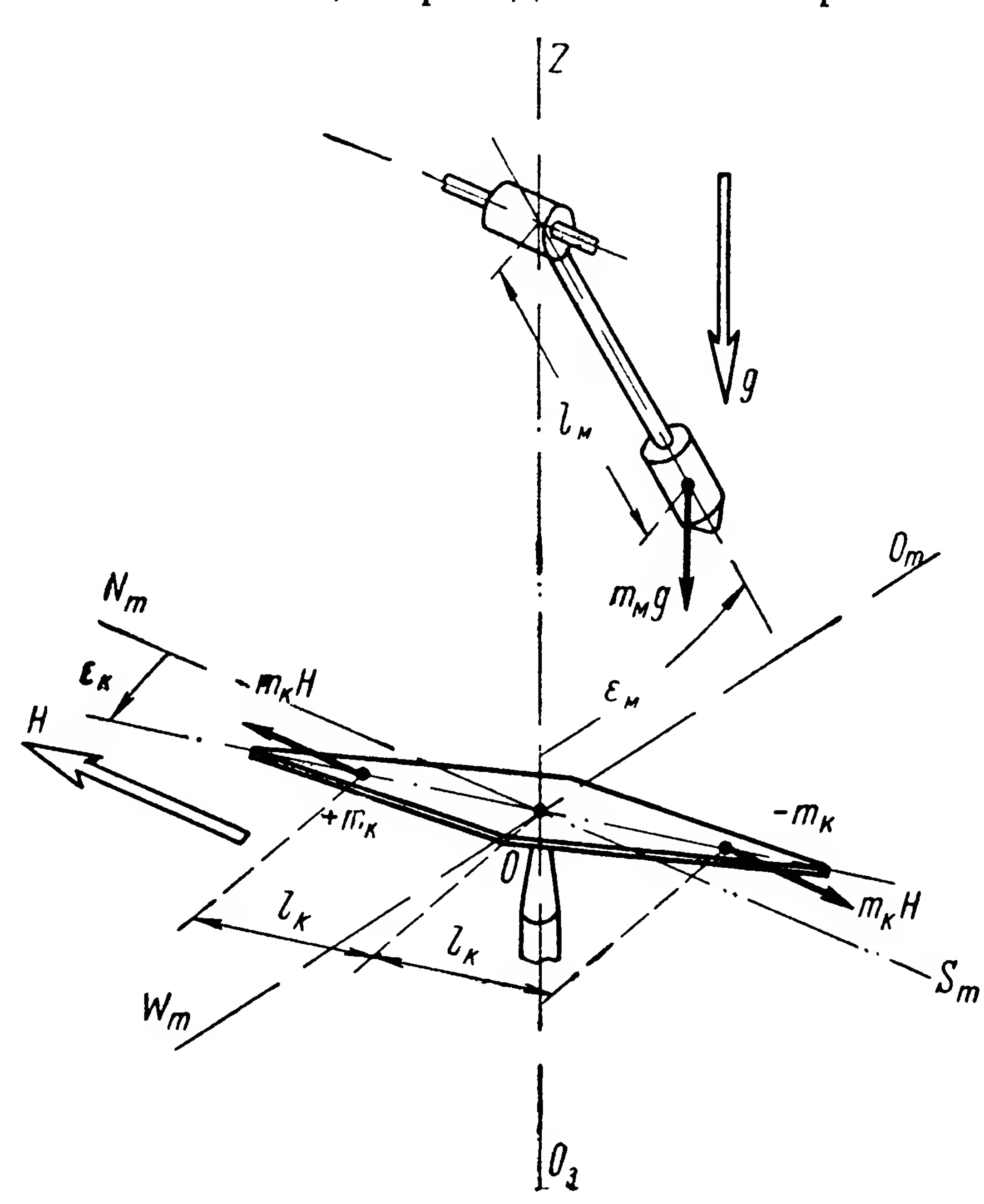


Рис. 5. Схема действия на маятник и магнитную стрелку моментов возмущающих и восстанавливающих сил.

током в расположенных вблизи от нее проводниках, железные массы объекта и их перемещение и многие другие причины. В свою очередь путевые ускорения объекта, его угловые колебания и ряд других факторов вызывают отклонения маятника от вертикали.

Воздействие возмущающих сил на магнитную стрелку и маятник будет зависеть от моментов этих сил, стремящихся вывести первую из плоскости магнитного меридиана, второй — из вертикального положения. Для выяснения характера поведения рассматриваемых указателей в этих условиях обратимся к уравнениям, описывающим их движение.

Момент M внешней возмущающей силы вызывает отклонение магнитной стрелки от плоскости магнитного меридиана N_mOZ (рис. 5). Масса стрелки вследствие присущей ей инертности

будет оказывать сопротивление возмущающему моменту M. При этом величина момента сил инерции $J_к\ddot{\varepsilon}_к$ будет тем больше, чем больше момент инерции стрелки $J_к$ относительно оси ее подвеса и ускорение $\ddot{\varepsilon}_к$, сообщенное стрелке возмущающими силами.

Одновременно при отклонениях магнитной стрелки, находящейся в поле земного магнетизма напряженностью H, от плоскости магнитного меридиана N_mOZ возникает восстанавливающий момент. Действительно, при угле $\varepsilon_к$ между плоскостью N_mOZ и продольной осью стрелки на ее магнитные массы $+m_к$ и $-m_к$ действуют силы $m_кH$. Приложенные к магнитным полюсам стрелки, удаленным от оси подвеса на расстояние $l_к$, эти силы создают момент $2m_кHl_к \sin \varepsilon_к$, стремящийся возвратить стрелку в плоскость магнитного меридиана N_mOZ.

Полагая, в соответствиии с методом кинетостатики,[1] сумму моментов сил равной нулю и пренебрегая действующими в опоре подвеса силами трения и силами сопротивления окружающей среды, получим дифференциальное уравнение, описывающее движение магнитной стрелки,

$$J_к\ddot{\varepsilon}_к + 2m_кHl_к \sin \varepsilon_к = M.$$

Рассуждая аналогичным образом, заметим, что при действии на маятник момента M внешних возмущающих сил его масса $m_м$ будет порождать момент сил инерции $J_м\ddot{\varepsilon}_м$. В свою очередь сила веса $m_мg$ маятника, центр тяжести которого удален от оси его вращения на расстояние $l_м$, при отклонении маятника от вертикали $O_зZ$, например в плоскости O_mOZ, на угол $\varepsilon_м$ будет создавать восстанавливающий момент $m_мgl_м \sin \varepsilon_м$. Пренебрегая силами трения в опорах подвеса и силами сопротивления окружающей среды, запишем уравнение движения маятника:

$$J_м\ddot{\varepsilon}_м + m_мgl_м \sin \varepsilon_м = M.$$

Дифференциальные уравнения движения рассматриваемых указателей имеют один и тот же вид, что говорит об общности динамических свойств магнитной стрелки и маятника. Поэтому для определения характера их движения можно воспользоваться одним общим уравнением

$$J_и\ddot{\varepsilon} + K \sin \varepsilon = M, \qquad (3)$$

в котором коэффициент K момента восстанавливающих сил будет определяться для магнитной стрелки величиной $2m_кHl_к$, а для маятника — $m_мgl_м$; при этом момент инерции $J_и$ относительно оси подвеса будет определяться моментом инерции магнитной стрелки $J_к$ или маятника $J_м$.

---

[1] См.: Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье. Курс теоретической механики. Т. II, ГИТТЛ, 1955, стр. 324.

При малых значениях угла ε можно полагать, что $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$, и тем самым линеаризовать уравнение (3), переписав его в виде

$$J_{\text{и}}\ddot{\varepsilon} + K\varepsilon = M. \tag{4}$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения (4) будет зависеть от закона изменения во времени момента M возмущающих сил. Последние в условиях движения объекта изменяются по закону, который в первом приближении будем полагать близким к гармоническому, считая, что $M = M_0 \cos qt$, где M_0 — амплитудное значение возмущающего момента, а q — круговая частота. При этом условии уравнение (4) принимает вид

$$J_{\text{и}}\ddot{\varepsilon} + K\varepsilon = M_0 \cos qt. \tag{5}$$

Общее решение уравнения (5) будет состоять из решения соответствующего однородного уравнения

$$\ddot{\varepsilon} + n^2\varepsilon = 0, \tag{6}$$

где

$$n^2 = \frac{K}{J_{\text{и}}}, \tag{7}$$

и частного решения исходного уравнения (5).

Решение уравнения (6) можно записать в виде[1]

$$\varepsilon_p = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt, \tag{8}$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями.

В связи с тем, что внешний возмущающий момент изменяется по гармоническому закону, частное решение уравнения (5) будем искать в виде

$$\varepsilon_r = N \cos qt + L \sin qt, \tag{9}$$

где N и L — неизвестные пока амплитуды вынужденных колебаний рассматриваемых указателей.

Чтобы найти условия, при которых частное решение (9) в любой момент времени t будет удовлетворять уравнению (5), подставим в последнее значения ε_r и $\ddot{\varepsilon}_r$ из равенства (9). В результате

$$-J_{\text{и}}q^2N \cos qt - J_{\text{и}}q^2L \sin qt + KN \cos qt + KL \sin qt = \\ = M_0 \cos qt.$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих тригонометрических членах в правой и левой частях полученного равенства, находим

$$N = \frac{M_0}{K - J_{\text{и}}q^2}; \ L = 0. \tag{10}$$

[1] См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Т. II. Гостехиздат, 1948, стр. 91.

Таким образом, учитывая решение (8) и равенства (7), (9) и (10), общее решение уравнения (5) получим в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_r = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt + \frac{M_0}{K\left(1 - \frac{q^2}{n^2}\right)} \cos qt. \quad (11)$$

Первые два члена выражения (11) описывают собственные, а последний — вынужденные колебания рассматриваемых указателей. Как видим, эти колебания происходят с двумя разными частотами n и q, в связи с чем результирующие колебания будут по своему характеру отличаться от гармонических. Действительно, предположим, что в начальный момент времени, при $t = 0$, $\varepsilon(0) = 0$; $\dot{\varepsilon}(0) = 0$. При этих условиях из равенства (11) и его первой производной находим

$$C_1 = \frac{-M_0}{K\left(1 - \frac{q^2}{n^2}\right)}, \quad C_2 = 0.$$

Подставляя полученные значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 в выражение (11), имеем

$$\varepsilon = \frac{M_0}{K\left(1 - \frac{q^2}{n^2}\right)} (\cos qt - \cos nt),$$

или

$$\varepsilon = \frac{2M_0}{K\left(1 - \frac{q^2}{n^2}\right)} \sin \frac{q+n}{2} t \sin \frac{q-n}{2} t. \quad (12)$$

Обозначим в (12) полуразность частот собственных n и вынужденных q колебаний через $\Delta = \frac{n-q}{2} = -\frac{q-n}{2}$. Тогда выражение (12) примет вид

$$\varepsilon = \frac{2M_0 \sin \Delta t}{K\left(1 - \frac{q^2}{n^2}\right)} \sin \frac{q+n}{2} t, \quad (13)$$

откуда следует, что результирующие колебания (рис. 6) происходят с периодом

$$T_p = 2\pi : \frac{q+n}{2} = \frac{4\pi}{q+n}.$$

и переменной амплитудой

$$\frac{2M_0 \sin \Delta t}{K\left(1 - \frac{q^2}{n^2}\right)}.$$

Как видим, результирующие колебания рассматриваемых указателей, порождаемые изменяющимися по гармоническому

закону моментами возмущающих сил, то возрастают, то ослабевают. При этом период биений, определяемый отношением $\tau = \frac{2\pi}{\Delta} = \frac{4\pi}{n-q}$, неограниченно увеличивается с приближением q к n.

Для определения характера изменения амплитуды результирующих колебаний при $q \to n$ выражение (13) перепишем в следующем виде:

$$\varepsilon = \frac{tn^2 M_0 \sin \frac{n-q}{2} t}{K \frac{n-q}{2} t (n+q)} \sin \frac{q+n}{2} t.$$

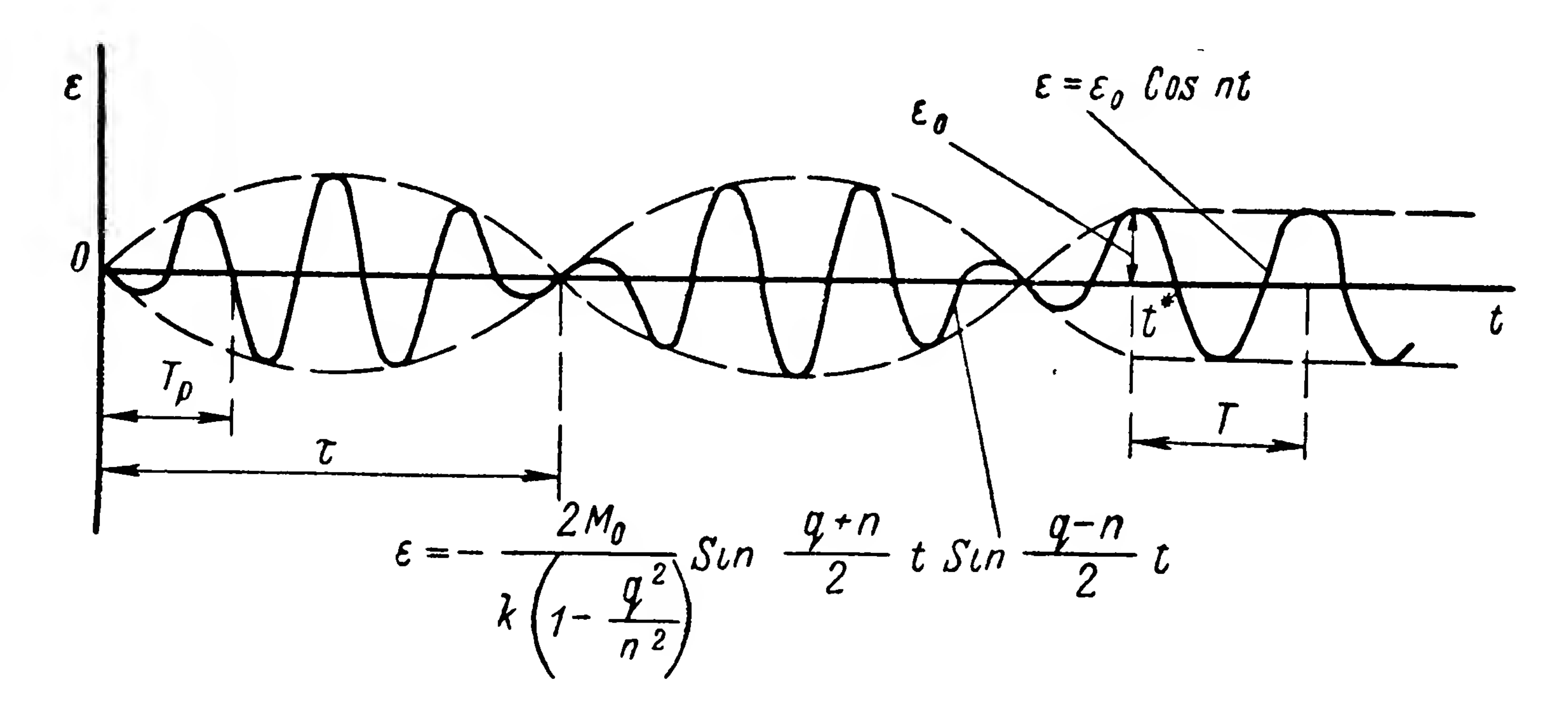


Рис. 6. График вынужденных и собственных колебаний простейших указателей.

При разности между частотами n и q, близкой нулю, отношение $\frac{\sin \frac{n-q}{2} t}{\frac{n-q}{2} t}$ стремится, как известно, [1] к единице и, следовательно, при равенстве частот n и q выражение для угла ε принимает вид

$$\varepsilon = \frac{M_0 q t}{2K} \sin qt.$$

Как видим, при пренебрежении силами сопротивления с наступлением резонанса амплитуда результирующих колебаний неограниченно возрастает. В реальных условиях, характеризуемых наличием неизбежных сил сопротивления, величина амплитуды вынужденных колебаний будет ограничена определенным пределом. [2]

---

[1] См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Т. I. Гостехиздат, 1948, стр. 71.

[2] См.: С. П. Стрелков. Введение в теорию колебаний. ГИТТЛ, 1950.

Следует отметить, что колебания указателей не исчезают сразу после прекращения действия возмущающих сил. В самом деле, предположим, что в некоторый момент времени t^* (рис. 6) возмущающие силы перестали действовать на указатель и, следовательно, амплитуда создаваемого ими момента $M_0 = 0$. Если в это мгновение, которое в дальнейшем будем считать начальным, движение указателя характеризовалось условиями $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$, $\dot{\varepsilon}(0) = 0$, то из выражения (11) и его первой производной по времени следует, что $C_1 = \varepsilon_0$, $C_2 = 0$.

Подстановка найденных значений постоянных интегрирования C_1 и C_2 в выражение (11) позволяет получить зависимость, характеризующую изменение с течением времени угла ε:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos nt. \tag{14}$$

Выражение (14) и соответствующий ему на рис. 6 график подтверждают, что и магнитная стрелка и маятник после прекращения действия моментов внешних возмущающих сил продолжают совершать собственные колебания с периодом T, величина которого в соответствии с (7) будет равна

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{J_и}{K}}. \tag{15}$$

Из-за непрерывных колебаний магнитная стрелка и маятник не могут обеспечить на подвижном объекте надежных указаний направлений меридиана и вертикали. Стремление к усовершенствованию магнитного компаса и маятникового креномера приводило лишь к их конструктивному усложнению, в то время как получаемые при этом результаты не могли быть признаны удовлетворительными.

§ 3. СВОЙСТВА БЫСТРО ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ

Неудовлетворительная работа магнитного компаса и маятникового креномера на подвижном объекте заставила искать более совершенные средства навигации. В процессе этих изысканий внимание изобретателей все чаще останавливалось на замечательном свойстве быстро вращающегося волчка сохранять положение оси AA своего вращения (рис. 7) неизменным в пространстве. Но отсутствие двухсторонней удерживающей связи между основанием $KП$ и волчком затрудняло его практическое использование. При наклоне основания $KП$ на угол β волчок, сохраняя направление оси вращения AA неизменным, начинал под влиянием силы тяжести mg сползать с основания $KП$, двигаясь по направлению действия составляющей $mg \sin \beta$.

Лишь в 1852 г. известный физик Л. Фуко (1819—1868) осуществил подвес волчка с помощью двух кардановых колец, обеспечив

тем самым неизменность положения точки его опоры относительно основания.

Использование карданова подвеса позволило придать волчку форму массивного ротора *P* (рис. 8), свободно вращающегося

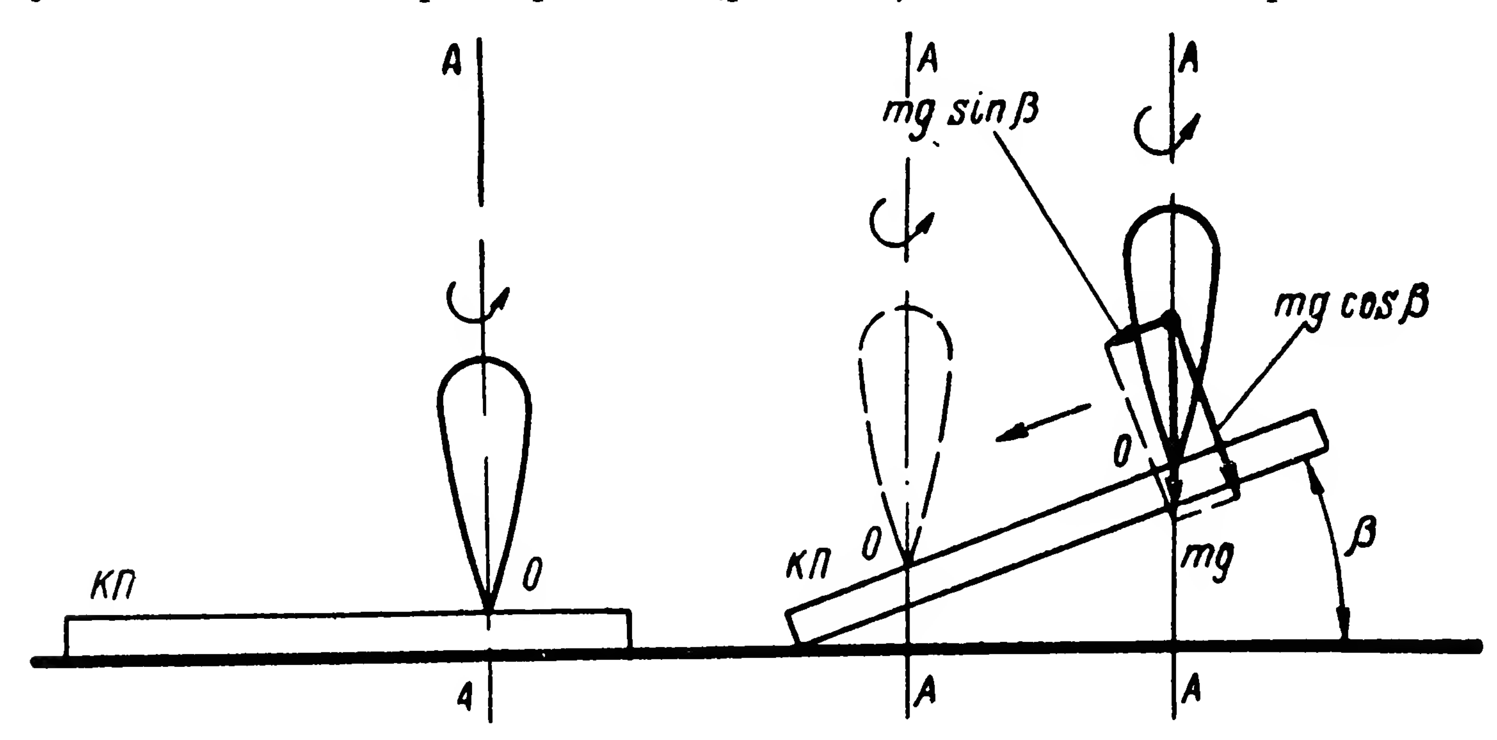


Рис. 7. Волчок.

вокруг так называемой главной оси подвеса *OA* во внутреннем кардановом кольце подвеса *ВК*. В свою очередь кольцо *ВК* устанавливалось в наружном кольце подвеса *НК* с помощью двух опор, расположенных по оси *OB*. Благодаря такому подвесу обеспечивалась свобода вращения ротора *P* вместе с кольцом *ВК* в наружном кольце *НК* вокруг внутренней оси подвеса *OB*. Наконец, наружное карданово кольцо *НК*, также с помощью двух опор, расположенных по оси *OC*, устанавливалось на основании *КП* прибора, обеспечивая свободу вращения ротора *P* вместе с обоими кардановыми кольцами *ВК* и *НК* вокруг наружной оси подвеса *OC*.

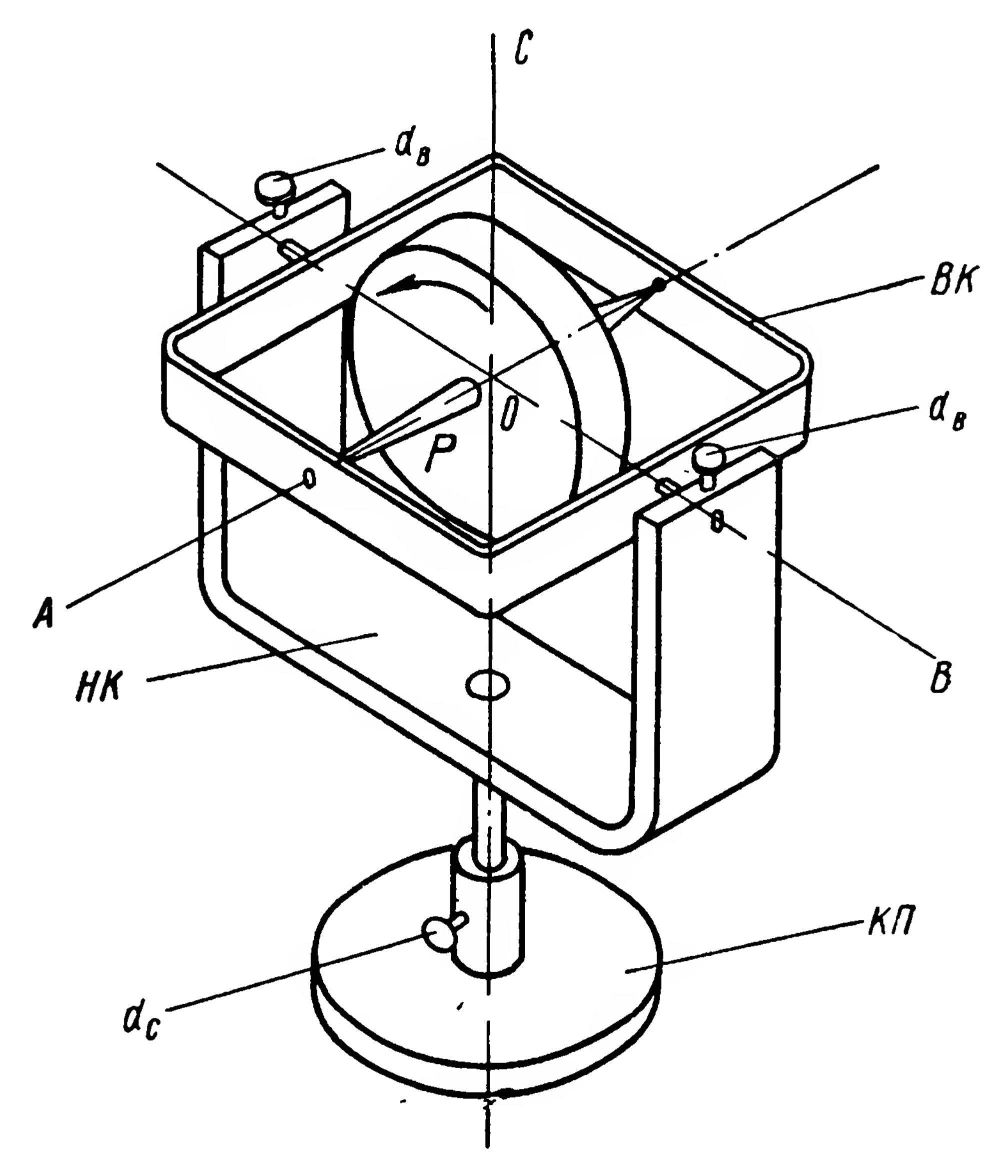


Рис. 8. Гироскоп.

Опыты, проведенные с волчком, подвешенным в корпусе *КП* с помощью двух кардановых колец *ВК* и *НК*, показали, что новый прибор обладает теми же свойствами, которые присущи элементарному волчку. При сообщении ротору *P* вращения с достаточно большой угловой скоростью вокруг оси *OA*

направление последней оставалось стабильным в пространстве. При установке прибора на земной поверхности, например на экваторе в некоторой точке L (рис. 9), его главная ось AA не сохраняет неизменным свое направление относительно земной поверхности. Вследствие суточного вращения Земли точка L будет непрерывно изменять свое положение в пространстве, занимая последовательно положения L_1, L_2 и т. д. Вместе с Землей в ее суточном вращении будет участвовать и волчок, точка подвеса которого благодаря наличию карданова подвеса неподвижна относительно земной поверхности. Однако главная ось AA волчка, стремящаяся сохранить неизменным свое направление в мировом пространстве, будет в рассматриваемом случае непрерывно отклоняться от плоскости горизонта aa, составляя с последней угол, равный по величине углу поворота земного шара вокруг своей оси (рис. 9).

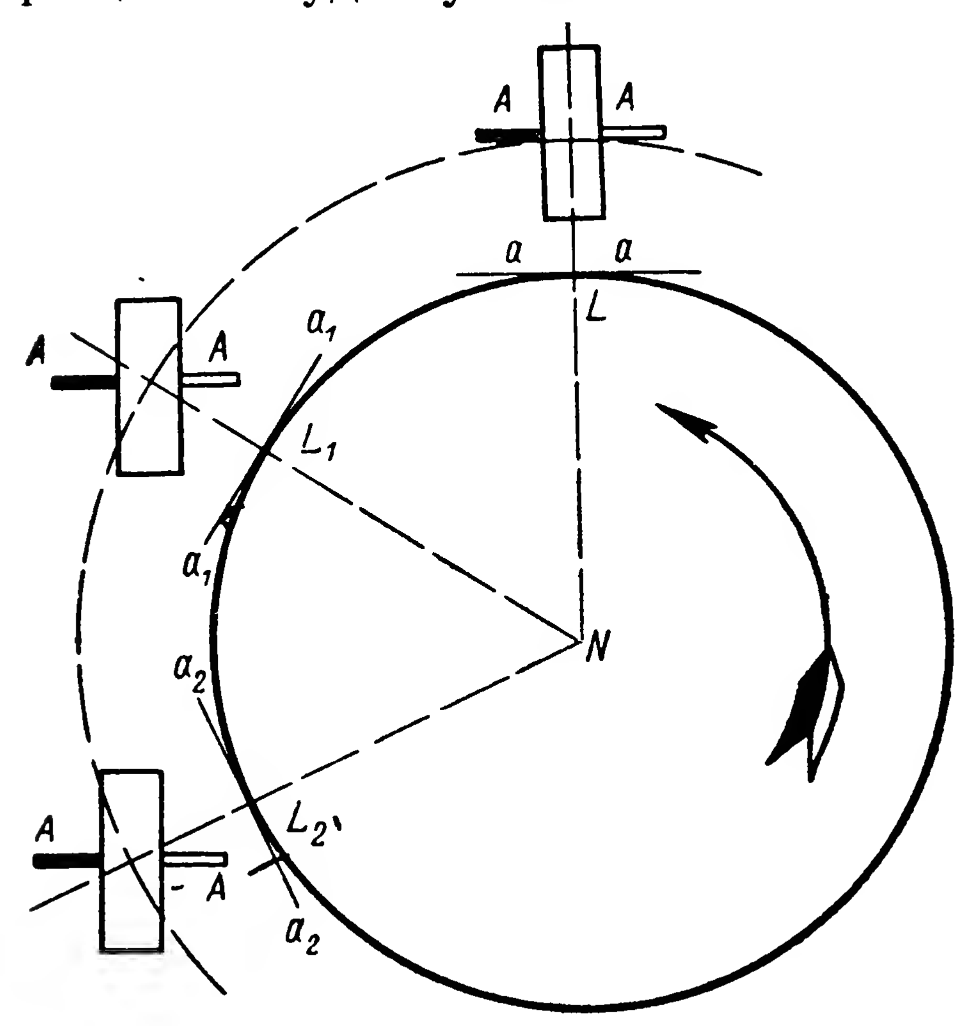


Рис. 9. Отклонение гироскопа от земных ориентиров.

Прибор Фуко позволял по отклонению главной оси AA волчка от земных ориентиров, остающихся неизменными относительно плоскостей горизонта и меридиана, судить о вращении Земли. Он давал возможность «видеть» земное вращение, почему и был назван «гироскопом», т. е. прибором, позволяющим наблюдать вращение Земли. [1] Одновременно были выявлены и другие столь же замечательные свойства гироскопа. Так, затяжка винтов $d_в$, расположенных на наружном кольце подвеса $НК$ (рис. 8), лишала гироскоп свободы вращения вокруг оси OB и создавала условия, при которых он стремился совместить свою главную ось OA с плоскостью меридиана, что позволяло определить ее положение в данном пункте земной поверхности.

При затягивании стопорного винта $d_в$ на корпусе прибора гироскоп лишается свободы вращения вокруг оси OC. В этом случае при определенных условиях его главная ось OA стремится совместиться с направлением, параллельным земной оси, что

---

[1] Слово «гироскоп» происходит от двух греческих слов: γιρος — вращение и σκοπειν — смотреть.

позволяет использовать гироскоп для определения географической широты выбранной точки земной поверхности.

Свойства волчка привлекали к себе внимание ученых задолго до нашей эры [35, стр. 94]. Исследованием законов движения занимались И. Ньютон (1642—1727) и Ж. Даламбер (1717—1783), который еще в 1749 году рассматривал вопрос о движении твердого тела вокруг неподвижной точки.[1] Но первое систематическое изложение механики твердого тела было дано Л. Эйлером (1707—1783) в знаменитом сочинении «Теория движения твердых тел». Эта работа, вышедшая в свет в 1765 году, явилась научной базой для дальнейшего более глубокого изучения законов движения волчка. Последовавшие затем работы Ж. Лагранжа (1736—1813), П. Лапласа (1749—1827), Л. Пуансо (1777—1859) и С. Пуассона (1781—1840) во многом содействовали развитию науки о волчке.

Демонстрация Л. Фуко своего нового прибора — гироскопа, перспективы его практического использования привлекли к решению гироскопических проблем широкий круг исследователей. Наибольший вклад в науку о гироскопе сделали русские ученые. Классические работы О. И. Сомова, Д. К. Бобылева, В. А. Стеклова, С. В. Ковалевской, Г. К. Суслова, Н. Е. Жуковского, А. Н. Крылова и многих других в области механики гироскопа признаны выдающимися. Одновременно с теоретическими исследованиями усиленно проводились работы по изысканию средств, обеспечивающих вращение ротора гироскопа вокруг главной оси OA (рис. 8) с постоянной максимально возможной по величине угловой скоростью и вращение гироскопа вокруг осей подвеса OB и OC с минимальным сопротивлением, оказываемым силами трения в опорах этих осей.

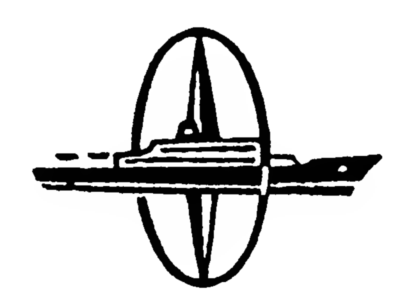
Решение указанных проблем долгое время задерживало практическое использование гироскопа. Даже и после того, как в качестве привода ротора гироскопа стало возможным использовать газовую турбину и электрический двигатель, гироскопические приборы все еще находились в стадии лабораторных исследований. Объясняется это тем, что гироскоп, получивший возможность вращаться вокруг главной оси с постоянной и достаточной по величине угловой скоростью, все еще не имел опор, обладающих малыми силами трения. Только в 1901 году, после того, как промышленность освоила изготовление изобретенных шариковых подшипников, удалось впервые создать гироскопический прибор, который в течение нескольких минут сохранял неизменным направление своей главной оси в пространстве.

В дальнейшем в связи с развитием морского флота и авиации гироскопические приборы усовершенствовались весьма интенсивно. В нашей стране гироскопическое приборостроение получило особенно широкое развитие после Великой Октябрьской социалисти-

---

[1] См.: П. А п п е л ь. Теоретическая механика. Т. II, ГИФМЛ, 1960, стр. 136.

ческой революции. Советские ученые Н. Е. Жуковский, А. Н. Крылов, Б. В. Булгаков, Е. Л. Николаи, Б. И. Кудревич, А. И. Лурье, А. Ю. Ишлинский, С. С. Тихменев, Я. Н. Ройтенберг, С. С. Ривкин, Д. С. Пельпор и другие своими работами приумножили наследие русской классической школы механиков. Творческое содружество советских ученых с работниками социалистической промышленности обеспечило оснащение многих отраслей нашего народного хозяйства высококачественными гироскопическими приборами и устройствами.



Глава I

ФИЗИЧЕСКАЯ ПРИРОДА ГИРОСКОПИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА

§ 4. ПОВОРОТНОЕ УСКОРЕНИЕ

Гироскопический эффект быстро вращающихся тел заключается в сопротивляемости последних внешним усилиям, стремящимся изменить их положение в инерциальном пространстве. Так, при действии на какое-либо карданово кольцо подвеса гироскопа, например на его наружное кольцо *НК* (см. рис. 8), усилия, стремящегося повернуть гироскоп вокруг оси *OC* и тем самым вывести его главную ось *OA* из ее первоначального положения в пространстве, будет ощущаться значительное сопротивление. При этом наружное кольцо *НК*, несмотря на непосредственное действие на него возмущающего усилия, практически будет оставаться неподвижным, в то время как ротор *P* и внутреннее кольцо *ВК* начнут поворачиваться вокруг оси *OB*. Кажущаяся аномалия в движении гироскопа объясняется тем, что при изменении положения вращающегося тела в пространстве возникает так называемое кориолисово, или поворотное, ускорение.

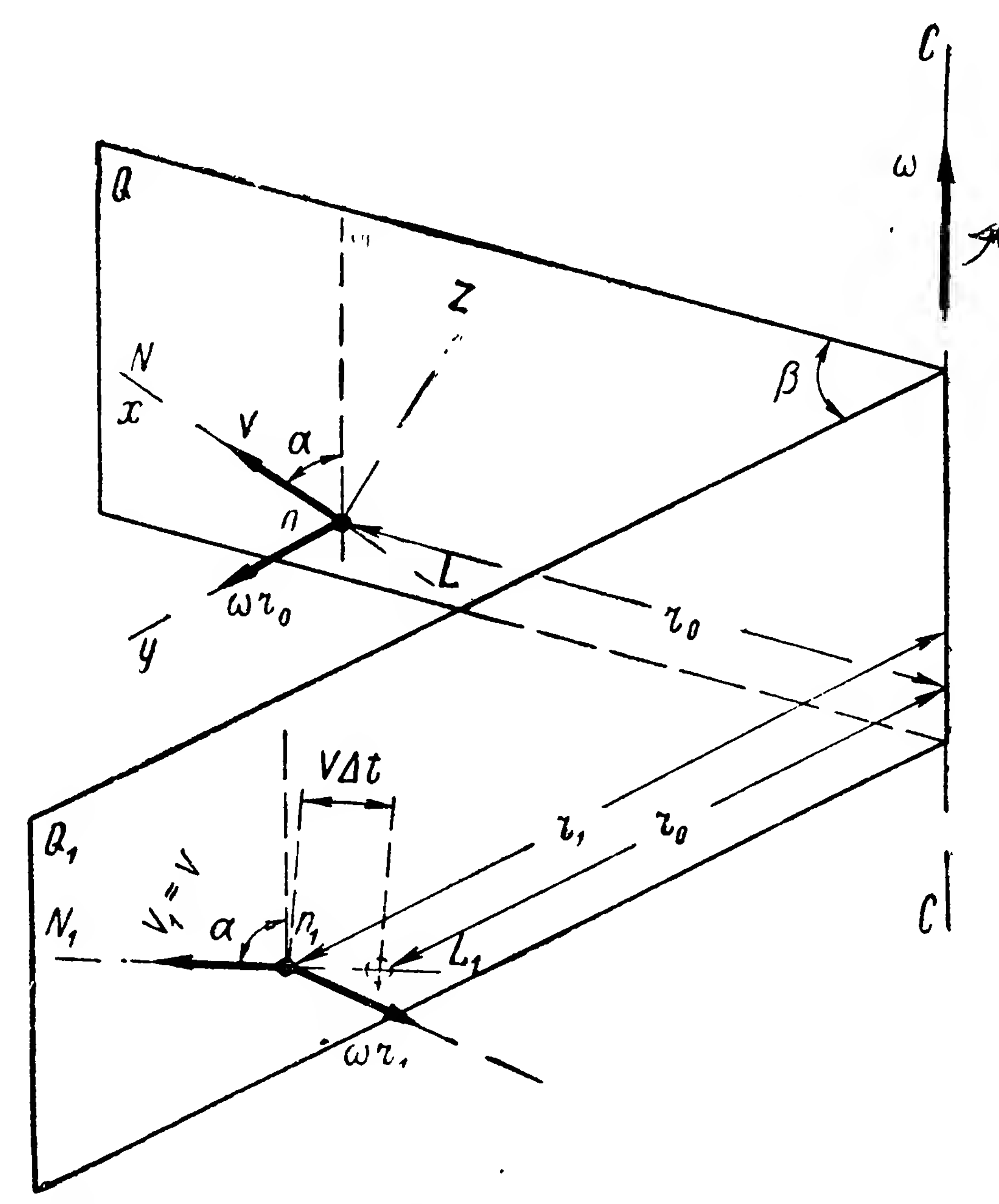


Рис. 10. К определению поворотного ускорения.

Для подтверждения сказанного рассмотрим перемещение точки *n* (рис. 10), движущейся с постоянной скоростью *V* вдоль прямой *LN*, которая в свою очередь вращается вокруг оси *CC* с постоянной угловой скоростью ω; при этом прямая *LN* состав-

ляет с осью CC угол α. В начальный момент времени точка n находится на расстоянии r_0 от оси CC и обладает относительной линейной скоростью V движения вдоль прямой LN. В этот момент она обладает и переносной линейной скоростью ωr_0, вектор которой направлен перпендикулярно плоскости Q, содержащей в себе векторы $\bar{V}$ и $\bar{\omega}$. По прошествии некоторого времени Δt прямая LN в результате поворота вокруг оси CC на угол $\beta = \omega \Delta t$ займет новое положение L_1N_1 в плоскости Q_1. За это же время Δt точка n переместится вдоль прямой LN на величину $V\Delta t$ и займет положение n_1, отстоящее от оси CC на расстояние r_1. Нетрудно заметить, что в положении n_1 рассматриваемая точка будет обладать такой же по величине, но совмещенной теперь с плоскостью Q_1 относительной скоростью $V_1 = V$ и изменившейся по величине и направлению переносной скоростью ωr_1.

Чтобы определить полученные приращения скоростей, спроектируем векторы $\bar{V}_1$ и $\bar{\omega} r_1$ на координатные оси $nxyz$, ориентированные по векторам $\bar{V}$ и $\bar{\omega} r_0$, с началом в точке n. В результате

$$V_x = V_1 \cos^2 \alpha + V_1 \sin^2 \alpha \cos \beta - \omega r_1 \sin \alpha \sin \beta;$$

$$V_y = V_1 \sin \alpha \sin \beta + \omega r_1 \cos \beta;$$

$$V_z = V_1 \cos \alpha \sin \alpha - V_1 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta + \omega r_1 \cos \alpha \sin \beta.$$

Вычитая из полученных выражений первоначальные значения скоростей точки n вдоль тех же осей координат и учитывая, что $|V_1| = |V|$, находим приращения скоростей за время Δt:

$$\Delta V_x = V \cos^2 \alpha + V \sin^2 \alpha \cos \beta - \omega r_1 \sin \alpha \sin \beta - V;$$

$$\Delta V_y = V \sin \alpha \sin \beta + \omega r_1 \cos \beta - \omega r_0;$$

$$\Delta V_z = V \cos \alpha \sin \alpha - V \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta + \omega r_1 \cos \alpha \sin \beta - 0.$$

Как видно из рис. 10, $r_1 = r_0 + V \Delta t \sin \alpha$ является текущим значением удаления точки n от оси CC. В дальнейшем условимся обозначать его буквой r. Разделим найденные приращения скоростей на интервал времени Δt. При Δt, стремящемся к нулю, угол β становится величиной весьма малой, что позволяет полагать

$$\cos \beta = \cos \omega \Delta t \approx 1;$$

$$\sin \beta = \sin \omega \Delta t \approx \omega \Delta t.$$

Таким образом, значения ускорений точки n вдоль соответствующих координатных осей будут

$$\dot{V}_x = \frac{dV_x}{dt} = -\omega^2 r \sin\alpha;$$

$$\dot{V}_y = \frac{dV_y}{dt} = V\omega \sin\alpha + \omega V \sin\alpha;$$

$$\dot{V}_z = \frac{dV_z}{dt} = \omega^2 r \cos\alpha.$$

Ускорения $\dot{V}_x$ и $\dot{V}_z$ рассматриваемой точки вдоль осей nx и nz представляют собой составляющие ее центростремительного ускорения $\omega^2 r$, возникающего при вращении точки n вокруг оси CC с угловой скоростью ω. Ускорение $\dot{V}_y$ является поворотным, или кориолисовым, ускорением

$$\dot{V}_п = 2V\omega \sin\alpha, \qquad (16)$$

которое возникает всякий раз, как только та или иная точка приобретает одновременно и относительное и вращательное переносное движение.

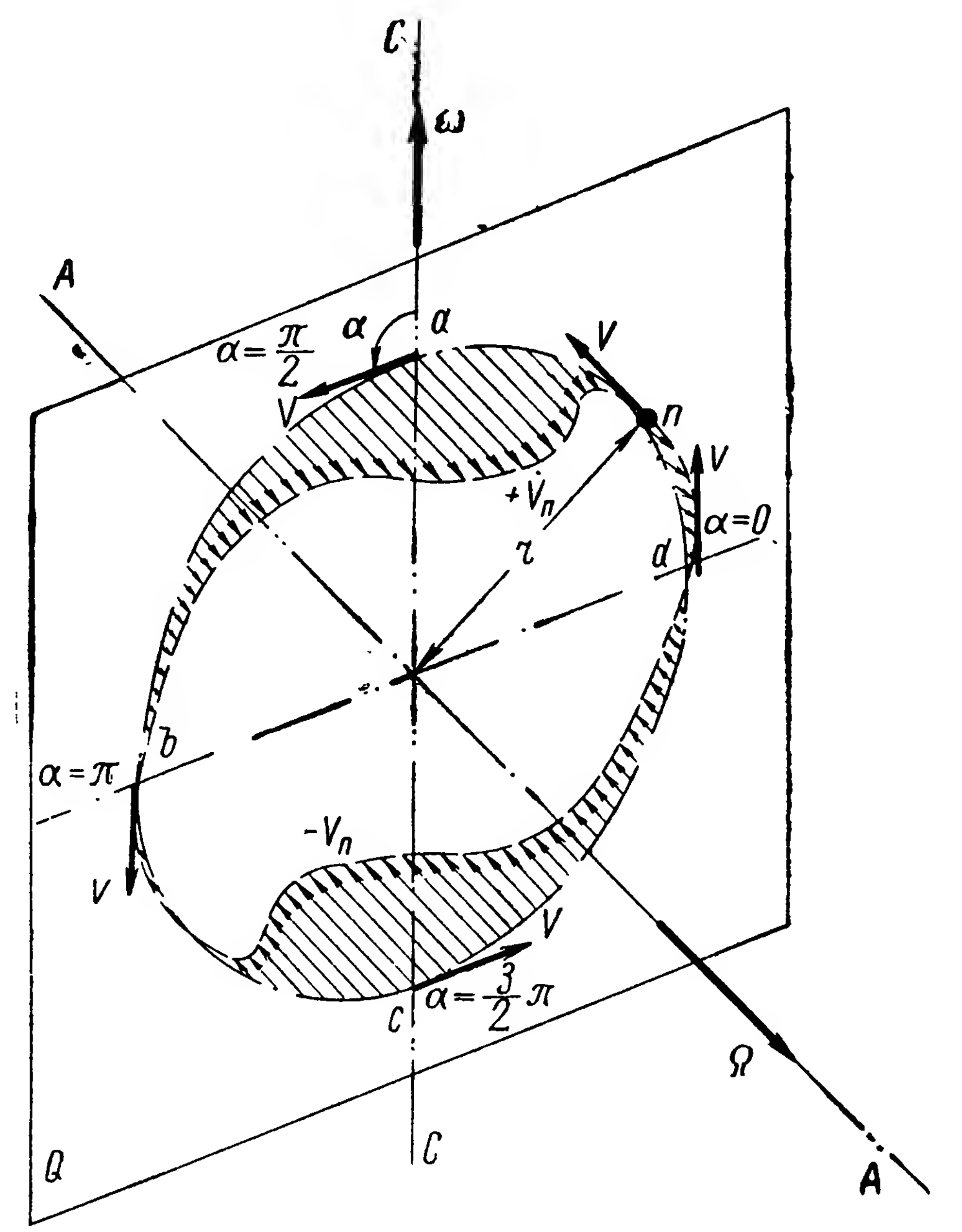


Рис. 11. Диаграмма изменения поворотного ускорения.

Поворотное ускорение $\dot{V}_п$ будет сообщаться точке и в тех случаях, когда она будет вращаться одновременно вокруг двух пересекающихся между собой осей. Представим себе, что точка n (рис. 11), вращаясь с угловой скоростью Ω вокруг оси AA, перемещается по дуге окружности радиуса r в плоскости Q, вращающейся вокруг оси CC с угловой скоростью ω. При таком сложном движении точка n будет обладать одновременно относительной линейной $V = \Omega r$ и переносной угловой ω скоростями и перемещаться с поворотным ускорением. За время одного оборота точки n вокруг оси AA поворотное ускорение будет непрерывно изменяться. В связи с непрерывным изменением угла α, состав-

ляемого векторами $\bar{V}$ и $\bar{\omega}$, поворотное ускорение в соответствии с выражением (16) будет достигать в точке a максимума

$$\dot{V}_{\text{п max}} = 2\Omega r\omega \sin\frac{\pi}{2} = 2\Omega r\omega$$

и в точке c минимума

$$\dot{V}_{\text{п min}} = 2\Omega r\omega \sin\frac{3\pi}{2} = -2\Omega r\omega,$$

меняя свой знак в точках b и d, в которых его значения становятся равными нулю.

Если в каждой точке траектории относительного движения отложить соответствующие им значения поворотного ускорения, как это и сделано на схеме (рис. 11), то получаемая в результате такого построения своеобразная пространственная диаграмма и будет характеризовать изменение поворотного ускорения в зависимости от угла Ωt поворота точки n вокруг оси AA.

§ 5. УСИЛИЕ, НЕОБХОДИМОЕ ДЛЯ СООБЩЕНИЯ ТЕЛУ ПОВОРОТНОГО УСКОРЕНИЯ

Рассматривая движение материальной точки или системы материальных точек, сопровождающееся поворотным ускорением, необходимо иметь в виду, что последнее, как и любое другое ускорение, может быть сообщено массе данной точки или данной системы материальных точек лишь в результате воздействия на нее внешнего усилия.

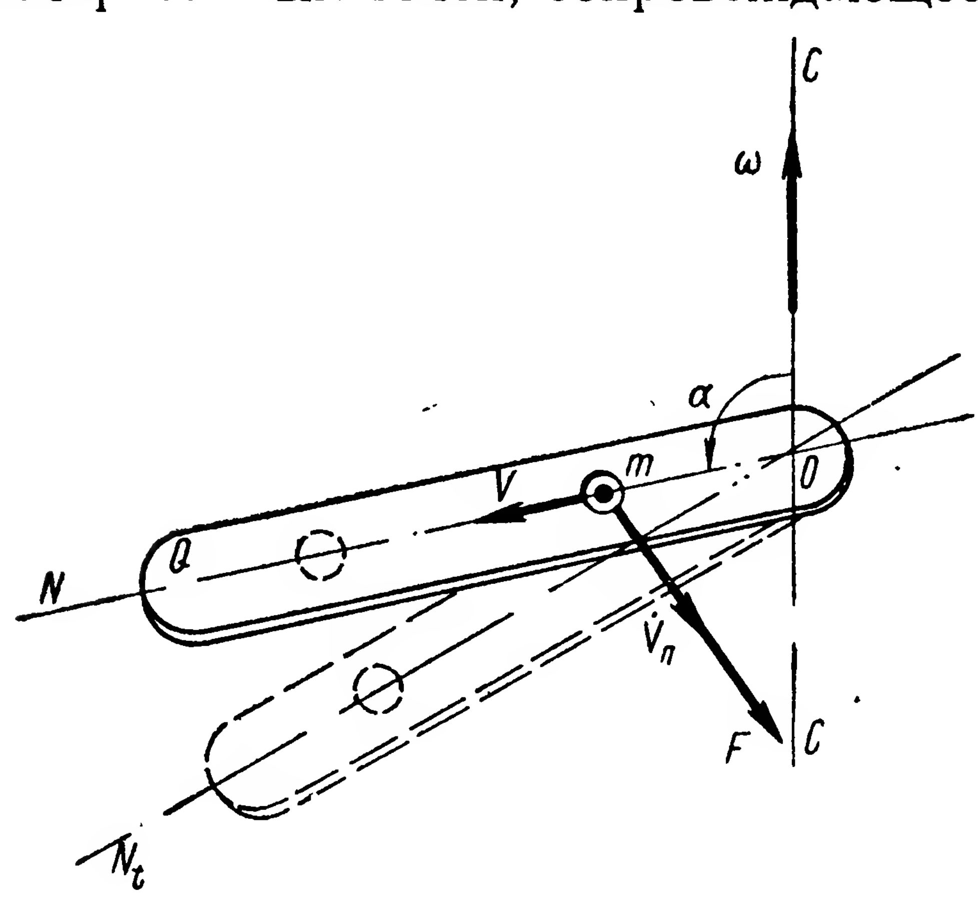


Рис. 12. Вектор внешнего усилия, создающего поворотное ускорение.

Представим себе, что масса m материальной точки, сосредоточенная в центре некоторого шарового объема, движется по площадке Q (рис. 12), вращающейся вокруг оси CC с угловой скоростью ω. Выберем какой-либо момент времени, который будем считать за начальный, и предположим, что в это мгновение масса m движется со скоростью V вдоль прямой ON, совпадающей в данный момент времени с линией симметрии площадки Q. Вполне очевидно, что линия симметрии площадки Q не будет оставаться неизменной в пространстве. Поворачиваясь вместе с площадкой Q вокруг оси CC, она будет занимать все новые положения ON_t,

составляющие непрерывно увеличивающийся угол с неизменным в пространстве направлением ON.

Если на массу m не действовало бы внешнее усилие, то она вследствие своей инерции продолжала бы двигаться вдоль прямой ON, направление которой неизменно в пространстве. Отклоняясь непрерывно от линии симметрии ON_t, масса m через некоторое время вышла бы за пределы площадки Q. Для того чтобы удержать рассматриваемое тело на линии ON_t, непрерывно изменяющей свое положение в пространстве, должны быть созданы такие условия, которые обеспечивали бы перемещение массы m с ускорением, направленным перпендикулярно линии симметрии площадки Q. В соответствии с положениями механики[1] такое условие может быть достигнуто лишь при воздействии на массу внешнего усилия F, равного по величине произведению массы на сообщаемое ей ускорение и совпадающее с последним по направлению. В нашем случае ускорение массы m, как это следует из изложенного выше, представляет собой поворотное ускорение $\dot{V}_п$, и, следовательно, необходимое внешнее усилие F, с учетом равенства (16), будет определяться выражением

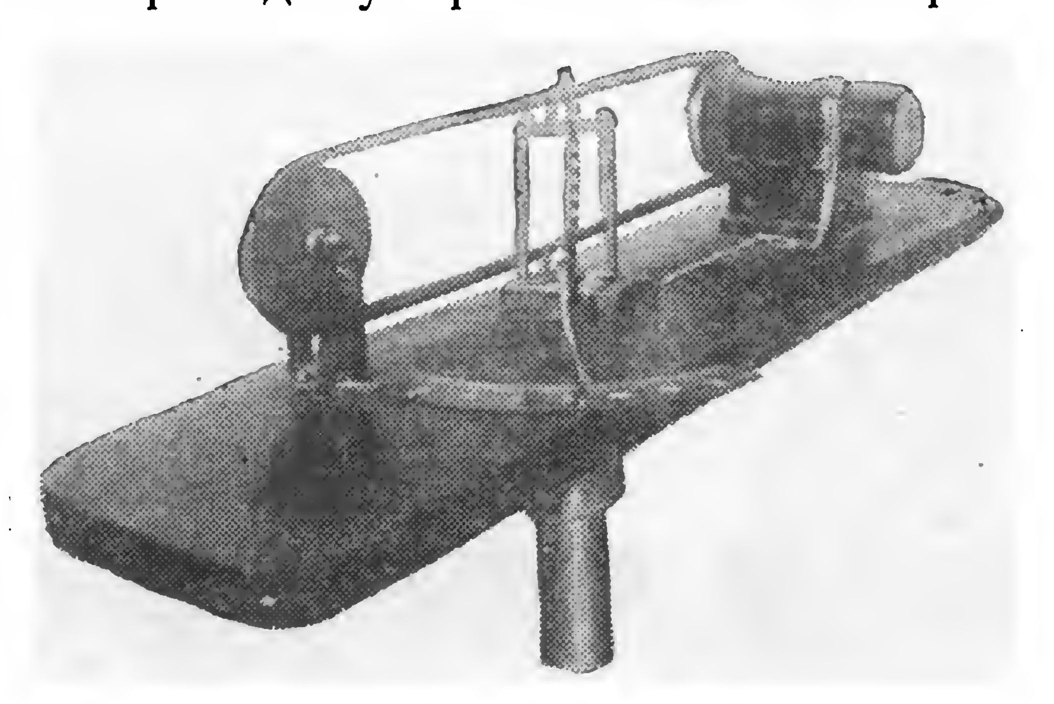


Рис. 13. Стенд для демонстрации поворотного ускорения.

$$F = m\dot{V}_п = 2mV\omega \sin \alpha. \qquad (17)$$

В необходимости воздействия внешнего усилия на материальное тело для сообщения последнему движения с поворотным ускорением легко убедиться на опыте [48]. Для этого используем стенд, представляющий собой поворотный стол (рис. 13), на котором установлены два шкива, соединенных между собой круглым резиновым ремнем. Ремень надевается на шкивы с некоторым усилием, обеспечивающим его предварительное растяжение. Поэтому для отклонения ремня от вертикальной плоскости шкивов требуется усилие, направленное параллельно осям вращения последних.

Оставляя стол неподвижным, приведем во вращение шкивы. При этом прямолинейные участки ремня будут двигаться вдоль стола с некоторой относительной скоростью V (рис. 14, *а*). Опыт показывает, что перемещение обоих участков ремня, которые для

---

[1] См.: Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье. Курс теоретической механики. Т. II, ГИТТЛ, 1955, стр. 12.

краткости условимся называть ветвями, будет происходить в этом случае строго в вертикальной плоскости шкивов. Если теперь стол привести во вращение вокруг оси *CC* (рис. 14, *б*) с некоторой угловой скоростью ω, то картина сразу же изменится. Масса материальных частиц ремня, стремясь в силу инерции сохранить неизменным первоначальное направление вращения (см. рис. 12), начнет отклоняться от вертикальной плоскости вращения шкивов, вытягивая ветви ремня в горизонтальной плоскости во взаимно противоположных направлениях. Но при растяжении ремня

Рис. 14. Изгиб ремня при движении с поворотным ускорением.

силы упругости его материала будут стремиться вернуть ветви ремня в вертикальную плоскость, ограничивая тем самым свободу их перемещения в горизонтальной плоскости. Именно через эти силы упругости массе ремня и будет передаваться внешнее усилие, обеспечивающее ее движение с поворотным ускорением.

Взаимодействие сил инерции и упругости обусловливает параболический характер кривой изгиба каждой ветви ремня. Для большей убедительности опыта плоскость вращения шкивов смещают относительно оси *CC* вращения стола на расстояние *r* (рис. 14, *а*). Это подтверждает тот факт, что описанный прогиб ветвей ремня вызван не центробежными силами инерции. Действительно, если бы причиной прогиба являлось центростремительное ускорение, возникающее при вращении стола вокруг оси *CC*, то обе ветви ремня получили бы прогиб в одном и том же направлении. Таким образом, становится очевидным, что причиной

прогиба ветвей ремня в горизонтальной плоскости является инерция масс его материальных частиц, сопротивляющихся движению с поворотным ускорением. Достаточно изменить направление вращения шкивов или стола, чтобы увидеть, как направление прогиба каждой ветви ремня сразу же изменится на обратное в связи с изменением направления поворотного ускорения.

§ 6. МОМЕНТ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

Приложение внешнего усилия, уравновешивающего силу инерции при движении массы с поворотным ускорением, необходимо и при вращении материальной точки одновременно вокруг двух пересекающихся между собой осей. Однако величина и направление этого усилия вследствие непрерывного изменения поворотного ускорения (см. рис. 11) будут переменными. Поэтому и связи, обеспечивающие передачу воздействия внешнего усилия на движущуюся материальную точку, будут испытывать также переменную нагрузку.

Чтобы проследить за изменениями указанной нагрузки, рассмотрим одновременное вращение вокруг двух осей AA и CC (рис. 15) шарика n, подвешенного к валу N на нерастяжимой нити On длиной r, масса которого сосредоточена в его геометрическом центре.

Сообщив валу N вращение вокруг оси AA с угловой скоростью Ω, приведем во вращение и шарик n. При этом нить On, выдерживая разрывную нагрузку от центробежной силы инерции $m\Omega^2 r$, обеспечивает перемещение шарика n строго по окружности abc радиуса r, лежащей в плоскости Q, перпендикулярной оси AA вращения вала N. В то мгновение, когда шарик n совместится с точкой a на окружности abc, сообщим валу N угловую скорость вращения ω вокруг оси CC и проследим за дальнейшим перемещением шарика n в течение малого промежутка времени Δt. Если бы вал N не вращался вокруг оси CC, то по прошествии времени Δt центр шарика n, совершив вокруг оси AA поворот на угол $\Omega \Delta t$, совместился бы с точкой b на той же окружности abc, лежащей в плоскости Q. Но в действительности вал N не остается неподвижным. В результате своего вращения с угловой скоростью ω его продольная ось к моменту времени Δt займет положение A_1A_1, совершив вокруг оси CC поворот на угол $\omega\Delta t$.

Казалось бы, при таком сложном движении центр шарика n по прошествии времени Δt совместится с точкой b_1 на окружности $a_1b_1c_1$, лежащей в плоскости Q_1, повернутой вокруг оси CC относительно плоскости Q на угол $\omega\Delta t$. Однако это может произойти только в том случае, если на шарик n будет действовать внешнее усилие, направленное вдоль продольной оси вала N. Нетрудно заметить (рис. 15), что передать на шарик n требуемое усилие через нить On не представляется возможным. В самом деле,

нить On, выдерживая определенное разрывное напряжение, может ограничить свободу перемещения шарика n только вдоль своей оси, но ни в коем случае не в направлении, ей перпендикулярном. Вот почему в условиях одновременного вращения шарика n вокруг осей AA и CC его масса, стремящаяся в силу инерции

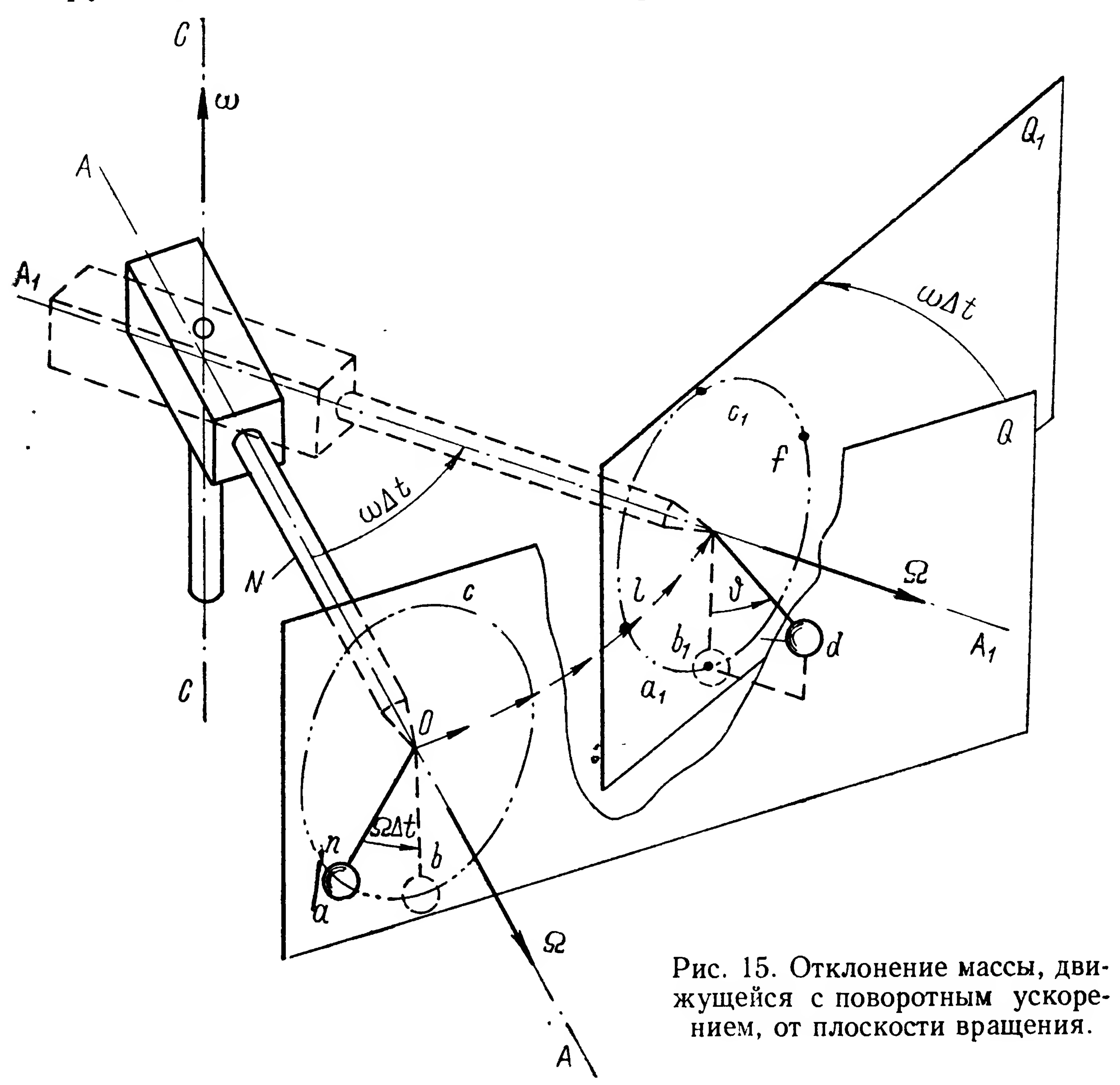


Рис. 15. Отклонение массы, движущейся с поворотным ускорением, от плоскости вращения.

сохранить направление своего движения совмещенным с плоскостью Q, будет отклоняться от плоскости Q_1, и в момент, когда центр шарика должен был бы находиться в точке b_1, совмещенной с плоскостью Q_1, он в действительности будет находиться в точке d, лежащей в плоскости Q.

Отклонение шарика n от плоскости Q_1, перпендикулярной в любой момент времени оси вала N, не будет безграничным. С увеличением угла ϑ этого отклонения центробежная сила инерции $m\dot{V}_ц$ (рис. 16) начнет создавать относительно точки O все возрастающий момент $m\dot{V}_ц r \sin\vartheta$, который будет ограничивать свободу перемещения шарика вдоль оси вала N и тем самым обу-

словливать его движение с поворотным ускорением $\dot{V}_п$. Равенство моментов, создаваемых относительно точки O силами инерции массы m при ее движении одновременно с центростремительным $\dot{V}_ц$ и поворотным $\dot{V}_п$ ускорениями

$$m\dot{V}_ц r \sin \vartheta = m\dot{V}_п r \cos \vartheta,$$

позволяет определить то значение угла ϑ, которое характеризует отклонение центра шарика n (рис. 15) от плоскости Q_1:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\dot{V}_п}{\dot{V}_ц}. \qquad (18)$$

Так как при рассматриваемом движении массы шарика ее поворотное ускорение изменяется в зависимости от величины угла поворота вокруг оси AA (см. рис. 11), то угол отклонения ϑ будет принимать значения, максимальные по величине, но противоположные по направлению при достижении центром шарика n точек b_1 и c_1 и равные нулю при совмещении его с точками l и f (рис. 15).

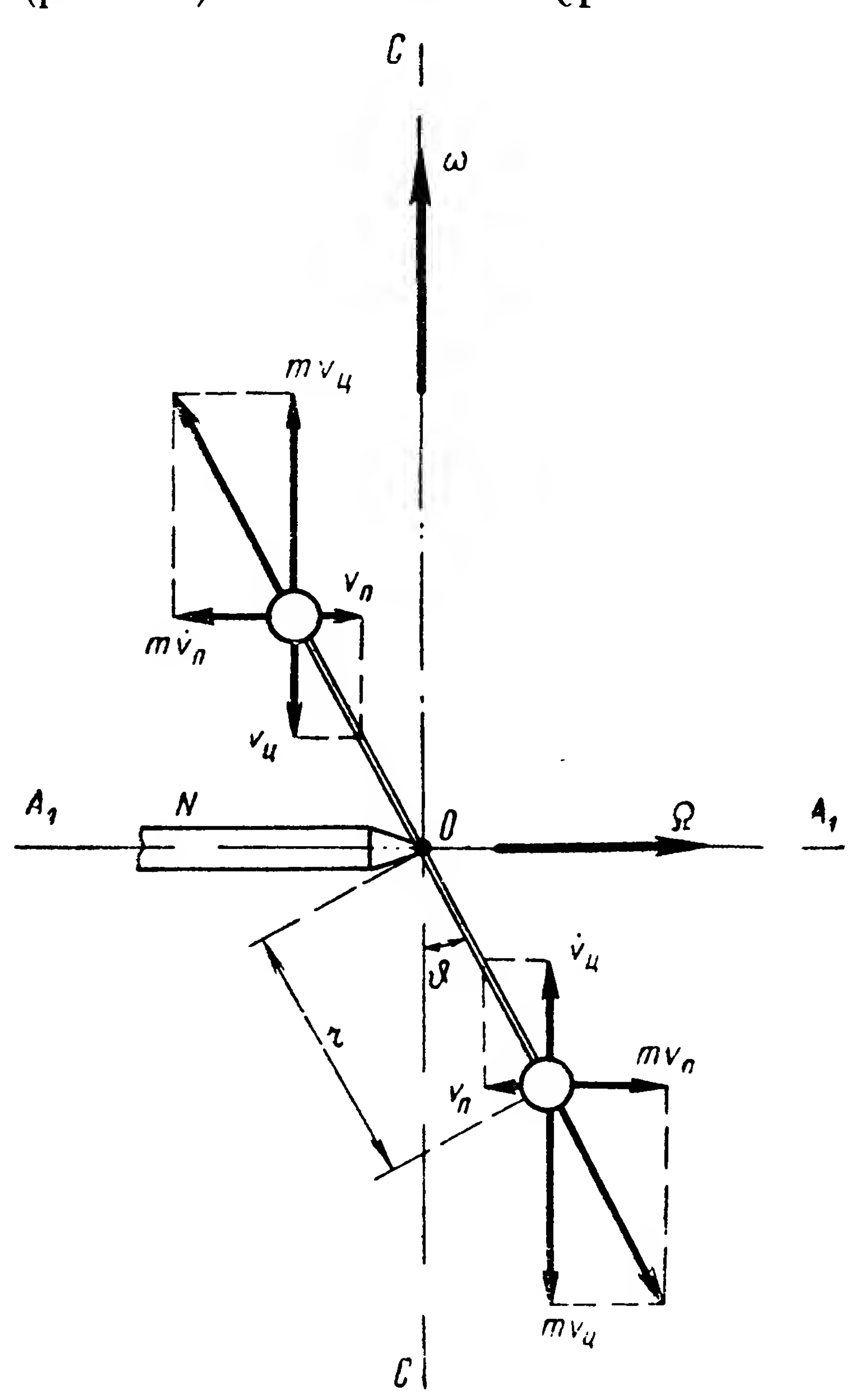


Рис. 16. Равенство моментов сил инерции массы, движущейся с поворотным и центростремительным ускорением.

Описанный характер движения материальной точки можно наглядно продемонстрировать на опыте. Для этого воспользуемся установкой (рис. 17), состоящей из электрического двигателя, на горизонтально расположенном валу которого закреплен матерчатый ротор. Для сообщения последнему вращения вокруг оси OC корпус $КП$ электродвигателя установлен на кронштейне, который можно вращать вокруг вертикальной оси.

Оставляя корпус $КП$ неподвижным (рис. 17, a), сообщим валу двигателя, а тем самым и матерчатому ротору вращение вокруг оси OA с угловой скоростью Ω. Благодаря центробежным силам инерции матерчатый ротор приобретает значительную «жесткость» и вращается строго в вертикальной плоскости, перпендикулярной

оси *OA*. Если теперь корпус *КП* привести во вращение вокруг оси *OC* с угловой скоростью ω, то тело ротора сразу же получит характерный изгиб вокруг оси *OB* (рис. 17, *б*). Как видим, опыт подтверждает стремление материальных частиц, составляющих тело ротора, оказывать сопротивление усилиям, порождающим движение с поворотным ускорением. Отклонение материальных

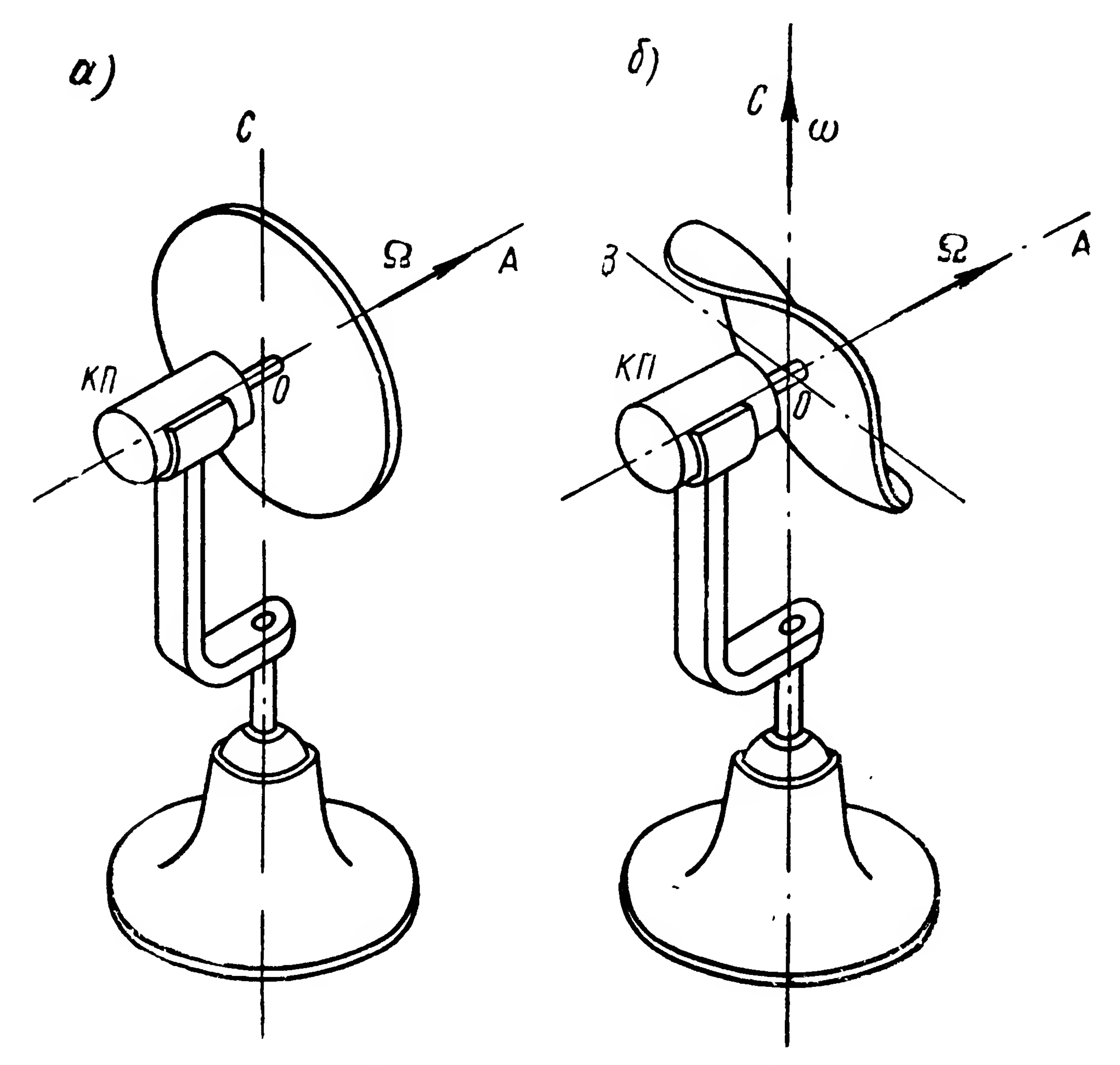


Рис. 17. Матерчатый ротор.

частиц ротора от плоскости, перпендикулярной оси *OA* их вращения, будет тем больше (рис. 15), чем дальше материальная частица отстоит от оси *OB* (рис. 18).

Разобранные выше причины возникновения сил инерции материальных частиц при их движении с поворотным ускорением будут иметь место и в случае вращения твердого тела одновременно вокруг двух пересекающихся между собой осей, но передаваться эти силы будут уже непосредственно на опоры, обеспечивающие телу свободу собственного вращения. Представим себе ротор, вращающийся с угловой скоростью Ω вокруг оси *OA* в корпусе *КП* (рис. 19). До тех пор, пока движение корпуса *КП* прямолинейно и равномерно, опоры ротора будут испытывать нагрузку только от его веса. Но достаточно корпусу *КП* сообщить вращение вокруг какой-либо оси, не совпадающей по направлению с осью *OA*, чтобы нагрузка на опоры изменилась.

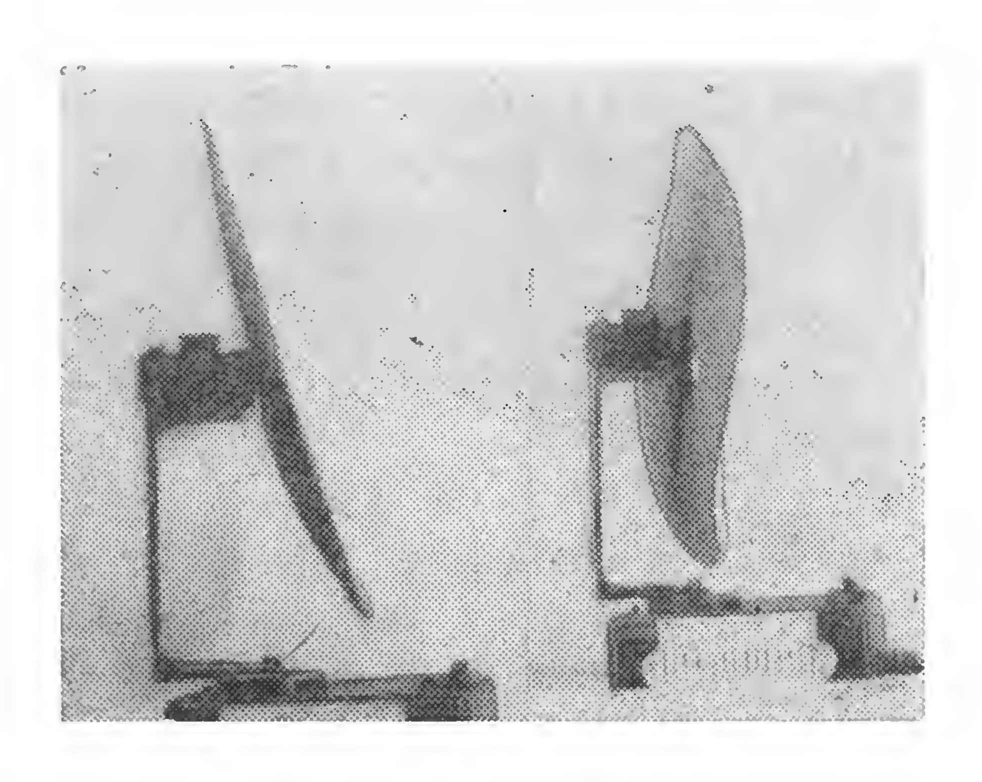


Рис. 18. Формы изгиба матерчатого ротора.

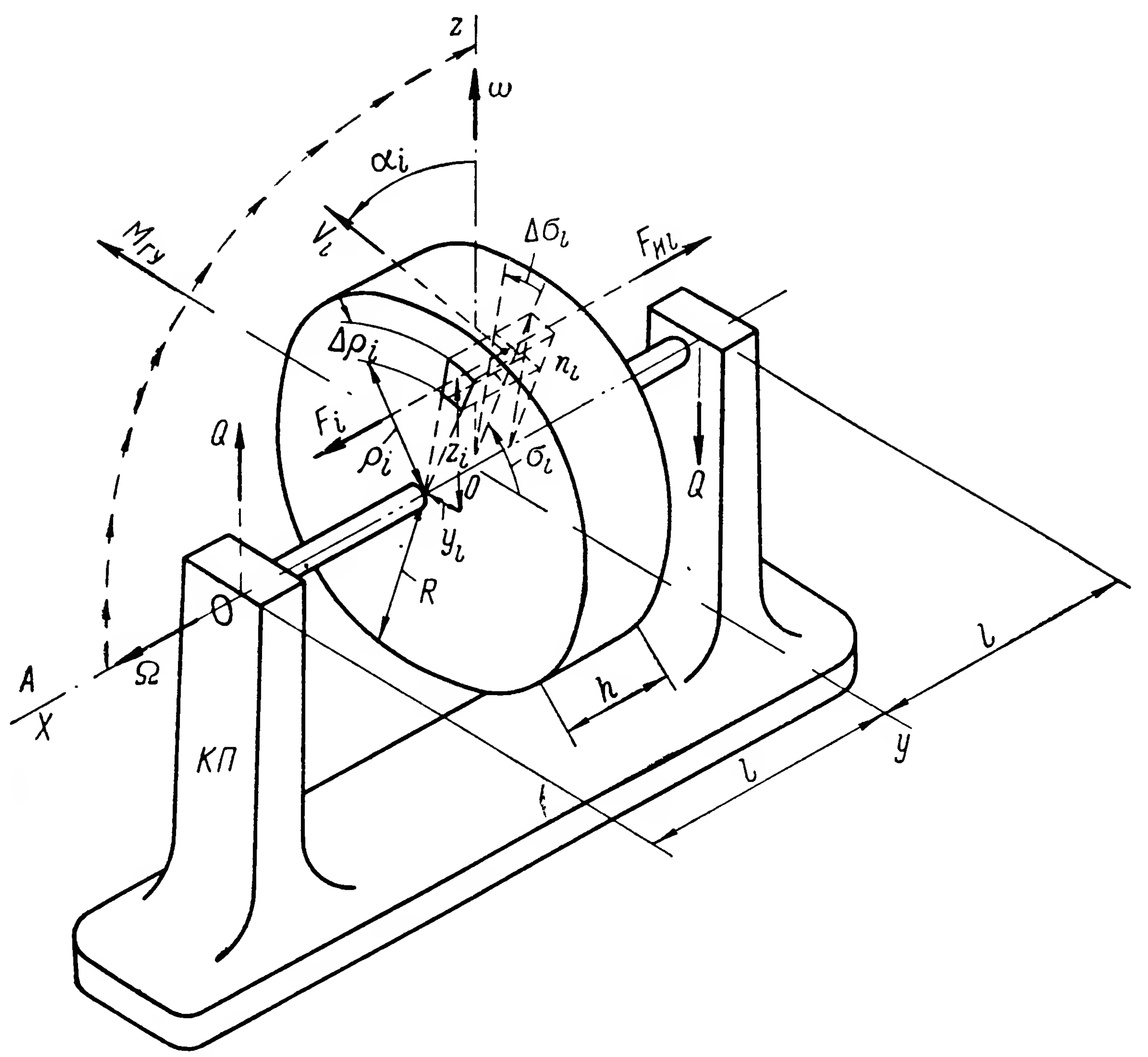


Рис. 19. К определению момента гироскопической реакции.

Для подтверждения сказанного выберем координатную систему $Oxyz$, оси Ox и Oz которой совместим соответственно с осью OA собственного вращения ротора и с перпендикуляром к плоскости основания корпуса $КП$. Будем полагать, что корпус $КП$ вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью ω. Вместе с корпусом $КП$ в указанном движении будет участвовать и ротор, материальные частицы которого получат вращение одновременно вокруг двух осей Ox и Oz с угловыми скоростями, соответственно равными Ω и ω.

В любой момент времени каждая точка n_i ротора, отстоящая от оси Ox на расстояние ϱ_i, будет обладать относительной окружной скоростью $V_i = \Omega\varrho_i$ и угловой скоростью ω переносного движения вокруг оси Oz. Следовательно, каждой точке ротора будет сообщено поворотное ускорение, равное согласно (16)

$$\dot{V}_{\text{п}i} = 2V_i\omega \sin \alpha_i = 2\Omega\varrho_i\omega \sin \alpha_i.$$

Учитывая, что угол α_i между векторами $\overline{V}_i$ и $\overline{\omega}$ равен углу σ_i, составляемому радиусом ϱ_i с осью Oy, этому выражению можно придать вид

$$\dot{V}_{\text{п}i} = 2\Omega\omega\varrho_i \sin \sigma_i. \tag{19}$$

Для сообщения материальной точке, обладающей массой m_i, ускорения $\dot{V}_{\text{п}i}$ к ней необходимо, как было указано выше, приложить внешнюю силу

$$F_i = m_i\dot{V}_{\text{п}i}. \tag{20}$$

Выражая в (20) массу m_i материальной точки ротора через ее элементарный объем и удельный вес материала γ, находим

$$m_i = \frac{\gamma}{g} \Delta\varrho_i\varrho_i\Delta\sigma_i h, \tag{21}$$

где g — ускорение силы тяжести;
h — толщина ротора.

Если теперь в равенство (20) подставить найденные значение (21) массы m_i и значение (19) поворотного ускорения $\dot{V}_{\text{п}i}$, то выражение для элементарной силы примет вид

$$F_i = 2\frac{\gamma}{g} \Omega\omega h\varrho_i^2\Delta\varrho_i \sin \sigma_i\Delta\sigma_i. \tag{22}$$

Внешнее усилие F_i, создавая движение материальной точки n_i с поворотным ускорением $\dot{V}_{\text{п}i}$, испытывает вследствие инертности ее массы m_i противодействие силы инерции $F_{\text{и}i}$, равной по величине, но обратной по направлению внешнему усилию F_i. Состав-

ляющие момента силы $F_{иi}$ относительно осей Oy и Oz определяются соотношениями

$$M_{г\,yi} = F_{и\,i} z_i = F_{и\,i} \varrho_i \sin \sigma_i;$$
$$M_{г\,zi} = F_{и\,i} y_i = F_{и\,i} \varrho_i \cos \sigma_i.$$

При этом направление момента $M_{г\,yi}$ совпадает с отрицательным направлением оси Oy, а момента $M_{г\,zi}$ — с положительным направлением оси Oz.

Опуская из рассмотрения направление действия моментов $M_{г\,yi}$ и $M_{г\,zi}$, подставим в последние равенства вместо силы $F_{и\,i}$ равное ей по величине значение F_i, определяемое по формуле (22). В результате

$$M_{г\,yi} = 2\frac{\gamma}{g}\,\Omega\omega h \varrho_i^3 \Delta\varrho_i \sin^2 \sigma_i \Delta\sigma_i;$$

$$M_{г\,zi} = 2\frac{\gamma}{g}\,\Omega\omega h \varrho_i^3 \Delta\varrho_i \sin \sigma_i \cos \sigma_i \Delta\sigma_i.$$

Масса всех материальных частиц ротора будет оказывать сопротивление внешним усилиям, сообщающим его точкам поворотное ускорение. Поэтому суммарные значения моментов инерционных сил будут определяться интегралами

$$M_{г\,y} = 2\frac{\gamma}{g}\,\Omega\omega h \int_0^R \varrho^3\, d\varrho \int_0^{2\pi} \sin^2 \sigma\, d\sigma; \qquad (23)$$

$$M_{г\,z} = 2\frac{\gamma}{g}\,\Omega\omega h \int_0^R \varrho^3\, d\varrho \int_0^{2\pi} \sin \sigma \cos \sigma\, d\sigma, \qquad (24)$$

где R — радиус ротора.

Входящий в выражение (24) интеграл

$$\int_0^{2\pi} \sin \sigma \cos \sigma\, d\sigma = \frac{1}{2} \sin^2 \sigma \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

поэтому

$$M_{г\,z} = 0.$$

Переписав выражение (23) в виде

$$M_{г\,y} = 2\frac{\gamma}{g}\,\Omega\omega h \int_0^R \varrho^3\, d\varrho \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\sigma)\, d\sigma,$$

или

$$M_{г\,y} = \frac{\gamma}{g}\,\Omega\omega h \int_0^R \varrho^3 d\varrho \left[\int_0^{2\pi} d\sigma - \int_0^{2\pi} \cos 2\sigma\, d\sigma\right],$$

найдем

$$\int_0^{2\pi} \cos 2\sigma\, d\sigma = \frac{1}{2} \sin 2\sigma \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

в соответствии с чем выражение (23) примет вид

$$M_{\text{г}y} = \frac{\gamma}{g} \Omega\omega h \int_0^R \varrho^3 d\varrho \int_0^{2\pi} d\sigma. \tag{25}$$

Проанализировав выражение (25), нетрудно заметить, что входящий в него множитель $\frac{\gamma}{g} h \int_0^R \varrho^3 d\varrho \int_0^{2\pi} d\sigma$ характеризует величину осевого момента инерции ротора.

В соответствии с определениями механики [1] момент инерции J твердого тела относительно выбранной оси определяется равенством

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i \varrho_i^2 = \iiint \varrho^2 dm;$$

в рассматриваемом случае, учитывая формулу (21),

$$J = \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma}{g} \Delta\varrho_i \varrho_i \Delta\sigma_i h \varrho_i^2 = \frac{\gamma}{g} h \int_0^R \varrho^3 d\varrho \int_0^{2\pi} d\sigma. \tag{26}$$

Подставив (26) в выражение (25), найдем

$$M_{\text{г}\, y} = J\Omega\omega. \tag{27}$$

Равенство (27) показывает, что при сообщении ротору, вращающемуся вокруг оси Ox с угловой скоростью Ω (рис. 19), переносного движения вокруг оси Oz с угловой скоростью ω инерция его массы будет оказывать сопротивление внешним силам, порождающим движение ротора с поворотным ускорением. Это сопротивление будет проявляться в виде момента сил инерции $M_{\text{г}\, y}$, получившего название *момента гироскопической реакции*, или сокращенно *гироскопического момента*. Гироскопический момент, действуя относительно оси Oy, как бы стремится повернуть ротор так, чтобы по кратчайшему расстоянию совместить ось Ox его собственного вращения с осью Oz вынужденного поворота.

Из равенства (27) следует, что величина гироскопического момента при одном и том же значении угловой скорости ω тем больше, чем больше произведение $J\Omega$, характеризующее момент количества

[1] См.: Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье. Курс теоретической механики. Т. II, ГИТТЛ, 1955, стр. 250.

движения ротора вокруг главной оси OA гироскопа. Эту величину в прикладной теории гироскопа принято называть *кинетическим моментом*.

Момент гироскопической реакции $M_{\text{г}\,y}$ будет действовать на опоры ротора, расположенные в стойках корпуса *КП*, создавая дополнительную нагрузку Q, определяемую в соответствии с равенством (27) выражением

$$Q = \frac{M_{\text{г}\,y}}{2l} = \frac{J\Omega\omega}{2l}, \tag{28}$$

где l — расстояние между опорами ротора.

Даже при малых размерах ротора, но достаточно большой угловой скорости Ω его вращения вокруг оси Ox момент гироскопической реакции может быть весьма значительным. При этом воспринимаемые опорами нагрузки в результате действия гироскопического момента становятся соизмеримыми с действующими на опоры усилиями от веса ротора.

Пример 1. Определить значение момента инерции J относительно оси Ox стального диска (рис. 19), размеры которого $R = 30$ *мм*; $h = 20$ *мм*.

Из формулы (26) следует

$$J = \frac{\gamma}{g} h \int_0^R \varrho^3 \, d\varrho \int_0^{2\pi} d\sigma = \pi \frac{\gamma}{g} h \frac{R^4}{2}.$$

Подставим в полученное выражение значения входящих в него величин и учтем, что удельный вес стали[1] $\gamma = 7{,}9$ $\textit{Гсм}^{-3}$, а ускорение силы тяжести $g = 981$ $\textit{смсек}^{-2}$:

$$J = 3{,}14 \frac{7{,}9}{981} 2 \frac{3^4}{2} = 2{,}04 \ \textit{Гсмсек}^2.$$

Пример 2. Определить усилия, воспринимаемые опорами ротора, вращающегося вокруг оси Ox (рис. 19) со скоростью Ω при неподвижном в пространстве положении корпуса *КП* и при вращении последнего вокруг оси Oz со скоростью 3 град./сек. Ротор весом $G = 180$ *Г* обладает осевым моментом инерции $J = 0{,}73$ $\textit{Гсмсек}^2$ и вращается вокруг оси Ox с числом оборотов $n = 30\,000$ в минуту. Расстояние между опорами ротора $2l = 30$ *мм*.

Нагрузка, воспринимаемая каждой опорой при неподвижном положении корпуса *КП*,

$$Q_1 = \frac{G}{2} = \frac{180}{2} = 90 \ \textit{Г}.$$

Нагрузка Q_2, воспринимаемая опорами при вращении корпуса *КП* вокруг оси Oz, определяется равенством (28), в котором значения угловых скоростей Ω и ω должны быть выражены в радианах в секунду:

$$\Omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 30\,000}{60} = 3140 \ \text{сек}^{-1};$$

$$\omega = \frac{3}{57{,}3} = 0{,}052 \ \text{сек}^{-1}.$$

[1] См. «Краткий справочник машиностроителя», Машгиз, 1950, стр. 162.

Таким образом, гироскопический момент в рассматриваемом случае

$$M_{\text{г}y} = J\Omega\omega = 0{,}73 \cdot 3140 \cdot 0{,}052 = 119{,}2 \ \textit{Гсмсек}^2$$

и, следовательно, искомая нагрузка

$$Q_2 = \frac{M_{\text{г}\,y}}{2l} = \frac{J\Omega\omega}{2l} = \frac{119{,}2}{3} = 39{,}73 \ \textit{Г}.$$

Как видим, порождаемая гироскопическим моментом нагрузка составляет более 44% от величины нагрузки Q_1, создаваемой весом ротора. В некоторых случаях величина нагрузки Q_2 не только достигает, но и превышает значение Q_1. Последнее обстоятельство вызывает необходимость в тщательной проверке прочности деталей гироскопических устройств с учетом нагрузок, порождаемых моментом гироскопической реакции.

§ 7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Ротору, вращающемуся вокруг оси OA с некоторой угловой скоростью Ω_0 (рис. 20), может быть сообщен вынужденный поворот с угловой скоростью ω_D вокруг любой оси OD, составляющей с осью OA его собственного вращения произвольный угол α. В этом случае для определения гироскопического момента $\overline{M}_{\text{г}}$ спроектируем вектор ω_D на ось Ox, совмещенную с осью OA, и на перпендикулярную ей плоскость yOz. Нетрудно заметить, что сумма скоростей Ω_0 и $\omega_x = \omega_D \cos \alpha$ определяет угловую скорость Ω собственного вращения ротора вокруг оси OA:

$$\Omega = \Omega_0 + \omega_D \cos \alpha.$$

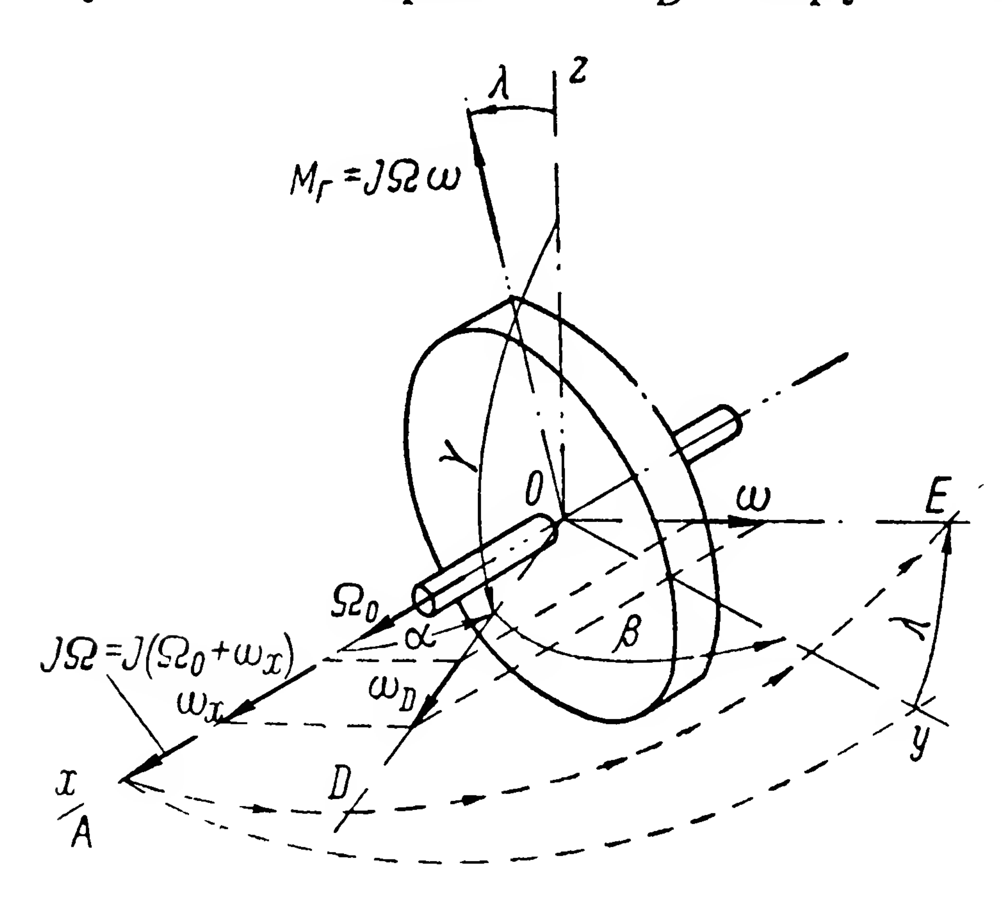


Рис. 20. К определению гироскопического момента в общем случае.

Проекция вектора $\overline{\omega}_D$ на плоскость yOz будет определять значение сообщаемой ротору переносной угловой скорости:

$$\omega = \omega_D \sin \alpha.$$

По аналогии с изложенным выше (§ 6, рис. 19) можем утверждать, что и в данном случае инерция массы ротора, обладающего осевым моментом инерции J, будет оказывать внешним усилиям, порождающим его движение с поворотным ускорением, соответствующее сопротивление, характеризуемое величиной момента гироскопической реакции

$$M_{\text{г}} = J\Omega\omega. \tag{29}$$

Вектор $\overline{M}_г$ будет находиться в плоскости yOz и располагаться перпендикулярно осям OA и OD. Как видим, при сообщении ротору угловых скоростей Ω вокруг оси OA и ω вокруг какой-либо другой оси OE, перпендикулярной первой, возникает момент гироскопической реакции $M_г = J\Omega\omega$. Его вектор $\overline{M}_г$ перпендикулярен векторам $\overline{\Omega}$ и $\overline{\omega}$ и направлен в сторону, откуда будет казаться, что $\overline{\Omega}$ совмещается с $\overline{\omega}$ по кратчайшему расстоянию против часовой стрелки.

Для уточнения положения вектора $\overline{M}_г$ в плоскости yOz обратимся к основной формуле сферической тригонометрии [1]

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\mu, \quad (30)$$

устанавливающей зависимость между углами α, β, γ и μ (рис. 21), образуемыми тремя произвольно проведенными из центра O осями OA, OB и OC.

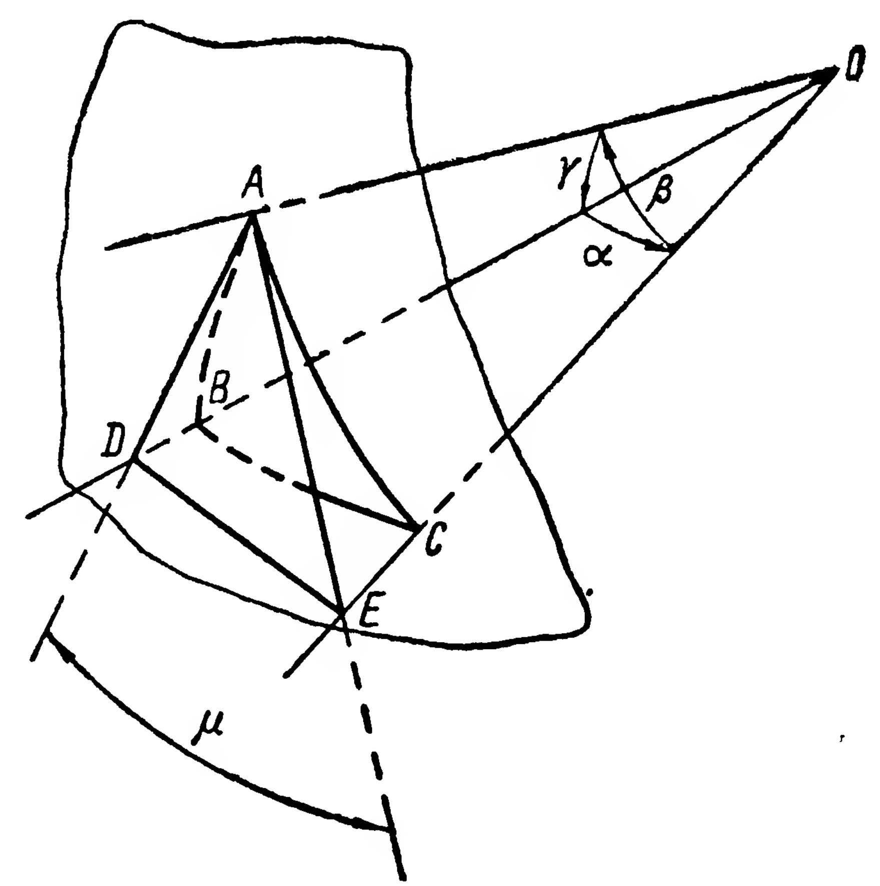


Рис. 21. Углы сферического треугольника.

Указанные оси пересекают сферическую поверхность единичного радиуса соответственно в точках A, B и C, которые образуют на ней сферический треугольник ABC. При этом перпендикуляры AD и AE, опущенные из точки A на оси OB и OC, образуют между собой угол μ, характеризующий взаимное положение плоскостей OAB и OAC.

По формуле (30) можно определить угол λ между плоскостями xOE и xOy (см. рис. 20). Так, если известны углы α, β и γ, составляемые осью OD с осями координат $Oxyz$, то из сферического треугольника xDy будем иметь

$$\cos\beta = \cos\alpha\cos\frac{\pi}{2} + \sin\alpha\sin\frac{\pi}{2}\cos\lambda,$$

откуда

$$\cos\lambda = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} \quad (31)$$

и, следовательно, искомый угол

$$\lambda = \arccos\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}\right).$$

---

[1] См.: М. К. Вентцель. Сферическая тригонометрия. Геодезиздат, 1948, стр. 21.

Таковы значения углов, составляемых в плоскости yOz векторами $\overline{\omega}$ переносной скорости ротора и $\overline{M}_г$ гироскопического момента с осями Oy и Oz соответственно.

Пример 3. Определить величину и направление момента гироскопической реакции ротора, обладающего осевым моментом инерции $J = 2{,}1$ *Гсмсек*^{2} и вращающегося вокруг оси Ox (рис. 20) с угловой скоростью $\Omega_0 = 3000$ сек$^{-1}$, если одновременно ему сообщается вынужденное движение вокруг оси OD с угловой скоростью $\omega_D = 0{,}15$ сек$^{-1}$. Ось OD составляет с осями координат $Oxyz$ углы $\alpha = 30°$; $\beta = 62°$; $\gamma = 80° 04'$.

По соотношению (31) находим величину угла λ, составляемого плоскостями xOD и xOy:

$$\cos\lambda = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} = \frac{0{,}4695}{0{,}5} = 0{,}939,$$

откуда

$$\lambda = 20° 10'.$$

Под таким углом λ к осям Oy и Oz будут находиться расположенные в плоскости yOz векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{M}_г$. Для определения величины последнего вычислим проекции вектора $\overline{\omega}_D$ угловой скорости вынужденного поворота ротора на ось Ox и на плоскость yOz:

$$\omega_x = \omega_D \cos\alpha = 0{,}15 \cdot 0{,}866 = 0{,}13 \text{ сек}^{-1};$$

$$\omega_y = \omega_D \sin\alpha = 0{,}15 \cdot 0{,}5 = 0{,}075 \text{ сек}^{-1}.$$

По формуле (29) находим искомый момент гироскопической реакции:

$$M_г = J(\Omega_0 + \omega_x)\,\omega = 2{,}1\,(3000 + 0{,}13)\,0{,}075 = 472{,}5 \text{ Гсм}.$$

§ 8. ЗАКОН ПРЕЦЕССИИ

Рассмотрим случай движения гироскопа под действием внешнего момента. Для лучшего уяснения причин, порождающих это движение, воспользуемся лабораторной моделью гироскопа (рис. 8).

Закрепив установленный на корпусе *КП* стопорный винт d (рис. 22), лишим гироскоп возможности поворота вокруг оси OC, а затем сообщим его ротору вращение вокруг оси OA. После того как угловая скорость Ω этого вращения достигнет достаточно большого значения, начнем поворачивать корпус *КП* вокруг оси OC. Так как в этом случае вращение ротора вокруг оси OC невозможно, то он будет вынужден поворачиваться совместно с корпусом *КП* вокруг оси OC с угловой скоростью $\omega_к$.

Если бы ротор имел свободу вращения только вокруг оси OA, то рассматриваемый случай явился бы повторением разобранного ранее движения (см. § 6, рис. 19). Телу ротора в этом случае сообщалось бы поворотное ускорение, в результате чего возник бы момент гироскопической реакции. Но в данном случае гироскоп обладает свободой вращения вокруг оси OB, которая в отличие от гибкого ротора (см. рис. 17) ничем, кроме малых сил трения в опорах, не ограничена. Поэтому материальные точки, составляющие

тело ротора, стремясь в силу инерции сохранить неизменным направление своего движения (см. рис. 15), начнут отклоняться от плоскости *СОВ* (рис. 22). В результате этого гироскоп будет поворачиваться вокруг оси *ОВ* до тех пор, пока его главная ось *ОА* не совместится с осью *ОС* вынужденного поворота, т. е. до тех пор, пока не совместятся векторы $\overline{\Omega}$ и $\overline{\omega}_к$ (рис. 23).

Разобранная выше схема движения материальной точки (рис. 15) позволяет утверждать, что и в этом случае ротор будет поворачиваться вокруг оси *ОВ* в направлении, при котором совмещение вектора $\overline{\Omega}$ угловой скорости собственного вращения с вектором $\overline{\omega}_к$ угловой скорости вынужденного поворота совершается по кратчайшему расстоянию. Поэтому вектор $\overline{\omega}$ угловой скорости ротора вокруг оси *ОВ* должен быть направлен по перпендикуляру к обоим векторам $\overline{\Omega}$ и $\overline{\omega}_к$ и притом в ту сторону, откуда будет казаться, что совмещение $\overline{\Omega}$ с $\overline{\omega}_к$ происходит против часовой стрелки (рис. 22).

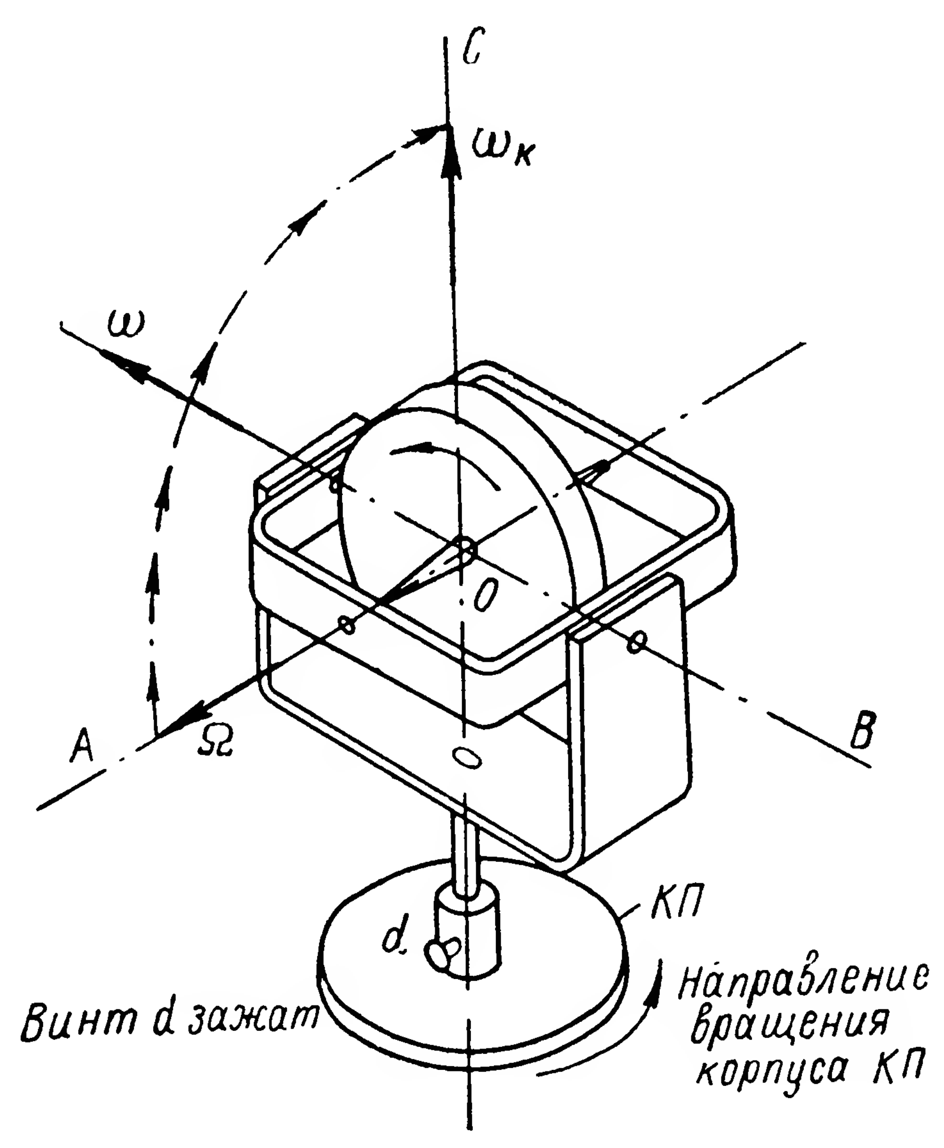


Рис. 22. Движение гироскопа при вынужденном повороте.

В рассматриваемых условиях поворот ротора вокруг оси *ОВ* может быть ликвидирован. Действительно, если ограничить свободу вращения гироскопа вокруг оси *ОВ* грузом *Р* (рис. 24), величину которого подобрать так, чтобы создаваемый им на плече l момент Pl был равен по величине, но противоположен по направлению моменту гироскопической реакции $M_г = J\Omega\omega_к$, то инерция массы ротора будет преодолена. Следовательно, гироскоп будет вынужден вращаться одновременно вокруг двух осей *ОА* и *ОС*, перемещаясь в этом случае (см. § 6) с поворотным ускорением. При этом в течение всего времени опыта главная ось *ОА* будет оставаться перпендикулярной оси *ОС*.

Как видим, для преодоления сопротивления сил инерции, возникающих при сообщении ротору гироскопа одновременного вращения вокруг двух осей *ОА* и *ОС*, необходимо чтобы на гироскоп действовала внешняя сила *Р*, создающая относительно оси *ОВ* момент $Pl = J\Omega\omega_к$. Только при соблюдении последнего условия одновременное вращение ротора вокруг оси *ОА* с угловой скоростью Ω и совместно с корпусом *КП* вокруг оси *ОС* с угловой

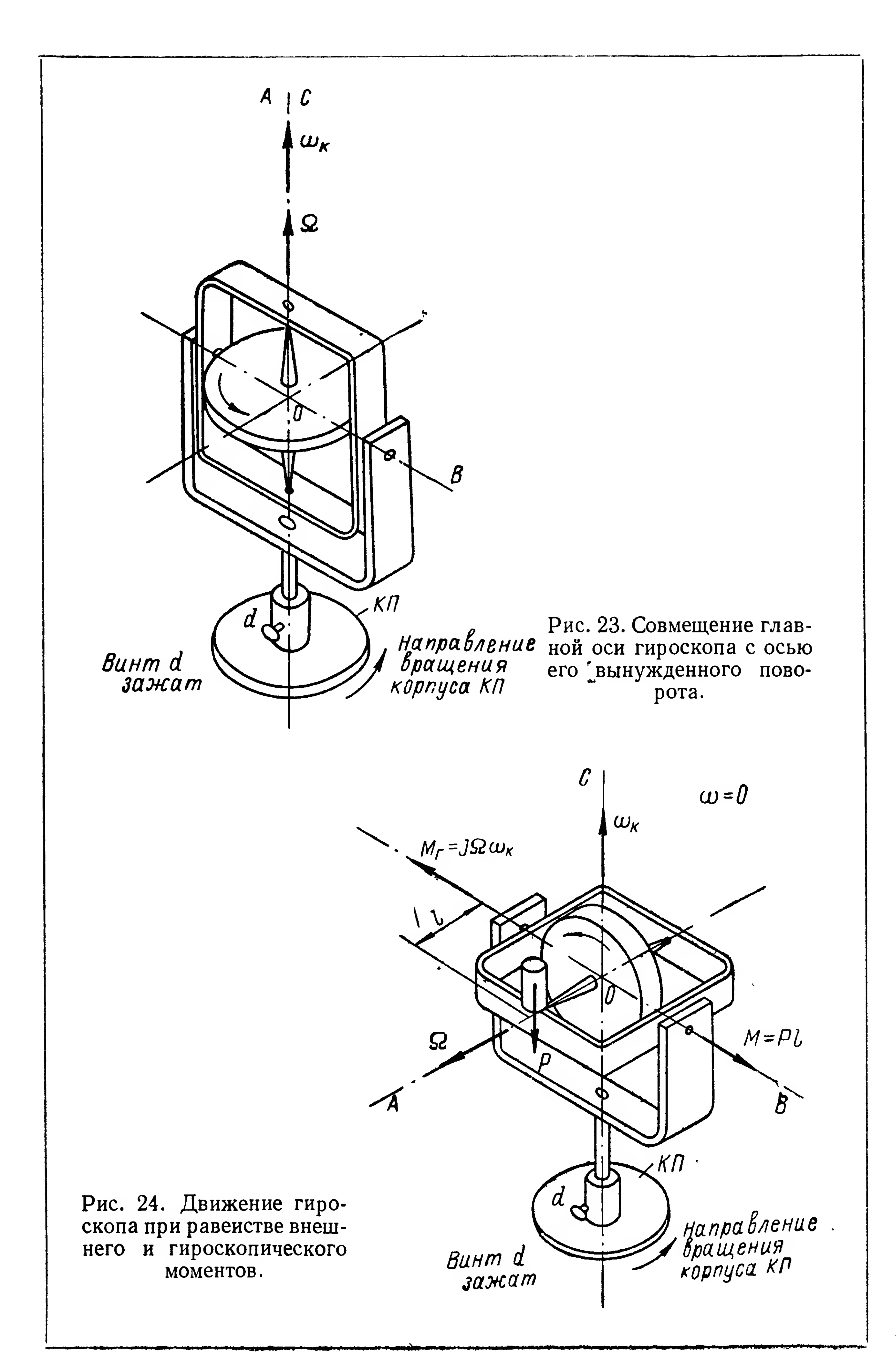


Рис. 23. Совмещение главной оси гироскопа с осью его вынужденного поворота.

Рис. 24. Движение гироскопа при равенстве внешнего и гироскопического моментов.

скоростью $\omega_к$ не будет вызывать поворота ротора вокруг оси *OB*. Естественно, что при этом угловая скорость ω будет равна нулю.

Освободим теперь винт *d* и обеспечим свободу вращения гироскопа вокруг оси *OC* по отношению к корпусу *КП*. Очевидно, что с этого мгновения гироскоп уже не будет участвовать во вращении корпуса *КП*, какую бы угловую скорость $\omega_к$ ему ни сообщали. Поэтому остановим корпус *КП* и рассмотрим характер движения гироскопа, обладающего свободой вращения вокруг осей *OA*, *OB* и *OC* под действием внешнего момента $M = Pl$.

Момент Pl сразу же вызовет движение гироскопа вокруг оси *OB* с ускорением $\dot{\omega}_м$ (рис. 25). Тем самым ротор гироскопа будет приведен во вращение одновременно вокруг осей *OA* и *OB*. Поворачиваясь вокруг этих осей с угловыми скоростями Ω и $\omega_м$, гироскоп будет вынужден двигаться с поворотным ускорением (см. § 6). При этом его масса, стремясь сохранить движение в прежнем направлении, начнет поворачиваться вокруг оси *OC*, относительно которой внешние силы не создают каких-либо моментов и поэтому не могут преодолеть возникающих сил инерции. В результате по аналогии с изложенным выше (см. рис. 22) главная ось *OA* гироскопа, по которой направлен вектор $\bar{\Omega}$ угловой скорости собственного вращения, будет стремиться совместиться с вектором $\bar{\omega}_м$ вынужденного поворота. Однако конструкция карданова подвеса воспрепятствует такому совмещению. Поэтому в рассматриваемом случае все элементы гироскопа получат вращение вокруг оси *OC* с некоторой угловой скоростью $\omega_п$. Чем больше ускорение $\dot{\omega}_м$, сообщаемое гироскопу внешним моментом Pl, тем с большей интенсивностью будет возрастать угловая скорость $\omega_м$ его вынужденного поворота. При этом чем больше $\omega_м$, тем больше сообщаемое гироскопу поворотное ускорение и, следовательно, тем больше угловая скорость $\omega_п$ поворота гироскопа вокруг оси *OC*. Таким образом, чем больше ускорение $\dot{\omega}_м$, тем интенсивнее возрастает угловая скорость $\omega_п$ и порождаемый ею гироскопический момент $M_г = J\Omega\omega_п$. Величина последнего весьма быстро

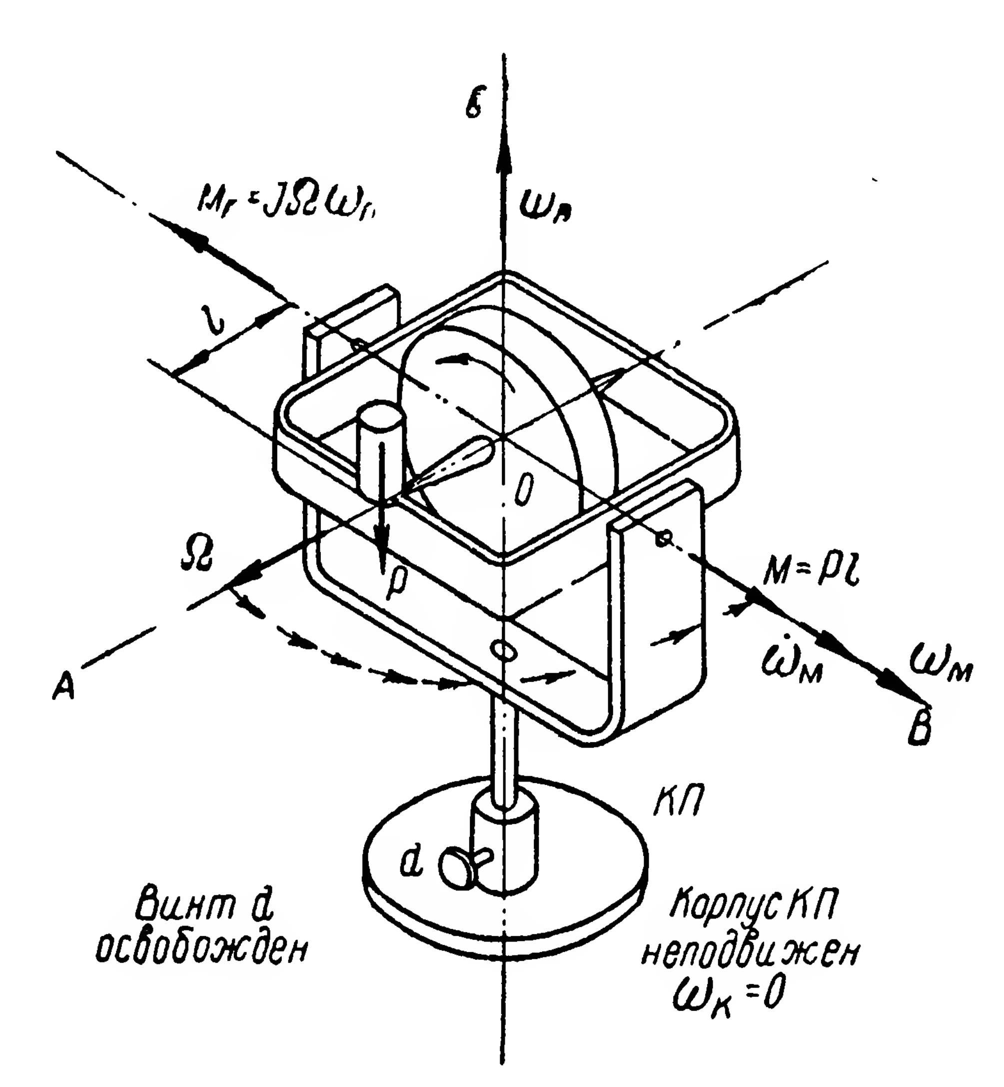


Рис. 25. Прецессия гироскопа.

уравновесит внешний момент $M = Pl$, в связи с чем поворот гироскопа вокруг оси OB прекратится и останется лишь его систематическое движение вокруг оси OC, сопровождаемое, как увидим в дальнейшем, малыми колебаниями. Условие равенства внешнего M и гироскопического $M_г$ моментов позволяет определить величину угловой скорости $\omega_п$ так называемого прецессионного движения гироскопа, которое в данном случае происходит вокруг наружной оси OC:

$$\omega_п = \frac{M}{J\Omega} = \frac{Pl}{J\Omega}. \tag{32}$$

Полученное уравнение выражает закон прецессионного движения, или сокращенно прецессии гироскопа, являющийся основным в элементарной теории гироскопических явлений. Уравнение (32) и схема, приведенная на рис. 25, позволяют составить первое, приближенное суждение о характере движения гироскопа.

Пользуясь этой схемой, нетрудно заметить, что при действии на гироскоп, обладающий собственным вращением, внешних сил, создающих момент относительно одной из его осей подвеса OB или OC, возникает прецессионное движение вокруг второй оси подвеса, т. е. соответственно вокруг оси OC или OB. Если действующие на гироскоп внешние силы создают моменты относительно обеих осей подвеса OB и OC, то, как это будет показано ниже, прецессия гироскопа будет происходить в этом случае одновременно вокруг двух осей: OC и OB. Рассуждая по аналогии с изложенным в § 7, представляется возможным установить простое правило для определения направления прецессионного движения гироскопа. Согласно этому правилу вектор $\bar{\omega}_п$ угловой скорости прецессии (рис. 25) направлен перпендикулярно векторам $\bar{\Omega}$ угловой скорости собственного вращения гироскопа и $\bar{M}$ момента действующих на него внешних сил. При этом, если наблюдать за прецессионным движением гироскопа с конца вектора $\bar{\omega}_п$, будет казаться, что оно происходит против часовой стрелки.

В свою очередь из формулы (32) вытекает, что угловая скорость $\omega_п$ прецессионного движения гироскопа находится в прямой зависимости от величины момента M внешних сил. С увеличением или уменьшением момента M соответственно увеличивается или уменьшается и угловая скорость $\omega_п$ прецессии. Если момент M внешних сил становится равным нулю, то и угловая скорость $\omega_п$ прецессионного движения принимает нулевое значение. Следовательно, при отсутствии моментов внешних сил, действующих на гироскоп, будет отсутствовать и его прецессия. Положение гироскопа в этом случае будет оставаться практически неизменным, или, как говорят, стабильным в пространстве.

Таким образом, устранив действие на гироскоп моментов внешних сил, его корпусу можно будет сообщать движение с любыми скоростями и ускорениями, не вызывая изменений положения главной оси гироскопа в пространстве. Установим, например, гироскоп так, чтобы в начальный момент времени его главная ось OA составляла с вертикалью O_3Z угол Λ, а наружная ось подвеса OC была с ней совмещена (рис. 26, *а*). Несмотря на последующие наклоны корпуса *КП* и неразрывно связанной с ним наружной оси подвеса OC на тот или иной угол β от вертикали

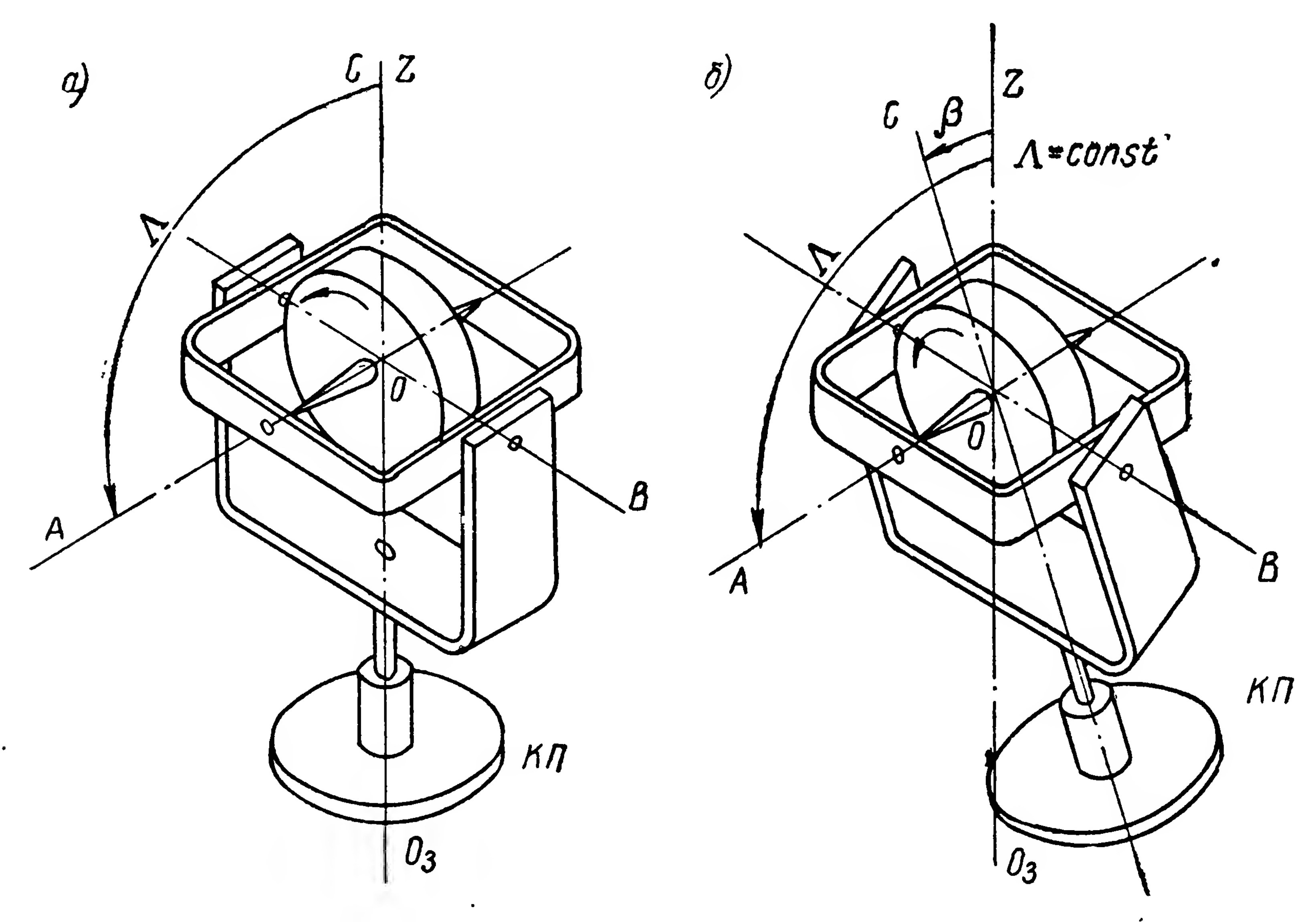


Рис. 26. Стабилизация направления главной оси гироскопа в пространстве.

O_3Z, главная ось OA гироскопа будет сохранять свое первоначальное направление стабильным в пространстве (рис. 26, *б*). Именно это свойство гироскопа и получило широкое практическое использование в разнообразных приборах и устройствах, предназначенных для фиксирования на подвижных объектах заранее заданного направления.

Пример 4. Определить величину угловой скорости прецессионного движения гироскопа при воздействии на него внешних сил, создающих относительно оси, перпендикулярной главной, момент $M = 0{,}5$ *Гсм*. Ротор гироскопа вращается вокруг главной оси с числом оборотов n, равным 18 000 в минуту, и обладает относительно ее осевым моментом инерции $J = 4{,}38$ *Гсмсек*^{2}.

Вычислив угловую скорость собственного вращения гироскопа

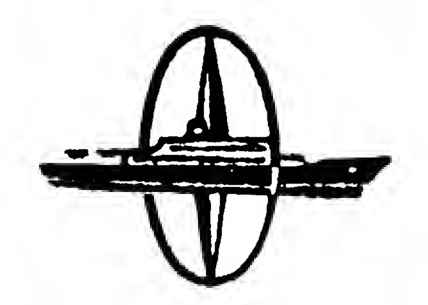
$$\Omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 18\,000}{60} = 1884{,}8 \text{ сек}^{-1}$$

и подставив в формулу (32) значения входящих в нее величин, найдем искомую угловую скорость прецессии:

$$\omega_{п} = \frac{M}{J\Omega} = \frac{0{,}5}{4{,}38 \cdot 1884{,}8} = 0{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-1},$$

или

$$\omega_{п} = 0{,}6 \cdot 10^{-4} \cdot 60 \cdot 60 \cdot 57{,}3 = 12{,}38 \text{ град./час}$$



Глава II

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА И ИХ АНАЛИЗ

§ 9. ОСНОВНАЯ КИНЕМАТИЧЕСКАЯ СХЕМА ПОДВЕСОВ ГИРОСКОПА

Формула (32) основного закона прецессии лишь приближенно описывает движение гироскопа, не отражая тех специфических особенностей, которыми в действительности оно сопровождается. Поэтому при более подробном изучении поведения гироскопа приходится исследовать уравнения, описывающие его движение с учетом массы элементов подвеса.

В современном приборостроении наибольшее распространение получила схема подвеса гироскопа в корпусе прибора с помощью двух кардановых колец (см. рис. 8). Правда, в последние годы находят все большее применение такие подвесы гироскопов, как жидкостные, воздушные, торсионные и т. п.

Гироскоп с жидкостным подвесом [39, стр. 97] также состоит из ротора P (рис. 27), свободно вращающегося вокруг оси OA внутри герметически запаянной шаровой камеры BK. Сама камера BK подвешена в наружном кардановом кольце HK с помощью керновых опор d, обеспечивающих свободу вращения ротора P совместно с камерой BK вокруг внутренней оси подвеса OB. Наружное кольцо HK с помощью таких же двух керновых опор d

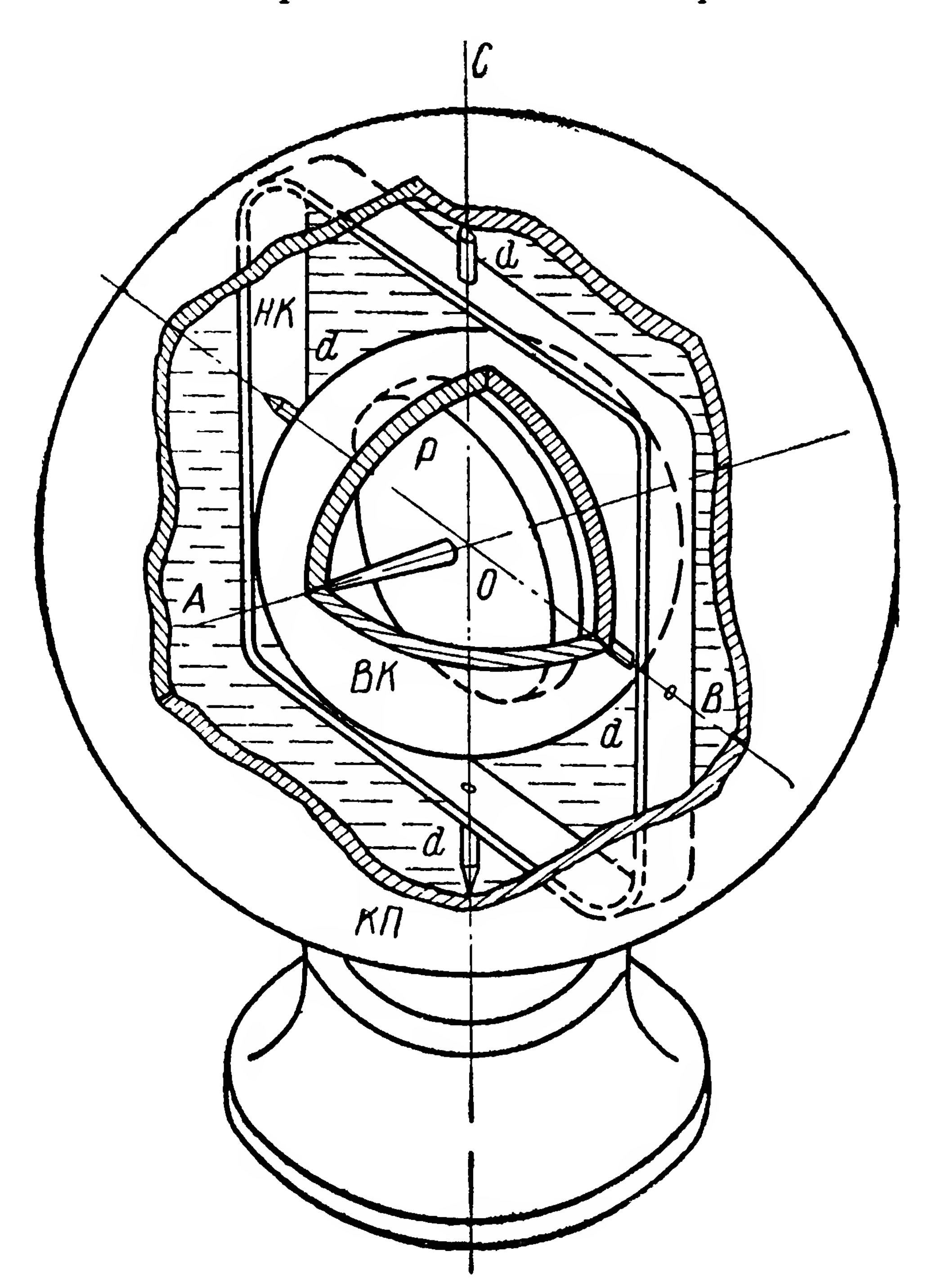


Рис. 27. Поплавковый гироскоп.

устанавливается в корпусе *КП* прибора, благодаря чему гироскоп может свободно вращаться вокруг наружной оси подвеса *ОС*.

Для разгрузки керновых опор корпус *КП* заполняется жидкостью, которая, занимая все свободное пространство между его внутренней поверхностью и наружной поверхностью камеры *ВК*, поддерживает гироскоп во взвешенном состоянии. Удельную плотность поддерживающей жидкости подбирают таким образом, чтобы вес вытесняемого деталями гироскопа объема жидкости был равен весу этих деталей. Тем самым воспринимаемую опорами *d* нагрузку снижают практически до нуля. В описанном методе разгрузки опор подвеса гироскопа и состоит принципиальное различие между жидкостным и обычным кардановым подвесами. Как видим, кинематические схемы обоих подвесов совершенно идентичны.

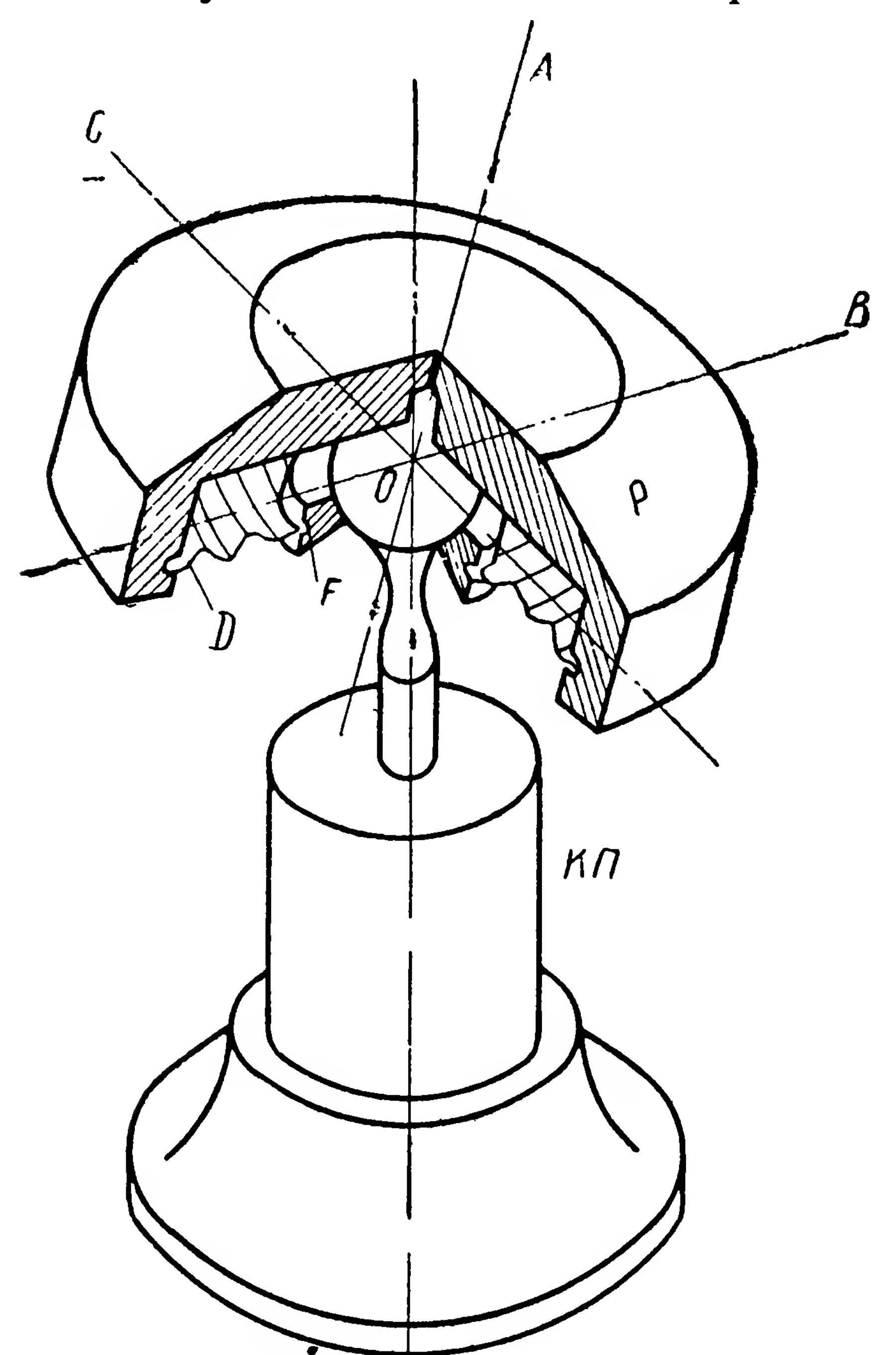


Рис. 28. Гироскоп на шаровом подвесе.

В практике гироскопического приборостроения также находят применение гироскопы на шаровой опоре и шаровые гироскопы на воздушной опоре. Гироскоп на шаровой опоре [8, стр. 216] представляет собой ротор *Р* (рис. 28), свободно вращающийся вокруг главной оси *ОА* и двух взаимно перпендикулярных осей *ОВ* и *ОС*, расположенных в плоскости, перпендикулярной оси *ОА*. Необходимая двухсторонняя удерживающая связь между ротором *Р* и корпусом *КП* обеспечивается с помощью опорной шайбы *F*, поджимаемой к шаровой опоре упругой диафрагмой *D*. Как видим, шаровой подвес, так же, как и карданов, обеспечивает свободу вращения ротора гироскопа в любом направлении вокруг точки *О* его подвеса, остающейся неподвижной по отношению к корпусу *КП* прибора.

Основным элементом шарового гироскопа на воздушной опоре [14, стр. 180] является ротор *Р*, выполненный в виде стального шара (рис. 29), помещенного внутри статорной обмотки *S* электрического двигателя, закрепленной на корпусе *КП* прибора. Железо и обмотка статора *S* создают вращающееся электромагнитное поле, которое приводит в движение ротор *Р* вокруг оси *ОА*.

При сообщении ротору P вращения частицы воздуха, соприкасающиеся с его поверхностью, благодаря возникновению центробежных сил инерции начинают удаляться от оси вращения ротора. В образовавшийся между поверхностями ротора и чашевидной части корпуса $КП$ вакуум из окружающего пространства через центральное отверстие в корпусе устремляется воздух, как это показано на схеме стрелками. Тем самым между ротором P и чашей корпуса $КП$ образуется воздушная подушка с избыточным давлением, на которую и опирается ротор. Нетрудно заметить, что и в данной конструкции подвеса гироскопа его ротор может свободно вращаться вокруг трех взаимно-перпендикулярных осей OA, OB и OC, проходящих через точку O, которая является неподвижной точкой подвеса гироскопа по отношению к его корпусу.

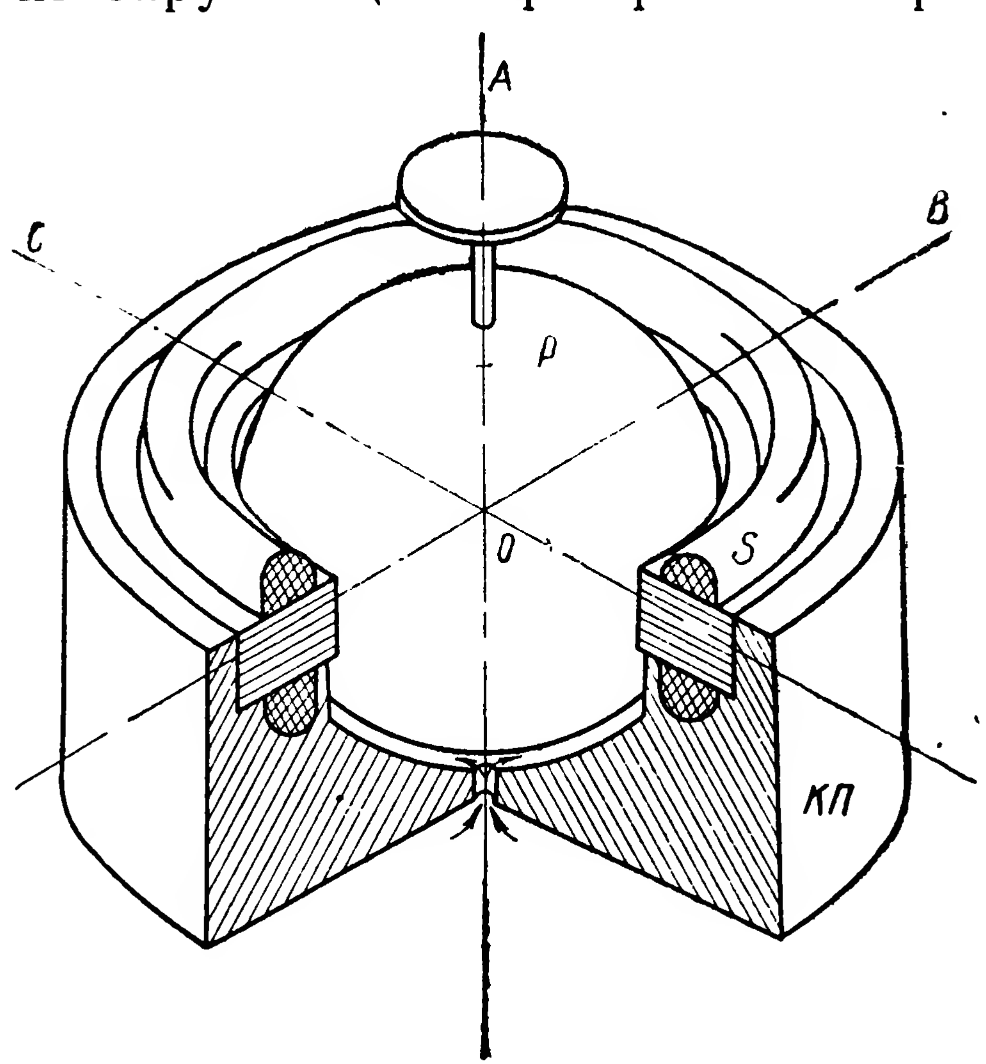


Рис. 29. Шаровой гироскоп на воздушном подвесе.

Все схемы подвесов гироскопа должны обеспечивать свободу вращения ротора вокруг точки подвеса гироскопа в произвольном направлении. Это обеспечивается с помощью кардановых колец и других специальных устройств. Законы движения гироскопа целесообразно изучать по схеме карданова подвеса как наиболее общей схеме. Получаемые при этом результаты анализа легко могут быть распространены и на другие схемы подвеса гироскопа. Для этого достаточно будет принять массы кардановых колец равными нулю.

§ 10. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Для составления уравнений движения гироскопа воспользуемся вторым методом Лагранжа.[1] Как известно, [2] уравнения

---

[1] Для составления уравнений движения гироскопа может быть выбран любой из известных в теоретической механике методов Эйлера, Даламбера, Якоби—Остроградского и т. п.

[2] См.: Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье. Курс теоретической механики. Т. II, ГИТТЛ, 1955, стр. 372.

движения системы материальных тел должны быть записаны в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= Q_1; \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= Q_2; \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_n} &= Q_n, \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

где T — кинетическая энергия рассматриваемой системы материальных тел;

$q_1, q_2, \ldots, q_n$ — обобщенные координаты, определяющие положение всех точек системы в пространстве;

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ — обобщенные силы, действующие на систему;

n — количество обобщенных координат, характеризующих число степеней свободы рассматриваемой системы.

Рассматривая схему гироскопа в кардановом подвесе (рис. 30), нетрудно заметить, что гироскоп представляет собой систему нескольких тел. Для определения числа степеней свободы каждого тела совместим с ротором P координатную систему $Ox_py_pz_p$ так, чтобы ее начало совпадало с точкой подвеса гироскопа, а ось Ox_p была направлена по его главной оси OA. В свою очередь с внутренним кардановым кольцом BK совместим оси $Oxyz$ таким образом, чтобы их начало совпадало с точкой подвеса гироскопа, ось Ox была направлена по его главной оси OA, а ось Oy — по внутренней оси подвеса OB. При этом условии ось Oz будет направлена перпендикулярно плоскости xOy и в общем случае составит с наружной осью подвеса OC угол Θ. Наконец, с корпусом прибора $K\Pi$ совместим неподвижную в пространстве систему координат $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ с началом в точке подвеса гироскопа, направив ось $O\zeta_0$ по его наружной оси подвеса OC. Из схемы видно, что степени свободы гироскопа характеризуются изменениями во времени следующих трех углов: Φ — угла поворота ротора P вокруг оси OA во внутреннем кардановом кольце BK, Θ — угла поворота внутреннего кольца BK совместно с ротором P вокруг оси OB в наружном кардановом кольце HK и Ψ — угла поворота всей гироскопической системы вокруг оси OC по отношению к корпусу прибора $K\Pi$.

При вращении гироскопической системы вокруг осей OA, OB и OC с угловыми скоростями соответственно $\dot{\Phi}$, $\dot{\Theta}$ и $\dot{\Psi}$ ее ротор будет вращаться вокруг оси Ox с угловой скоростью

$\dot\Phi - \dot\Psi \sin\Theta$, вокруг оси Oy с угловой скоростью $\dot\Theta$ и вокруг оси Oz с угловой скоростью $\dot\Psi \cos\Theta$. В свою очередь внутреннее карданово кольцо BK будет вращаться вокруг осей Ox, Oy и Oz с угловыми скоростями, равными соответственно $-\dot\Psi \sin\Theta$, $\dot\Theta$ и $\dot\Psi\cos\Theta$. Наконец наружное карданово кольцо HK будет вращаться вокруг оси OC с угловой скоростью $\dot\Psi$.

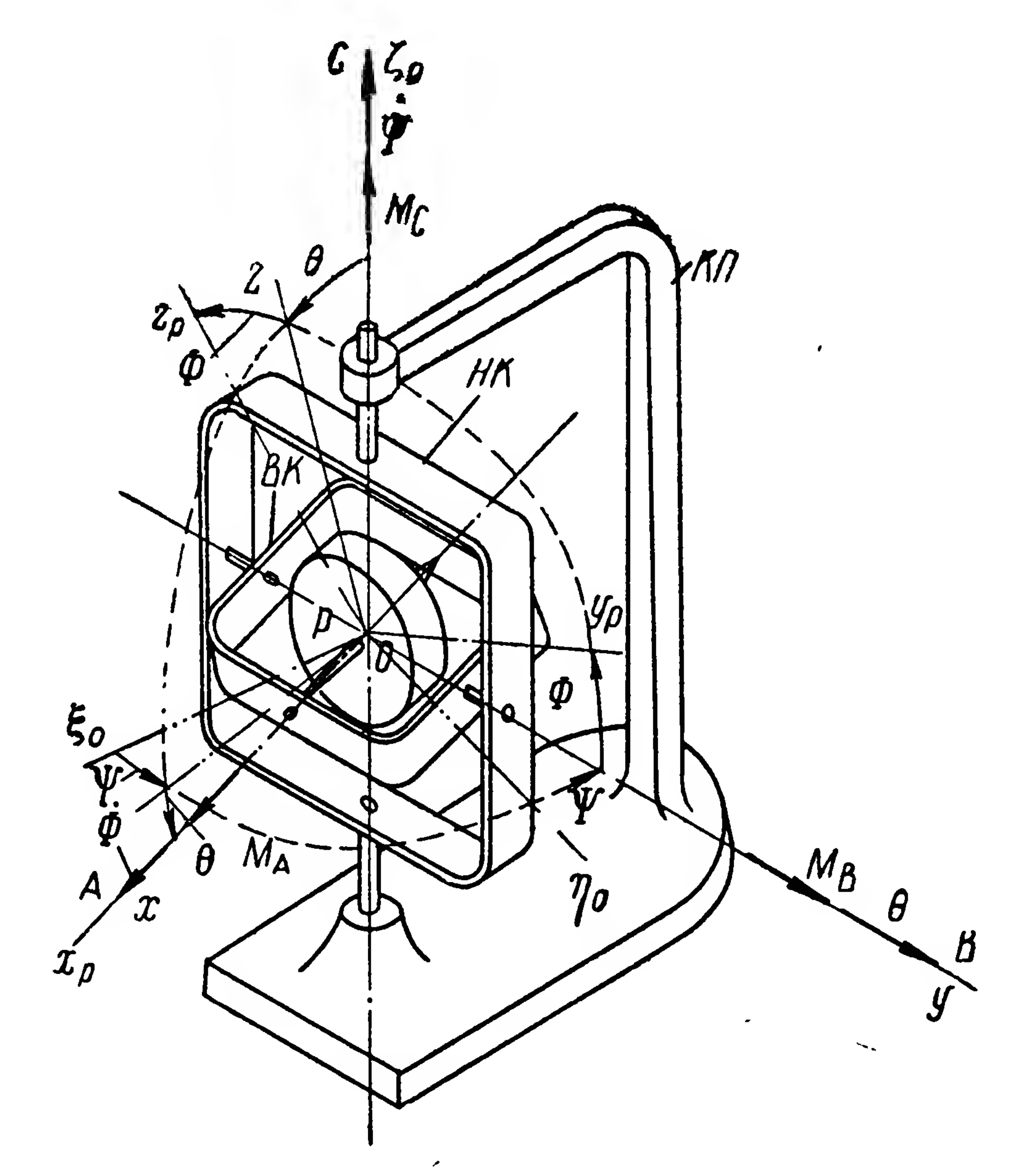


Рис. 30. Векторы моментов внешних сил, действующие на гироскоп в кардановом подвесе.

Таким образом, в соответствии с определениями механики [1] кинетическая энергия рассматриваемой гироскопической системы равна

$$T = \frac{1}{2}\left[J(\dot\Phi - \dot\Psi\sin\Theta)^2 + J_э\dot\Theta^2 + J_э\dot\Psi^2\cos^2\Theta + J_{вx}\dot\Psi^2\sin^2\Theta + J_{вy}\dot\Theta^2 + J_{вz}\dot\Psi^2\cos^2\Theta + J_н\dot\Psi^2\right], \quad (34)$$

где J и $J_э$ — осевой и экваториальный моменты инерции ротора P;

$J_{вx}$, $J_{вy}$, $J_{вz}$ — моменты инерции внутреннего карданова кольца BK относительно осей Ox, Oy, Oz соответственно;

$J_н$ — момент инерции наружного карданова кольца HK относительно наружной оси OC подвеса гироскопа.

Вычислив частные производные от кинетической энергии T гироскопа по обобщенным координатам Φ, Θ, Ψ и по их первым производным $\dot\Phi$, $\dot\Theta$ и $\dot\Psi$, найдем

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial \Phi} = 0; \\ &\frac{\partial T}{\partial \Theta} = -J\dot\Phi\dot\Psi\cos\Theta + J\dot\Psi^2\sin\Theta\cos\Theta - J_э\dot\Psi^2\cos\Theta\sin\Theta + \end{aligned}\right\}$$

[1] См.: Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье. Курс теоретической механики. Т. II, ГИТТЛ, 1955. стр. 186.

$$+ J_{\text{в}\,x}\dot{\Psi}^2 \sin\Theta\cos\Theta - J_{\text{в}\,z}\dot{\Psi}^2\cos\Theta\sin\Theta;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \Psi} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\Phi}} = J\dot{\Phi} - J\dot{\Psi}\sin\Theta;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}} = J_{\text{э}}\dot{\Theta} + J_{\text{в}y}\dot{\Theta};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\Psi}} = -J\dot{\Phi}\sin\Theta + J\dot{\Psi}\sin^2\Theta + J_{\text{э}}\dot{\Psi}\cos^2\Theta + J_{\text{в}\,x}\dot{\Psi}\sin^2\Theta +$$

$$+ J_{\text{в}\,z}\dot{\Psi}\cos^2\Theta + J_{\text{н}}\dot{\Psi}. \qquad (35)$$

Подставляя найденные значения частных производных (35) в уравнения Лагранжа (33) и учитывая, что обобщенные силы Q_1, Q_2, . . ., $Q_{\text{п}}$ при вращательном движении представляют собой моменты внешних сил, действующих на тело относительно осей, вокруг которых ему обеспечена свобода вращения, получим

$$\frac{d}{dt}\left(J\dot{\Phi} - J\dot{\Psi}\sin\Theta\right) = M_A;$$

$$\frac{d}{dt}\left(J_{\text{э}}\dot{\Theta} + J_{\text{в}\,y}\dot{\Theta}\right) - \left(-J\dot{\Phi}\dot{\Psi}\cos\Theta + J\dot{\Psi}^2\sin\Theta\cos\Theta - \right.$$

$$\left. - J_{\text{э}}\dot{\Psi}^2\cos\Theta\sin\Theta + J_{\text{в}\,x}\dot{\Psi}^2\sin\Theta\cos\Theta - J_{\text{в}\,z}\dot{\Psi}^2\cos\Theta\sin\Theta\right) = M_B;$$

$$\frac{d}{dt}\left(-J\dot{\Phi}\sin\Theta + J\dot{\Psi}\sin^2\Theta + J_{\text{э}}\dot{\Psi}\cos^2\Theta + J_{\text{в}\,x}\dot{\Psi}\sin^2\Theta + \right.$$

$$\left. + J_{\text{в}\,z}\dot{\Psi}\cos^2\Theta + J_{\text{н}}\dot{\Psi}\right) = M_C,$$

где M_A, M_B и M_C — моменты внешних сил, действующих на гироскопическую систему относительно осей OA, OB и OC.

После простейших преобразований запишем полученные уравнения в виде

$$J\frac{d}{dt}\left(\dot{\Phi} - \dot{\Psi}\sin\Theta\right) = M_A;$$

$$\left(J_{\text{э}} + J_{\text{в}\,y}\right)\ddot{\Theta} + J\left(\dot{\Phi} - \dot{\Psi}\sin\Theta\right)\dot{\Psi}\cos\Theta +$$

$$+ \left(J_{\text{э}} + J_{\text{в}\,z} - J_{\text{в}\,x}\right)\dot{\Psi}^2\sin\Theta\cos\Theta = M_B;$$

$$\left[J_{\text{н}} + \left(J_{\text{э}} + J_{\text{в}\,z}\right)\cos^2\Theta + J_{\text{в}\,x}\sin^2\Theta\right]\ddot{\Psi} - J\left(\dot{\Phi} - \dot{\Psi}\sin\Theta\right)\dot{\Theta}\cos\Theta -$$

$$- J\sin\Theta\frac{d}{dt}\left(\dot{\Phi} - \dot{\Psi}\sin\Theta\right) -$$

$$- 2\left(J_{\text{э}} + J_{\text{в}\,z} - J_{\text{в}\,x}\right)\dot{\Theta}\dot{\Psi}\sin\Theta\cos\Theta = M_C$$

или в соответствии с первым уравнением рассматриваемой системы

$$
\left.
\begin{aligned}
& J\frac{d}{dt}(\dot\Phi - \dot\Psi\sin\Theta) = M_A;\\
& (J_э + J_{в\,y})\ddot\Theta + J(\dot\Phi - \dot\Psi\sin\Theta)\dot\Psi\cos\Theta +\\
& + (J_э + J_{в\,z} - J_{в\,x})\dot\Psi^2\sin\Theta\cos\Theta = M_B;\\
& [J_н + (J_э + J_{в\,z})\cos^2\Theta + J_{в\,x}\sin^2\Theta]\ddot\Psi -\\
& - J(\dot\Phi - \dot\Psi\sin\Theta)\dot\Theta\cos\Theta - M_A\sin\Theta -\\
& - 2(J_э + J_{в\,z} - J_{в\,x})\dot\Theta\dot\Psi\sin\Theta\cos\Theta = M_C.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (36)
$$

Анализируя полученную систему уравнений, представляется возможным выяснить поведение гироскопа в зависимости от характера изменений во времени моментов M_A, M_B и M_C действующих на него внешних сил. Однако необходимо иметь в виду, что наличие в уравнениях нелинейных членов не позволяет решить систему (36) в общем виде. Поэтому при ее исследовании приходится обращаться к приближенным методам анализа.

§ 11. УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В системе уравнений (36) значения углов Θ и Ψ, характеризующих повороты гироскопа вокруг его внутренней OB и наружной OC осей подвеса (см. рис. 30), могут принимать любые значения. В то же время их изменения с течением времени вследствие большой инертности гироскопа (см. § 8) происходят весьма медленно. Поэтому условимся в дальнейшем изменения углов Θ и Ψ рассматривать как малые приращения ϑ и ψ к некоторым постоянным значениям ϑ_0 и ψ_0:

$$\Theta = \vartheta_0 + \vartheta; \quad \Psi = \psi_0 + \psi. \qquad (37)$$

Подставим значения Θ и Ψ из (37) в уравнения (36) и учтем, что $\vartheta_0 = \text{const}$, $\psi_0 = \text{const}$, а угол ϑ весьма мал. Поэтому, заменяя $\cos\vartheta \approx 1$, $\sin\vartheta \approx \vartheta$, будем иметь

$$J\frac{d}{dt}(\dot\Phi - \dot\psi\sin\vartheta_0 - \vartheta\dot\psi\cos\vartheta_0) = M_A;$$

$$
\begin{gathered}
(J_э + J_{в\,y})\ddot\vartheta + J(\dot\Phi - \dot\psi\sin\vartheta_0 - \vartheta\dot\psi\cos\vartheta_0)\dot\psi\cos\vartheta_0 -\\
- J(\dot\Phi - \dot\psi\sin\vartheta_0 - \vartheta\dot\psi\cos\vartheta_0)\vartheta\dot\psi\sin\vartheta_0 +\\
+ (J_э + J_{в\,z} - J_{в\,x})\dot\psi^2(\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 + \vartheta\cos^2\vartheta_0 -\\
- \vartheta\sin^2\vartheta_0 - \vartheta^2\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0) = M_B;
\end{gathered}
$$

$$[J_н + (J_э + J_{в z})\cos^2\vartheta_0 + J_{в x}\sin^2\vartheta_0]\ddot{\psi} -$$
$$- 2(J_э + J_{в z} - J_{в x})\dot{\vartheta}\dot{\psi}\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 + [(J_э + J_{в z})\sin^2\vartheta_0 +$$
$$+ J_{в x}\cos^2\vartheta_0]\vartheta^2\ddot{\psi} - J(\dot{\Phi} - \dot{\psi}\sin\vartheta_0 - \vartheta\dot{\psi}\cos\vartheta_0)\dot{\vartheta}\cos\vartheta_0 +$$
$$+ J(\dot{\Phi} - \dot{\psi}\sin\vartheta_0 - \vartheta\dot{\psi}\cos\vartheta_0)\vartheta\dot{\vartheta}\sin\vartheta_0 - M_A(\sin\vartheta_0 + \vartheta\cos\vartheta_0) -$$
$$- 2(J_э + J_{в z} - J_{в x})\dot{\vartheta}\dot{\psi}(\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 + \vartheta\cos^2\vartheta_0 -$$
$$- \vartheta\sin^2\vartheta_0 - \vartheta^2\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0) = M_C.$$

Вследствие малости угла ϑ

$$\vartheta^2\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 \ll \sin\vartheta_0\cos\vartheta_0;$$

$$\vartheta^2[(J_э + J_{в z})\sin^2\vartheta_0 + J_{в x}\cos^2\vartheta_0] \ll (J_э + J_{в z})\cos^2\vartheta_0 + J_{в x}\sin^2\vartheta_0.$$

Опуская эти малые величины и вводя обозначения постоянных

$$\left.\begin{aligned} &J_э + J_{в y} = J_B; \\ &J_н + (J_э + J_{в z})\cos^2\vartheta_0 + J_{в x}\sin^2\vartheta_0 = J_C; \\ &J_э + J_{в z} - J_{в x} = J_D, \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

перепишем исследуемую систему уравнений в следующем виде:

$$J\frac{d}{dt}(\dot{\Phi} - \dot{\Psi}\sin\vartheta_0 - \vartheta\dot{\psi}\cos\vartheta_0) = M_A;$$

$$J_B\ddot{\vartheta} + J(\dot{\Phi} - \dot{\psi}\sin\vartheta_0 - \vartheta\dot{\psi}\cos\vartheta_0)\dot{\psi}\cos\vartheta_0 -$$
$$- J(\dot{\Phi} - \dot{\psi}\sin\vartheta_0 - \vartheta\dot{\psi}\cos\vartheta_0)\vartheta\dot{\psi}\sin\vartheta_0 +$$
$$+ J_D\dot{\psi}^2(\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 + \vartheta\cos 2\vartheta_0) = M_B;$$
$$J_C\ddot{\psi} - 2J_D\vartheta\dot{\vartheta}\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 - J(\dot{\Phi} - \dot{\psi}\sin\vartheta_0 -$$
$$- \vartheta\dot{\psi}\cos\vartheta_0)\dot{\vartheta}\cos\vartheta_0 + J(\dot{\Phi} - \dot{\psi}\sin\vartheta_0 - \vartheta\dot{\psi}\cos\vartheta_0)\vartheta\dot{\vartheta}\sin\vartheta_0 -$$
$$- M_A(\sin\vartheta_0 + \vartheta\cos\vartheta_0) - 2J_D\dot{\vartheta}\dot{\psi}(\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 +$$
$$+ \vartheta\cos 2\vartheta_0) = M_C.$$

Члены полученной системы уравнений имеют различный порядок малости. Необходимо заметить, что при практическом использовании гироскопа его ротору в большинстве приборов стремятся сообщить максимально возможную угловую скорость собственного вращения. Так, в современных гироскопических приборах число оборотов ротора доводят до нескольких десятков тысяч в минуту. При этом угловая скорость $\dot{\Phi}$ достигает нескольких тысяч радиан в секунду. В то же время угловые скорости $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\psi}$ вращения гироскопа вокруг осей OB и OC его подвеса измеряются величинами, не превышающими одного радиана в секунду.

Указанное различие между угловыми скоростями $\dot{\Phi}$ и $\dot{\vartheta}$ (или $\dot{\psi}$) приводит к тому, что в полученных уравнениях члены, содержащие произведения или квадраты скоростей $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\psi}$, а также произведения угла ϑ на эти скорости или их производные, являются величинами более высокого порядка малости по сравнению с остальными. Таким образом, в рассматриваемых уравнениях можно выделить главные члены, оказывающие основное влияние на характер движения гироскопа, и второстепенные, — обусловливающие малые отклонения от основного движения. Следуя методике А. Н. Крылова,[1] в левых частях уравнений сгруппируем главные члены, а в правые перенесем величины более высокого порядка малости. В результате

$$\left.\begin{aligned}
&J\frac{d\Phi}{dt} - M_A = J\frac{d}{dt}(\dot{\psi}\sin\vartheta_0 + \vartheta\dot{\psi}\cos\vartheta_0);\\
&J_B\ddot{\vartheta} + J\Phi\dot{\psi}\cos\vartheta_0 - M_B = J(\dot{\psi}\sin\vartheta_0 + \vartheta\dot{\psi}\cos\vartheta_0)\dot{\psi}\cos\vartheta_0 +\\
&\quad + J(\Phi - \dot{\psi}\sin\vartheta_0 - \vartheta\dot{\psi}\cos\vartheta_0)\vartheta\dot{\psi}\sin\vartheta_0 -\\
&\quad - J_D\dot{\psi}^2(\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 + \vartheta\cos 2\vartheta_0);\\
&J_C\ddot{\psi} - J\Phi\dot{\vartheta}\cos\vartheta_0 - M_A(\sin\vartheta_0 + \vartheta\cos\vartheta_0) - M_C =\\
&\quad = 2J_D\vartheta\ddot{\psi}\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 - J(\dot{\psi}\sin\vartheta_0 + \vartheta\dot{\psi}\cos\vartheta_0)\dot{\vartheta}\cos\vartheta_0 -\\
&\quad - J(\Phi - \dot{\psi}\sin\vartheta_0 - \vartheta\dot{\psi}\cos\vartheta_0)\vartheta\dot{\vartheta}\sin\vartheta_0 +\\
&\quad + 2J_D\dot{\vartheta}\dot{\psi}(\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 + \vartheta\cos 2\vartheta_0).
\end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Если в (39) опустить малые члены, составляющие правые части уравнений, то получаемая в результате упрощенная система

$$\left.\begin{aligned}
&J\dot{\Phi} = M_A;\\
&J_B\ddot{\vartheta} + J\Phi\dot{\psi}\cos\vartheta_0 = M_B;\\
&J_C\ddot{\psi} - J\Phi\dot{\vartheta}\cos\vartheta_0 - M_A(\sin\vartheta_0 + \vartheta\cos\vartheta_0) = M_C
\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

будет описывать движение гироскопа в первом приближении.

Нетрудно заметить, что первое уравнение системы (40)

$$J\dot{\Phi} = M_A, \quad (41)$$

описывающее вращение ротора вокруг главной оси OA (см. рис. 30) или собственное вращение гироскопа, может быть исследовано

[1] См.: А. Н. Крылов. Лекции о приближенных вычислениях. ГИТТЛ, 1954, стр. 254.

самостоятельно, независимо от двух других уравнений

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\dot{\Phi}\dot{\psi}\cos\vartheta_0 &= M_B; \\ J_C\ddot{\psi} - J\dot{\Phi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta_0 - M_A(\sin\vartheta_0 + \vartheta\cos\vartheta_0) &= M_C, \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

описывающих движение гироскопа вокруг осей OB и OC его подвеса.

§ 12. ИССЛЕДОВАНИЕ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РОТОРА ВОКРУГ ГЛАВНОЙ ОСИ ГИРОСКОПА

Ротор гироскопа приводится во вращение вокруг оси OA (см. рис. 30) специальными двигателями — гиромоторами, которые за счет подводимой к ним извне энергии развивают необходимый вращающий момент M_D. При движении ротора возникают моменты сил сопротивления — момент $M_{тA}$ сил трения в опорах главной оси гироскопа и момент M_a сил сопротивления окружающей среды, оказывающий основное влияние на потребляемую гиромотором мощность.

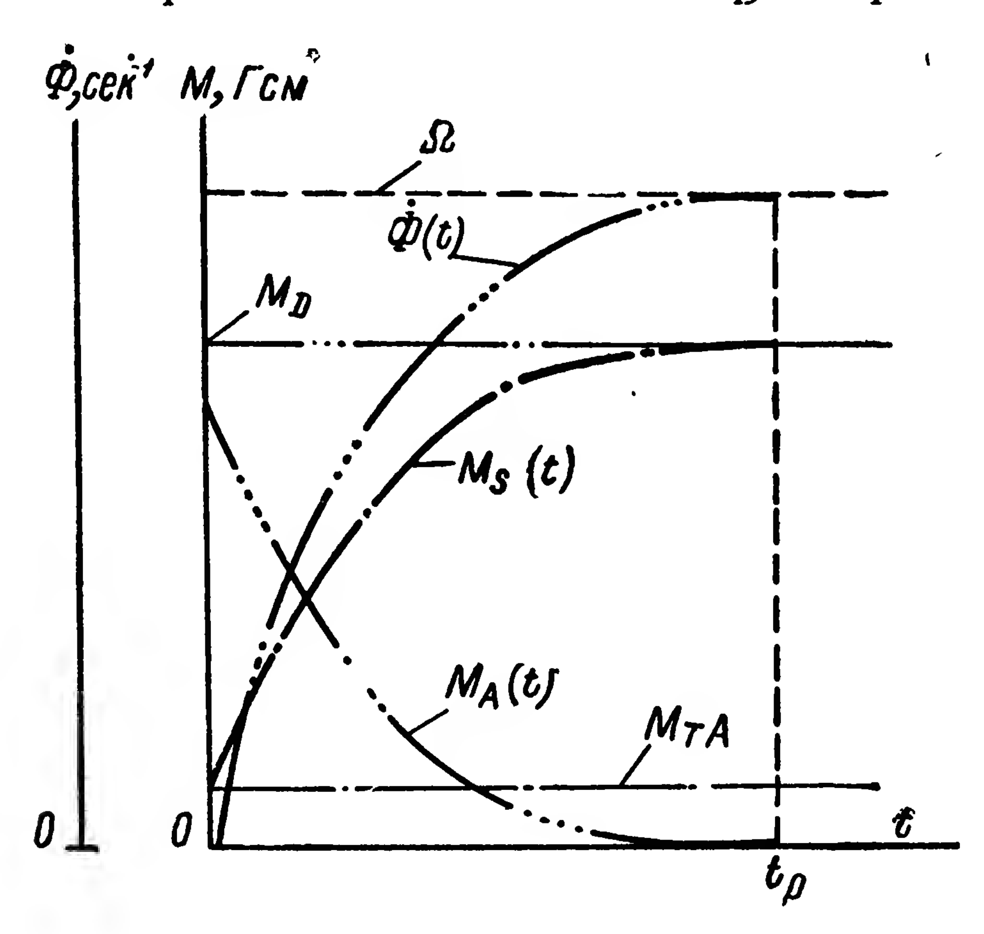


Рис. 31. Кривые изменения $\dot{\Phi}$, M_s и M_A при разгоне ротора.

Суммарный момент сил сопротивления

$$M_s = M_{тA} + M_a \quad (43)$$

создает противодействие вращающему моменту M_D и поэтому уравнение (41) может быть переписано в следующем виде:

$$J\ddot{\Phi} = M_A = M_D - M_s. \quad (44)$$

До тех пор, пока $M_D > M_s$, число оборотов ротора растет. При этом с увеличением угловой скорости $\dot{\Phi}$ возрастает и момент M_a сил сопротивления окружающей ротор среды. В соответствии с равенством (43) вместе с M_a будет расти и величина момента M_s, в результате чего M_A, равный разности $M_D - M_s$, а следовательно, и ускорение $\ddot{\Phi}$ начнут уменьшаться. На рис. 31 приведен график изменений моментов M_s и M_A и угловой скорости $\dot{\Phi}$ с течением времени, на котором моменты M_D и $M_{тA}$ приняты постоянными.

По прошествии некоторого времени t_p, называемого обычно временем разгона ротора гироскопа, величина момента M_s сил

сопротивления достигнет значения вращающего момента M_D. Суммарный момент M_A станет равным нулю:

$$M_A = M_D - M_s = 0, \tag{45}$$

и ускоренное вращение ротора прекратится.

Наступит установившийся режим работы гиромотора, и уравнение (44) примет вид

$$J\ddot{\Phi} = 0.$$

Следовательно, угловая скорость $\dot{\Phi}$ вращения ротора, достигнув некоторого значения Ω, будет оставаться в дальнейшем постоянной:

$$\dot{\Phi} = \Omega = \text{const}. \tag{46}$$

Последнее условие выполняется до тех пор, пока внешние силы, действующие на гироскоп относительно его главной оси, не нарушат равенства моментов M_D и M_s. Необходимо заметить что в современных гироскопических приборах угловая скорость $\dot{\Phi}$ поддерживается постоянной с помощью специальных регулирующих устройств, обеспечивающих соблюдение условия (46) с достаточной для практики точностью.

§ 13. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА

При постоянной угловой скорости $\dot{\Phi}$ собственного вращения гироскопа, когда момент M_A внешних сил, действующих на гироскоп относительно его главной оси, равен нулю, система (42) принимает вид двух совокупных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\psi}\cos\vartheta_0 &= M_B; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\dot{\vartheta}\cos\vartheta_0 &= M_C, \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

интегрирование которых не вызывает затруднений.

Для определения характера изменения с течением времени значений углов ϑ и ψ поворота гироскопа вокруг его внутренней OB и наружной OC осей подвеса (рис. 30) достаточно найти характеристическое уравнение системы и вычислить его корни. В наиболее общем случае корни характеристического уравнения могут быть вещественными и комплексными сопряжениями $p = a$; $p = b \pm ni$. Если все корни рассматриваемого характеристического уравнения различны между собой, то решения исследуемых дифференциальных уравнений (47) будут иметь вид

$$D_1 e^{(b+ni)t} + D_2 e^{(b-ni)t} + C_3 e^{at} + \dots$$

или, учитывая преобразования Эйлера,[1]

$$e^{bt}(C_1 \cos nt + C_2 \sin nt) + C_3 e^{at} + \dots \qquad (48)$$

Проанализировав (48), нетрудно заметить, что характер изменения рассматриваемых величин во времени будет определяться значениями корней характеристического уравнения. Так, в зависимости от значения вещественного корня a изменения во времени

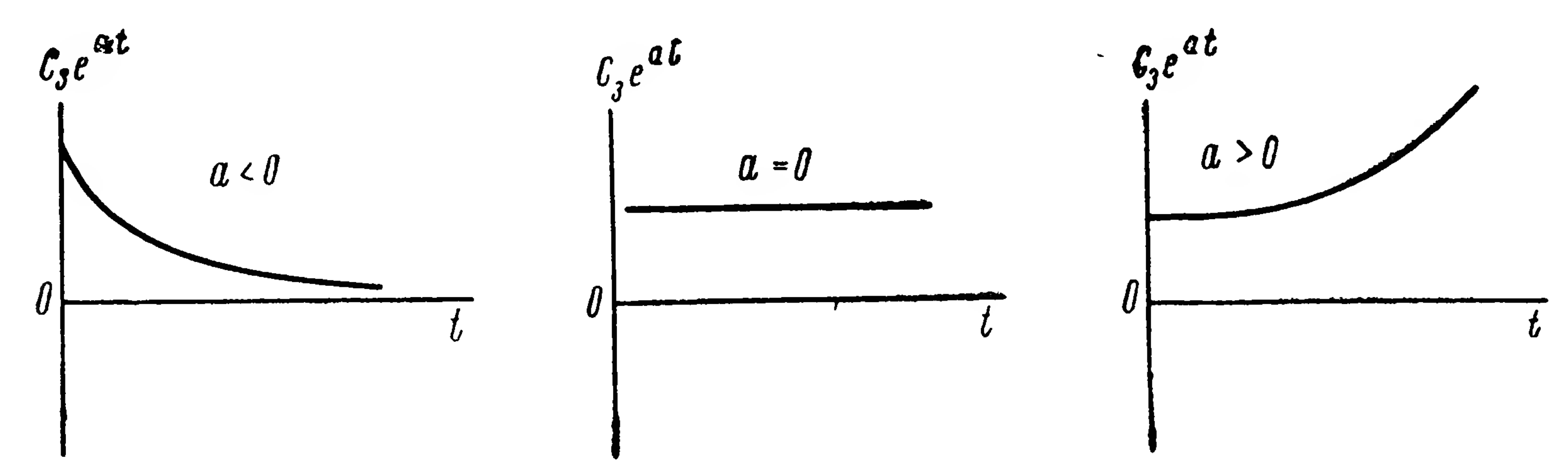


Рис. 32. Виды решения, соответствующие вещественному корню.

углов ϑ и ψ будут характеризоваться кривыми, приведенными на рис. 32. А значения вещественной части b и коэффициента n при мнимой части ni двух комплексных сопряженных корней будут обусловливать различный колебательный характер изменения рассматриваемых величин (рис. 33).

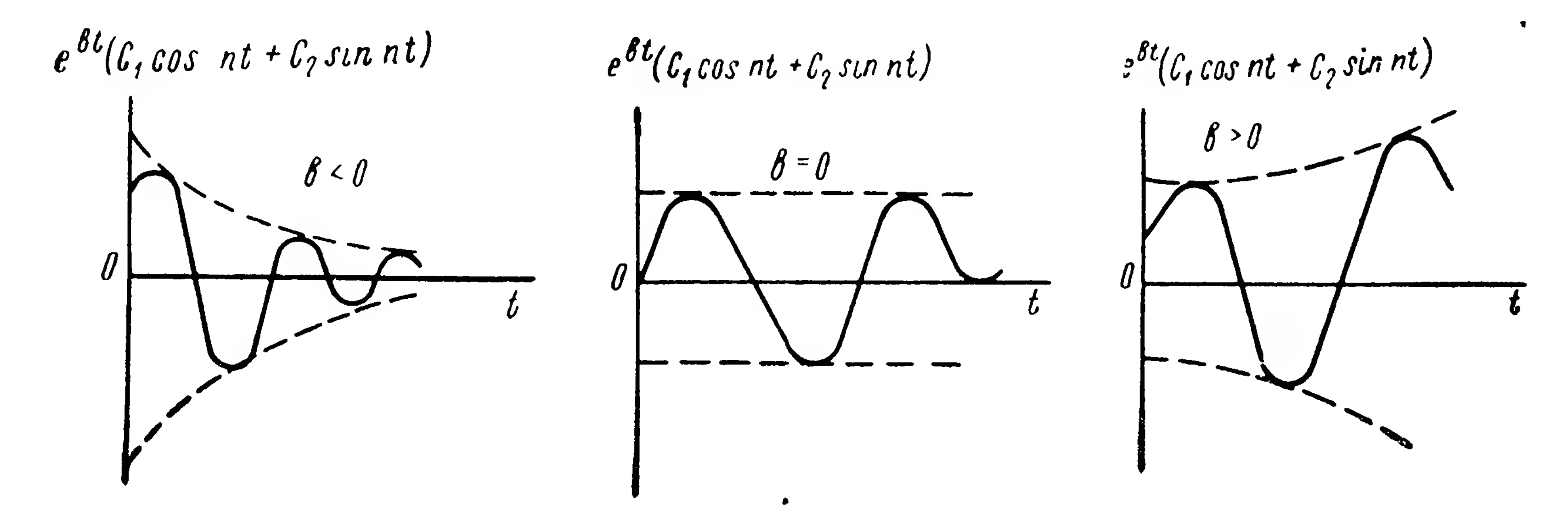


Рис. 33. Виды решения, соответствующие паре комплексно-сопряженных корней.

Гироскоп устойчиво стабилизирует заданное ему в пространстве направление только в том случае, если в общем решении (48) все слагаемые будут с течением времени затухать. Последнее условие имеет место, если все вещественные корни и вещественные части всех комплексных корней характеристического уравнения будут отрицательными. Особое внимание должно быть уделено кратным и равным корням. Если среди корней характеристического уравнения какой-либо корень $p_1 = a$ будет иметь кратность k, т. е. будет существовать еще и корень $p_2 = ka$, то ему,

[1] См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Т. II, Гостехиздат, 1948, стр. 411.

как известно,[1] будут соответствовать следующие k решений:

$$C_1e^{at} + C_2te^{at} + C_3t^2e^{at} + \cdots + C_kt^{(k-1)}e^{at}.$$

С течением времени коэффициенты C_2t, C_3t^2, . . ., $C_kt^{(k-1)}$ неограниченно возрастают, в то время как множитель e^{at} при $a < 0$ стремится к нулю. Поэтому для выявления характера изменения во времени углов ϑ и ψ поворота гироскопа вокруг осей его подвеса необходимо более подробно исследовать рассматриваемый многочлен.

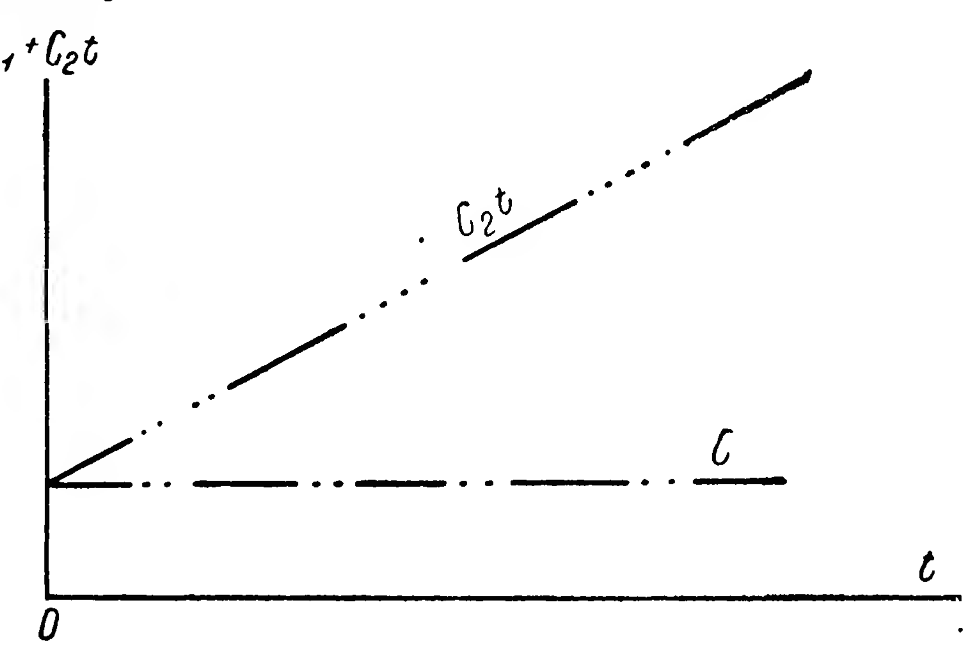


Рис. 34. Вид решения, соответствующий двум равным корням.

При наличии равных корней характеристического уравнения $p_1 = p_2 = a$ решение дифференциального уравнения принимает вид

$$C_1e^{at} + C_2te^{at}$$

и, следовательно, при $a = 0$ в решении будут появляться члены вида $C_1 + C_2t$, из которых второй характеризует непрерывное с течением времени увеличение исследуемого параметра (рис. 34).

Анализируя указанным образом систему уравнений (47), представляется возможным выявить в первом приближении характер движения гироскопа около точки его подвеса.

§ 14. ДВИЖЕНИЕ ГИРОСКОПА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НА НЕГО МОМЕНТА МГНОВЕННЫХ ВНЕШНИХ СИЛ (ПЕРВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)

Рассмотрим, какое влияние оказывает на изменение первоначального положения гироскопа ударная нагрузка. Предположим, что на гироскоп, точка подвеса которого совмещена с началом O неподвижной в пространстве координатной системы $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ (рис. 35), подействовал момент мгновенных сил. Будем также полагать, что при ударе главная ось гироскопа была расположена в плоскости $\xi_0O\zeta_0$ по направлению OA_0, составляющему угол ϑ_0 с осью $O\xi_0$, а его наружная ось подвеса OC была совмещена с осью $O\zeta_0$. При таком начальном расположении гироскопа углы ψ и ϑ будут характеризовать отклонения главной оси OA гироскопа соответственно от плоскостей $\xi_0O\zeta_0$ и $\xi_0O\eta_0$.

Как известно,[2] за бесконечно малое время действия момента

---

[1] См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Т. II, Гостехиздат, 1948, стр. 91—99.

[2] См.: Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье. Курс теоретической механики. Т. II, ГИТТЛ, 1955, стр. 124.

мгновенных внешних сил координаты любых точек рассматриваемой материальной системы остаются неизменными, а изменяются лишь скорости их движения. Поэтому начальные условия исследуемого движения гироскопа будут определяться зависимостями

$$\vartheta(0) = 0; \quad \psi(0) = 0; \quad \dot{\vartheta}(0) = \dot{\vartheta}_н; \quad \dot{\psi}(0) = \psi_н. \tag{49}$$

После того, как прекратится действие мгновенных сил, моменты внешних сил становятся равными нулю и система дифференциальных уравнений (47), описывающих движение гироскопа, принимает вид

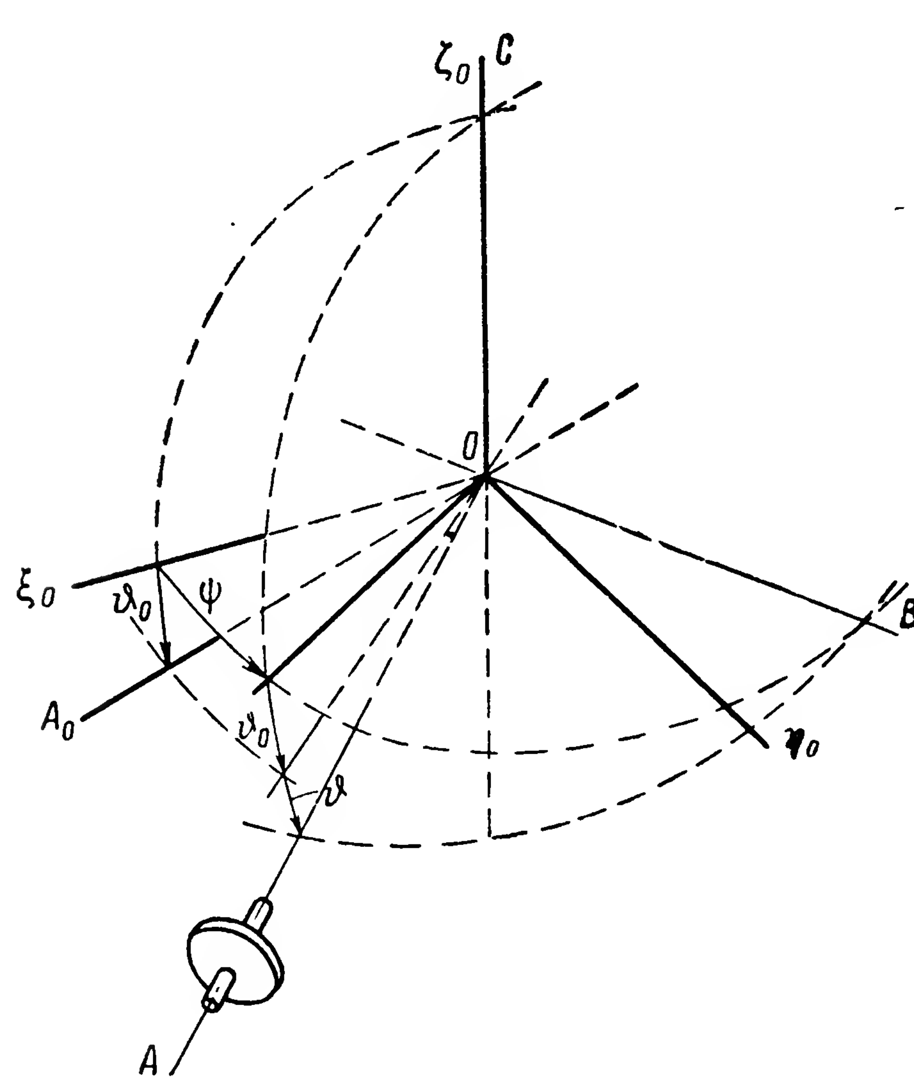


Рис. 35. Ориентация гироскопа в неподвижной системе координат.

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\psi}\cos\vartheta_0 = 0;\\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\dot{\vartheta}\cos\vartheta_0 = 0.\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Перепишем уравнения (50) в символической форме

$$\left.\begin{aligned} J_Bp^2\vartheta + J\Omega\cos\vartheta_0 p\psi = 0;\\ J_Cp^2\psi - J\Omega\cos\vartheta_0 p\vartheta = 0.\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Здесь символом p обозначен знак дифференцирования функции по независимой переменной t, т. е.

$$\frac{d}{dt} = p; \quad \frac{d^2}{dt^2} = p^2; \quad \frac{d^3}{dt^3} = p^3; \cdots; \quad \frac{d^n}{dt^n} = p^n.$$

Характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений (51) может быть записано в виде определителя

$$\begin{vmatrix} J_Bp^2, & J\Omega\cos\vartheta_0 p\\ -J\Omega\cos\vartheta_0 p, & J_Cp^2\end{vmatrix} = 0,$$

раскрывая который, находим

$$p^4 + \frac{J^2\Omega^2\cos^2\vartheta_0}{J_BJ_C}p^2 = 0. \tag{52}$$

Корни полученного уравнения

$$p_{1,2} = \pm ni; \quad p_3 = p_4 = 0,$$

где

$$n = \frac{J\Omega\cos\vartheta_0}{\sqrt{J_B J_C}}. \qquad (53)$$

В соответствии с найденными значениями корней характеристического уравнения (52) решение для одной из рассматриваемых величин, например для угла ϑ, запишется в виде

$$\vartheta = C_1\cos nt + C_2\sin nt + C_3 + Dt. \qquad (54)$$

Чтобы найти выражение для второго угла ψ, воспользуемся зависимостью между величинами ϑ и ψ, вытекающей из первого уравнения системы (51):

$$p\psi = -\frac{J_B}{J\Omega\cos\vartheta_0}p^2\vartheta$$

или в обычной форме записи

$$\dot{\psi} = -\frac{J_B}{J\Omega\cos\vartheta_0}\ddot{\vartheta}.$$

Находя $\ddot{\vartheta}$ из выражения (54), получаем

$$\dot{\psi} = \frac{J_B n^2}{J\Omega\cos\vartheta_0}(C_1\cos nt + C_2\sin nt),$$

откуда после интегрирования, учитывая обозначение (53), находим выражение для искомого угла:

$$\psi = \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}(C_1\sin nt - C_2\cos nt) + C_4. \qquad (55)$$

Проанализировав решения (54) и (55), нетрудно убедиться в том, что постоянная интегрирования D при любых начальных условиях движения гироскопа равна нулю. Для этого обратимся к системе (51) и из каждого ее уравнения определим зависимость $\ddot{\psi}$ от ϑ. После дифференцирования первого уравнения этой системы получим

$$p^2\psi = -\frac{J_B}{J\Omega\cos\vartheta_0}p^3\vartheta,$$

а из ее второго уравнения находим

$$p^2\psi = \frac{J\Omega\cos\vartheta_0}{J_C}p\vartheta.$$

Приравняв правые части полученных выражений

$$-\frac{J_B}{J\Omega\cos\vartheta_0}p^3\vartheta = \frac{J\Omega\cos\vartheta_0}{J_C}p\vartheta,$$

найдем дифференциальное уравнение, которое запишем в обычной форме:

$$\dddot{\vartheta} + \frac{J^2\Omega^2 \cos^2 \vartheta_0}{J_B J_C} \dot{\vartheta} = 0. \tag{56}$$

Очевидно, что уравнению (56) должно удовлетворять полученное выше решение (54). Подставляя на этом основании в (56) значения $\dddot{\vartheta}$ и $\dot{\vartheta}$ из выражения (54) и учитывая (53), получим

$$n^3 (C_1 \sin nt - C_2 \cos nt) + n^2 (-nC_1 \sin nt + nC_2 \cos nt + D) = 0,$$

откуда следует, что $n^2 D = 0$.

Но так как $n^2 \neq 0$, то при любых начальных условиях движения гироскопа $D = 0$. Таким образом, решение системы дифференциальных уравнений (50) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= C_1 \cos nt + C_2 \sin nt + C_3; \\ \psi &= \sqrt{\frac{J_B}{J_C}} (C_1 \sin nt - C_2 \cos nt) + C_4. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 воспользуемся начальными условиями (49) исследуемого движения гироскопа. В этом случае из выражений (57) и их первых производных имеем

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_3 = 0; \quad &-\sqrt{\frac{J_B}{J_C}} C_2 + C_4 = 0; \\ nC_2 = \dot{\vartheta}_н; \quad &\sqrt{\frac{J_B}{J_C}} nC_1 = \dot{\psi}_н, \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

откуда, принимая во внимание (53), находим

$$C_1 = \frac{J_C \dot{\psi}_н}{J\Omega \cos \vartheta_0}; \quad C_2 = \frac{\sqrt{J_B J_C} \dot{\vartheta}_н}{J\Omega \cos \vartheta_0};$$

$$C_3 = -\frac{J_C \dot{\psi}_н}{J\Omega \cos \vartheta_0}; \quad C_4 = \frac{J_B \dot{\vartheta}_н}{J\Omega \cos \vartheta_0}.$$

Тогда вместо (57) получим

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= \frac{J_C \dot{\psi}_н}{J\Omega \cos \vartheta_0} \cos nt + \frac{\sqrt{J_B J_C} \dot{\vartheta}_н}{J\Omega \cos \vartheta_0} \sin nt - \frac{J_C \dot{\psi}_н}{J\Omega \cos \vartheta_0}; \\ \psi &= \frac{\sqrt{J_B J_C} \dot{\psi}_н}{J\Omega \cos \vartheta_0} \sin nt - \frac{J_B \dot{\vartheta}_н}{J\Omega \cos \vartheta_0} \cos nt + \frac{J_B \dot{\vartheta}_н}{J\Omega \cos \vartheta_0}. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Из анализа выражений (59) следует, что гироскоп с тремя степенями свободы при действии на него момента мгновенных внешних сил начинает гармонически колебаться с круговой частотой n, определяемой по формуле (53), и периодом

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \frac{\sqrt{J_B J_C}}{J\Omega \cos \vartheta_0}. \tag{60}$$

Именно в этих колебаниях, получивших название нутационных, и проявляется специфический характер движения гироскопа по инерции. В самом деле, если гироскоп не имеет собственного вращения ($\Omega = 0$), то уравнения (50) его движения принимают вид

$$J_B\ddot{\vartheta} = 0; \quad J_C\ddot{\psi} = 0.$$

Так как $J_B \neq 0$, $J_C \neq 0$, то $\ddot{\vartheta} = 0$ и $\ddot{\psi} = 0$, следовательно,

$$\dot{\vartheta} = \text{const}; \ \dot{\psi} = \text{const}.$$

Как видим, при отсутствии собственного вращения гироскоп ведет себя как обычное твердое тело. Под воздействием момента

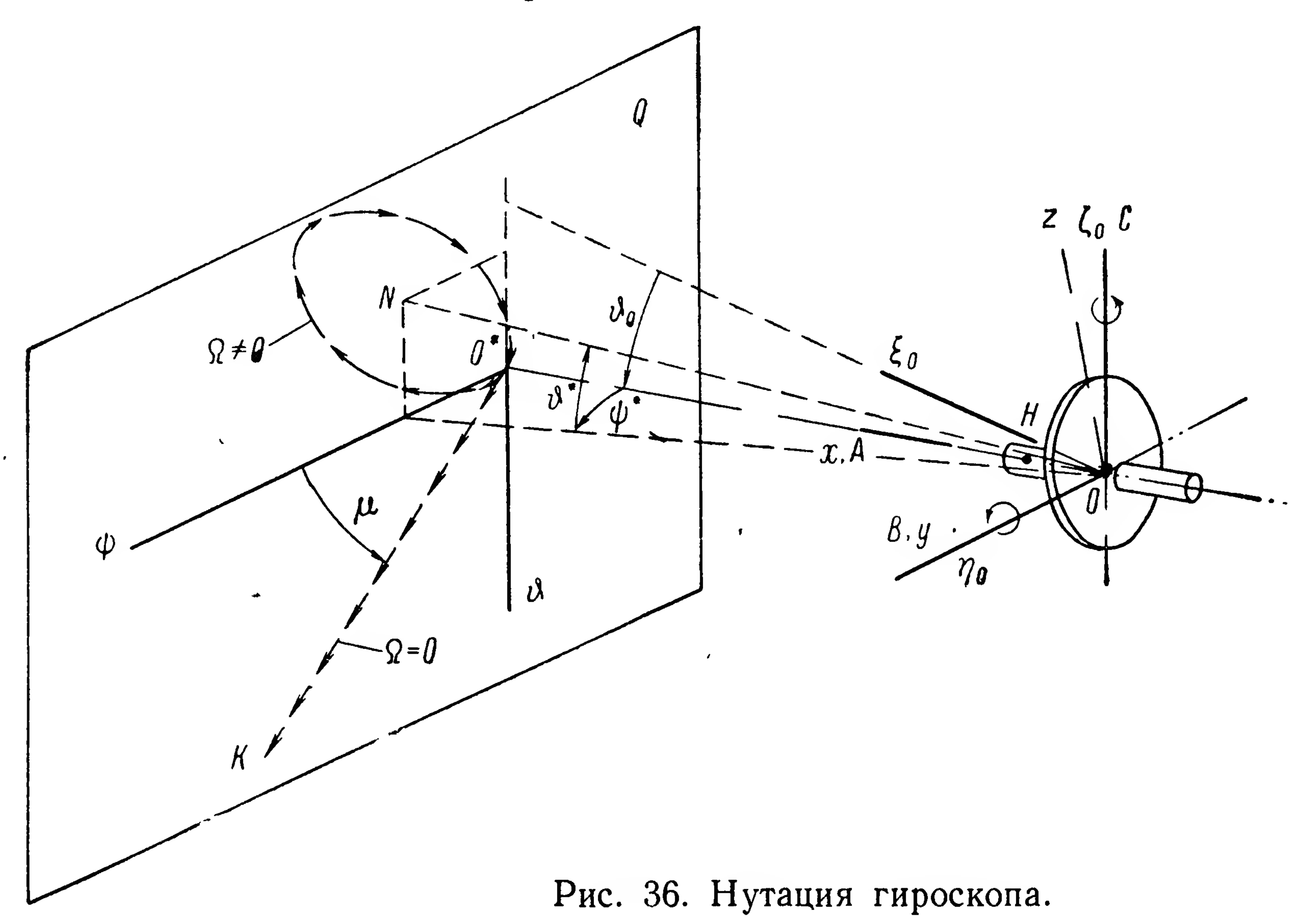


Рис. 36. Нутация гироскопа.

мгновенных сил он начинает вращаться вокруг осей подвеса OB и OC с некоторыми начальными угловыми скоростями $\dot{\vartheta}_н$ и $\dot{\psi}_н$.

Указанное различие в характере движения гироскопа можно показать весьма наглядно. Для этого выберем на главной оси OA гироскопа произвольную точку H (рис. 36), которую условимся в дальнейшем называть полюсом гироскопа. В процессе перемещения гироскопа относительно неподвижной в пространстве координатной системы $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ будем проектировать полюс H на неподвижную в пространстве плоскость Q, расположенную параллельно координатной плоскости $\zeta_0 O\eta_0$.

Совместим в начальный момент времени оси OB и OC подвеса гироскопа соответственно с осями $O\eta_0$ и $O\zeta_0$. При этом условии оси координатной системы $Oxyz$, неизменно связанные с внутренним кардановым кольцом (см. § 10, рис. 30), займут положение,

указанное на рис. 36. Оси Ox и $O\xi_0$, а также Oz и $O\zeta_0$ составят между собой угол ϑ_0. Следовательно, при $t = 0$ полюс H гироскопа будет проектироваться на плоскость Q в точку O^* ее пересечения с осью Ox. При отклонениях гироскопа оси $Oxyz$ будут изменять свое положение относительно неподвижной системы координат $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ и проекция полюса H начнет перемещаться в плоскости Q, отклоняясь от точки O^*. Так как положение гироскопа в пространстве может изменяться лишь в результате его поворота около точки подвеса O, то отклонения оси OA определятся углами ϑ и ψ поворота гироскопа вокруг внутренней OB и наружной OC осей его подвеса соответственно.

Учитывая сказанное, проведем на плоскости Q параллельно осям $O\zeta_0$ и $O\eta_0$ две координатные оси $O^*\vartheta$ и $O^*\psi$ и будем откладывать на них величины углов ϑ и ψ. При малых углах поворота прямоугольные координаты проекции полюса H в системе $O^*\vartheta\psi$ будут с достаточным приближением характеризоваться величинами самих углов ϑ и ψ.

Если момент мгновенных сил подействовал на гироскоп, лишенный собственного вращения, то он, как было показано выше, будет двигаться с постоянными угловыми скоростями $\dot{\vartheta}_н$ и $\dot{\psi}_н$. В результате проекция его полюса начнет удаляться от точки O^* по некоторой прямой O^*K, расположенной под углом μ к оси абсцисс $O^*\psi$, величина которого определяется выражением

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\dot{\vartheta}_н t}{\dot{\psi}_н t} = \frac{\dot{\vartheta}_н}{\dot{\psi}_н}.$$

С течением времени полюс H будет все больше удаляться от точки O^*, показывая тем самым, что гироскоп, лишенный собственного вращения, не может стабилизировать заданного ему положения в пространстве: воздействие даже незначительного по величине момента мгновенной силы вызывает непрерывное отклонение оси гироскопа от первоначального положения, как и у обычного твердого тела. Поэтому его нельзя назвать гироскопом в общепринятом смысле этого слова.

Иная картина будет наблюдаться при воздействии момента мгновенной силы на гироскоп, обладающий собственным вращением. Ему и в этом случае будут сообщены некоторые начальные угловые скорости $\dot{\vartheta}_н$ и $\dot{\psi}_н$. И поэтому в первое мгновение проекция его полюса H начнет двигаться также вдоль прямой O^*K. Но, как только гироскоп, вращающийся вокруг своей главной оси, начнет вращаться еще и вокруг осей подвеса OB и OC, сразу же возникнет гироскопический момент, который и обусловит гармонические нутационные колебания гироскопа, описываемые выражениями (59).

В процессе нутационных колебаний проекция полюса H гироскопа будет перемещаться в плоскости Q по сложной кривой эллип-

тического вида вокруг точки N, координаты которой ϑ^* и ψ^* определяются последними членами выражений (59):

$$\vartheta^* = -\frac{J_C\dot{\psi}_н}{J\Omega\cos\vartheta_0}; \quad \psi^* = \frac{J_B\dot{\vartheta}_н}{J\Omega\cos\vartheta_0}. \qquad (61)$$

Угловая скорость Ω собственного вращения гироскопа, как правило, в десятки тысяч раз больше угловых скоростей $\dot{\vartheta}_н$ и $\dot{\psi}_н$ его поворотов вокруг осей подвеса. Поэтому углы ϑ^* и ψ^* отклонения оси ON, вокруг которой колеблется гироскоп, от первоначального направления $O\xi_0$ его главной оси OA, даже и при довольно значительных величинах угла ϑ_0, ничтожно малы. Также малы и амплитуды

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_a &= \sqrt{\left(\frac{J_C\dot{\psi}_н}{J\Omega\cos\vartheta_0}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{J_BJ_C}\dot{\vartheta}_н}{J\Omega\cos\vartheta_0}\right)^2} = \frac{\sqrt{J_C\left(J_C\dot{\psi}_н^2 + J_B\dot{\vartheta}_н^2\right)}}{J\Omega\cos\vartheta_0}, \\ \psi_a &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{J_BJ_C}\dot{\psi}_н}{J\Omega\cos\vartheta_0}\right)^2 + \left(\frac{J_B\dot{\vartheta}_н}{J\Omega\cos\vartheta_0}\right)^2} = \frac{\sqrt{J_B\left(J_C\dot{\psi}_н^2 + J_B\dot{\vartheta}_н^2\right)}}{J\Omega\cos\vartheta_0} \end{aligned}\right\} \qquad (62)$$

нутационных колебаний, в то время как их круговая частота n, определяемая по выражению (53), весьма велика.

Зависимость между амплитудами нутационных колебаний определяется моментами инерции гироскопа относительно осей его подвеса:

$$\frac{\vartheta_a}{\psi_a} = \sqrt{\frac{J_C}{J_B}}.$$

В частном случае при $J_B = J_C$ полюс H гироскопа в процессе его нутационных колебаний перемещается по окружности. Представим себе, что момент мгновенной силы сообщил гироскопу начальное движение лишь вокруг оси OB с угловой скоростью $\dot{\vartheta}_н$. В этом случае при равенстве моментов инерции

$$J_B = J_C = J_п$$

выражения (59) принимают вид

$$\vartheta = \frac{J_п\dot{\vartheta}_н}{J\Omega\cos\vartheta_0}\sin nt;$$

$$\psi = -\frac{J_п\dot{\vartheta}_н}{J\Omega\cos\vartheta_0}\cos nt + \frac{J_п\dot{\vartheta}_н}{J\Omega\cos\vartheta_0}.$$

Возводя каждое из этих равенств в квадрат и суммируя полученные выражения, находим уравнение траектории

$$\vartheta^2 + \left(\psi - \frac{J_п\dot{\vartheta}_н}{J\Omega\cos\vartheta_0}\right)^2 = \left(\frac{J_п\dot{\vartheta}_н}{J\Omega\cos\vartheta_0}\right)^2,$$

представляющей собой окружность, которую проекция полюса H гироскопа описывает на плоскости Q, перемещаясь вокруг точки N с координатами $\vartheta^* = 0$; $\psi^* = \frac{J_п \dot{\vartheta}_н}{J\Omega \cos \vartheta_0}$.

В общем случае под действием момента мгновенной силы гироскопу, вращающемуся вокруг оси OA с угловой скоростью Ω (рис. 37), сообщаются начальные угловые скорости $\dot{\vartheta}_н$ и $\dot{\psi}_н$ вращения вокруг осей OB и OC подвеса. Гироскоп, который до этого обладал моментом количества движения $J\Omega$ только относительно оси OA, получает дополнительные моменты количества движения $J_B\dot{\vartheta}_н$ и $J_C\dot{\psi}_н$ относительно осей OB и OC соответственно. Вектор суммарного момента количества движения $\overline{L} = J\overline{\Omega} + J_B\overline{\dot{\vartheta}}_н + J_C\overline{\dot{\psi}}_н$ направлен по оси ON, положение которой в системе координат $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ характеризуется углами ϑ^* и ψ^*, определяемыми выражениями (61).

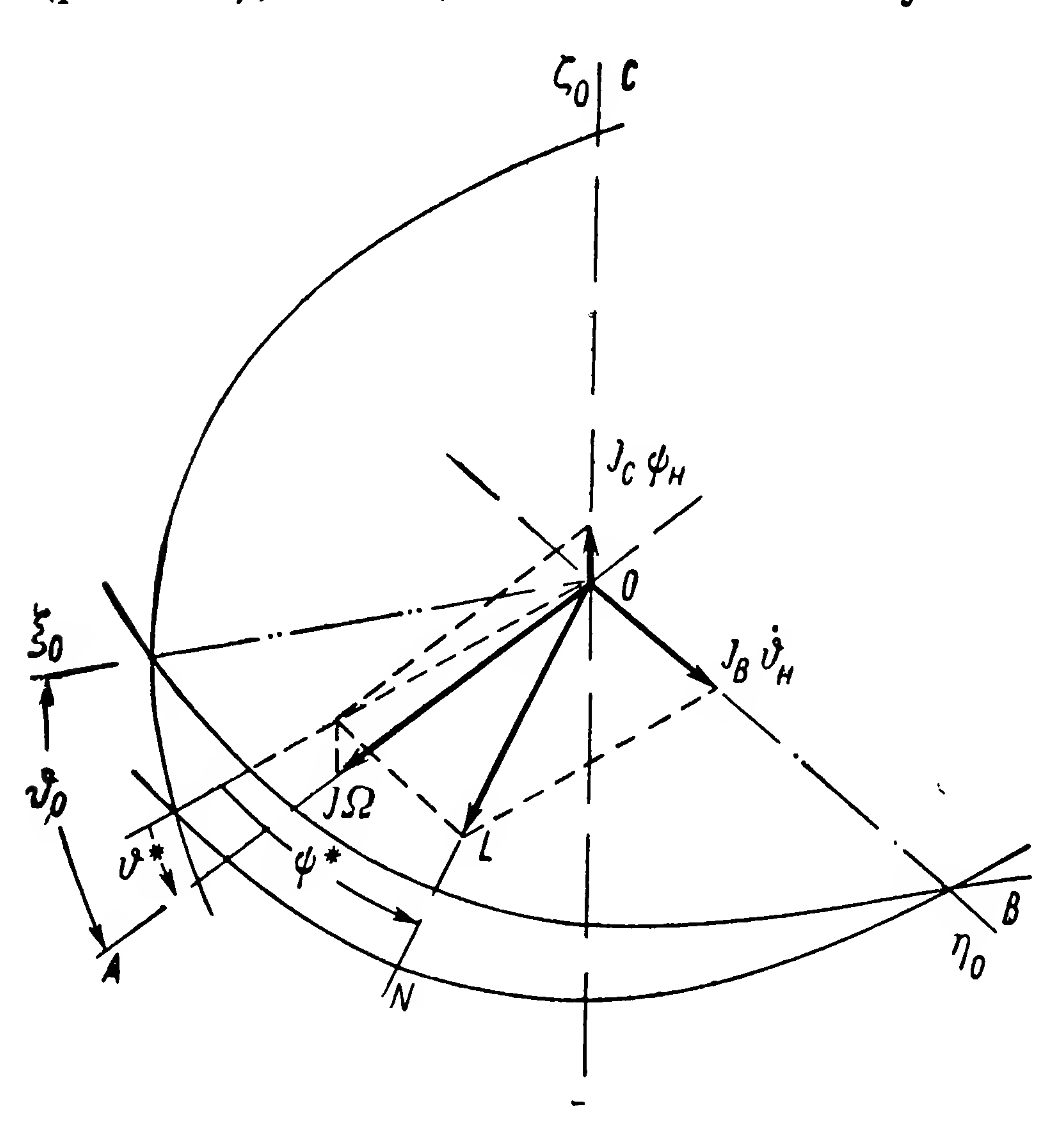


Рис. 37. Положение вектора суммарного момента количества движения при нутации гироскопа.

Так как на гироскопическую систему внешние силы не действуют, то в соответствии с теоремой об изменении момента количества движения[1] вектор $\overline{L}$ будет сохранять неизменное положение в пространстве. В то же время материальное тело гироскопа, двигаясь по инерции, совершает вокруг оси ON малые нутационные колебания, которые происходят с большой частотой в непосредственной близости от первоначального направления его главной оси. Это обстоятельство отражает свойство свободного гироскопа устойчиво сохранять заданное ему в пространстве положение. Даже момент мгновенных сил, который обычному телу сообщает движение с постоянной угловой скоростью, вызывает у гироскопа малые нутационные колебания, происходящие вокруг оси ON, отклоненной от первоначального положения главной оси гироскопа на ничтожно малые углы. Это замечательное свойство гироскопа широко используется во многих приборах и устройствах.

[1] См.: Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье. Курс теоретической механики. Т. II, ГИТТЛ, 1955, стр. 141.

Пример 5. Определить амплитуды и период нутационных колебаний гироскопа при действии на него момента мгновенной силы, сообщившей гироскопу начальные угловые скорости движения вокруг осей OB и OC его подвеса (рис. 36), соответственно равные $\dot{\vartheta}_н = 5$ град./сек.; $\dot{\psi}_н = 12$ град./сек. Определить также величины углов отклонения оси, вокруг которой происходят нутационные колебания гироскопа, от первоначального направления его главной оси. Гироскоп обладает моментами инерции: $J = 0{,}7$ *Гсмсек*^{2}; $J_B = 0{,}6$ *Гсмсек*^{2}; $J_C = 1{,}8$ *Гсмсек*^{2} и вращается вокруг главной оси с числом оборотов $n_р$, равным 30 000 в минуту. Начальный угол наклона главной оси гироскопа по отношению к перпендикуляру к плоскости наружного карданова кольца $\vartheta_0 = 5°$.

Вычислим значения угловых скоростей собственного вращения гироскопа и его начального движения вокруг осей подвеса:

$$\Omega = \frac{2\pi n_р}{60} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 30\,000}{60} = 3140 \text{ сек.}^{-1};$$

$$\dot{\vartheta}_н = \frac{5}{57{,}3} = 0{,}087 \text{ сек.}^{-1};$$

$$\dot{\psi}_н = \frac{12}{57{,}3} = 0{,}209 \text{ сек.}^{-1}$$

По формулам (53) и (60) вычислим круговую частоту n и период T нутационных колебаний:

$$n = \frac{J\Omega \cos\vartheta_0}{\sqrt{J_B J_C}} = \frac{0{,}7 \cdot 3140 \cdot 0{,}996}{\sqrt{0{,}6 \cdot 1{,}8}} = 2105 \text{ сек.}^{-1};$$

$$T = \frac{2\pi}{n} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{2105} = 0{,}003 \text{ сек.}$$

Значения амплитуд нутационных колебаний определяются по выражениям (62):

$$\vartheta_a = \frac{\sqrt{J_C\left(J_C \dot{\psi}_н^2 + J_B \dot{\vartheta}_н^2\right)}}{J\Omega \cos\vartheta_0} = \frac{\sqrt{1{,}8\,(1{,}8 \cdot 0{,}209^2 + 0{,}6 \cdot 0{,}087^2)}}{0{,}7 \cdot 3140 \cdot 0{,}996} = 1{,}76 \cdot 10^{-4} \text{ рад.},$$

$$\psi_a = \frac{\sqrt{J_B\left(J_C \dot{\psi}_н^2 + J_B \dot{\vartheta}_н^2\right)}}{J\Omega \cos\vartheta_0} = \frac{\sqrt{0{,}6\,(1{,}8 \cdot 0{,}209^2 + 0{,}6 \cdot 0{,}087^2)}}{0{,}7 \cdot 3140 \cdot 0{,}996} = 1{,}02 \cdot 10^{-4} \text{ рад.},$$

или

$$\vartheta_a = 1{,}76 \cdot 10^{-4} \cdot 57{,}3 \cdot 60 = 0{,}61 \text{ угл. мин.};$$

$$\psi_a = 1{,}02 \cdot 10^{-4} \cdot 57{,}3 \cdot 60 = 0{,}35 \text{ угл. мин.}$$

Наконец по формулам (61) находим углы ϑ^* и ψ^* отклонения оси, вокруг которой происходят нутационные колебания гироскопа, от первоначального направления его главной оси:

$$\vartheta^* = -\frac{J_C \dot{\psi}_н}{J\Omega \cos\vartheta_0} = -\frac{1{,}8 \cdot 0{,}209}{0{,}7 \cdot 3140 \cdot 0{,}996} = -1{,}72 \cdot 10^{-4} \text{ рад.};$$

$$\psi^* = \frac{J_B \dot{\vartheta}_н}{J\Omega \cos\vartheta_0} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}087}{0{,}7 \cdot 3140 \cdot 0{,}996} = 2{,}38 \cdot 10^{-5} \text{ рад.},$$

или

$$\vartheta^* = -1{,}72\cdot 10^{-4}\cdot 57{,}3\cdot 60 = -0{,}59 \text{ угл. мин.};$$

$$\psi^* = 2{,}38\cdot 10^{-5}\cdot 57{,}3\cdot 60 = 0{,}08 \text{ угл. мин.}$$

§ 15. ДВИЖЕНИЕ ГИРОСКОПА ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОСТОЯННОГО МОМЕНТА ВНЕШНЕЙ СИЛЫ (ПЕРВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)

Предположим, что на гироскоп, обладающий тремя степенями свободы, действует внешняя сила, создающая постоянные по величине и направлению моменты относительно обеих осей подвеса $M_B = \text{const}$; $M_C = \text{const}$. При этом условии система (47) неоднородных дифференциальных уравнений будет иметь частные решения

$$\dot{\vartheta}_r = -\frac{M_C}{J\Omega\cos\vartheta_0}; \quad \dot{\psi}_r = \frac{M_B}{J\Omega\cos\vartheta_0},$$

из которых следует

$$\vartheta_r = \int \dot{\vartheta}_r\,dt = -\frac{M_C}{J\Omega\cos\vartheta_0}\,t;$$
$$\psi_r = \int \dot{\psi}_r\,dt = \frac{M_B}{J\Omega\cos\vartheta_0}\,t. \tag{63}$$

Учитывая решения (57) соответствующей системы однородных дифференциальных уравнений (50) и выражения (63), получим общие решения системы уравнений (47) для рассматриваемого случая:

$$\left.\begin{aligned}\vartheta &= C_1\cos nt + C_2\sin nt + C_3 - \frac{M_C}{J\Omega\cos\vartheta_0}\,t;\\ \psi &= \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\,(C_1\sin nt - C_2\cos nt) + C_4 + \frac{M_B}{J\Omega\cos\vartheta_0}\,t,\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

где величина n определяется по формуле (53).

Определим входящие в выражения (64) постоянные интегрирования. Будем, как и ранее, полагать, что в начальный момент при $t = 0$ главная ось OA гироскопа была совмещена с плоскостью $\xi_0 O \zeta_0$ (рис. 38) и составляла с осью $O\xi_0$ угол ϑ_0. При этом условии $\vartheta(0) = 0$; $\psi(0) = 0$. Так как при $t < 0$ моменты внешних сил на гироскоп не действовали, то его начальные угловые скорости движения вокруг осей подвеса $\dot{\vartheta}(0) = 0$; $\dot{\psi}(0) = 0$.

Для принятых начальных условий в соответствии с выражениями (64) и их первыми производными имеем

$$\vartheta(0) = C_1 + C_3 = 0; \quad \psi(0) = -\sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\,C_2 + C_4 = 0;$$

$$\dot{\vartheta}(0) = nC_2 - \frac{M_C}{J\Omega\cos\vartheta_0} = 0; \quad \dot{\psi}(0) = \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\,nC_1 + \frac{M_B}{J\Omega\cos\vartheta_0} = 0.$$

Совместное решение полученных равенств определяет искомые значения постоянных интегрирования, которые с учетом принятого выше обозначения (53) будут равны:

$$C_1 = -\frac{J_C M_B}{(J\Omega \cos\vartheta_0)^2}; \quad C_2 = \frac{\sqrt{J_B J_C} M_C}{(J\Omega \cos\vartheta_0)^2};$$

$$C_3 = \frac{J_C M_B}{(J\Omega \cos\vartheta_0)^2}; \quad C_4 = \frac{J_B M_C}{(J\Omega \cos\vartheta_0)^2}.$$

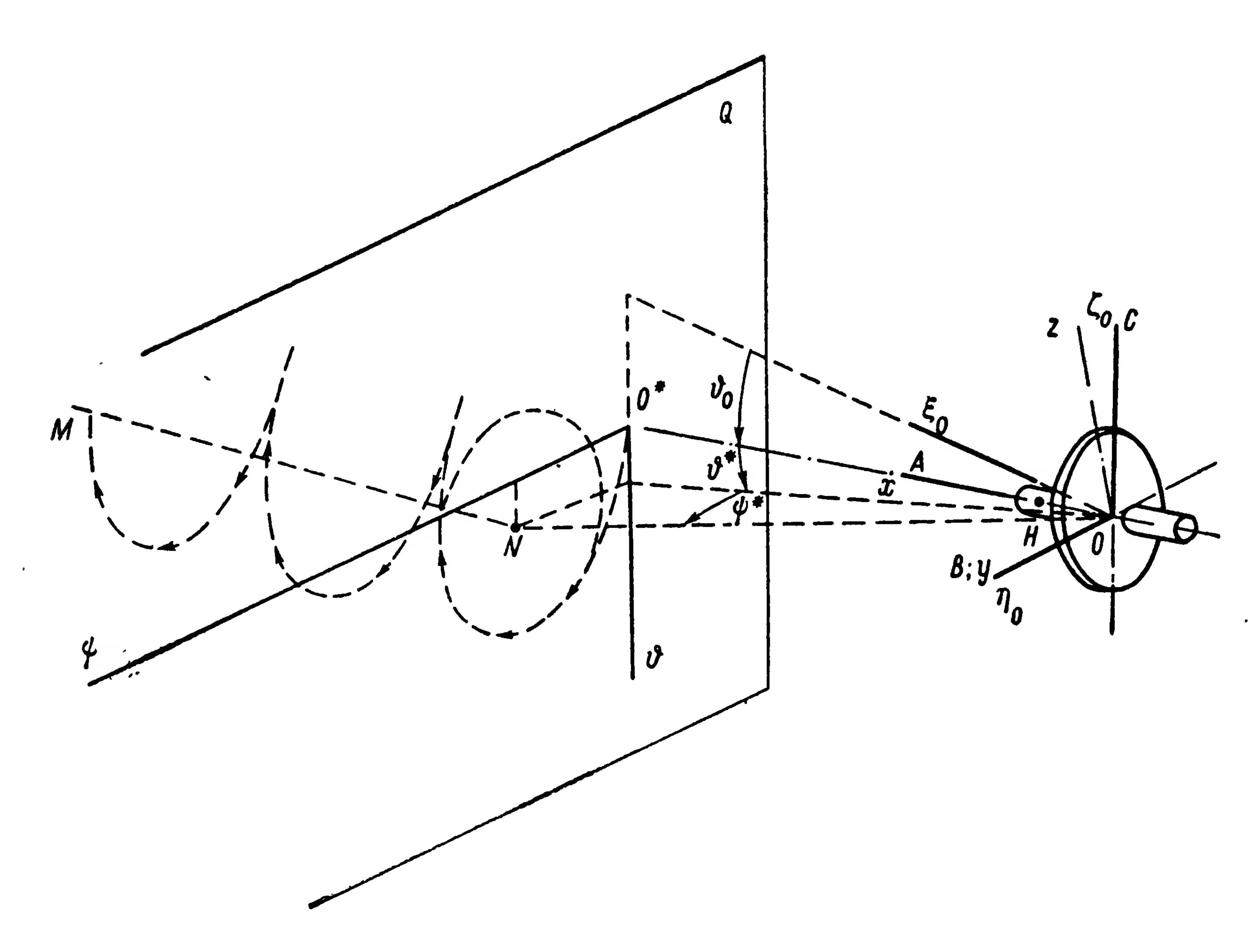


Рис. 38. Траектория перемещения полюса гироскопа, движущегося под влиянием действия постоянного момента внешней силы.

Подставляя найденные значения C_1, C_2, C_3 и C_4 в выражения (64), получаем

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta &= -\frac{J_C M_B}{(J\Omega \cos\vartheta_0)^2}\cos nt + \frac{\sqrt{J_B J_C} M_C}{(J\Omega \cos\vartheta_0)^2}\sin nt + \\
&+ \frac{J_C M_B}{(J\Omega \cos\vartheta_0)^2} - \frac{M_C}{J\Omega \cos\vartheta_0} t; \\
\psi &= -\frac{\sqrt{J_B J_C} M_B}{(J\Omega \cos\vartheta_0)^2}\sin nt - \frac{J_B M_C}{(J\Omega \cos\vartheta_0)^2}\cos nt + \\
&+ \frac{J_B M_C}{(J\Omega \cos\vartheta_0)^2} + \frac{M_B}{J\Omega \cos\vartheta_0} t.
\end{aligned}\right\} \quad (65)$$

Для выявления некоторых особенностей рассматриваемого движения гироскопа спроектируем полюс H гироскопа на пло-

скость Q (рис. 38). Так как главная ось OA гироскопа в начальный момент составляла с осью $O\xi_0$ угол ϑ_0, то очевидно, что полюс H в этот момент времени проектировался на плоскость Q в точку O^*.

Нетрудно показать, что под влиянием моментов внешних сил M_B и M_C гироскоп в первое мгновение будет двигаться ускоренно по направлениям их действия, как и обычное твердое тело. Дважды дифференцируя выражения (63), находим

$$\ddot{\vartheta} = n^2 \frac{J_C M_B}{(J\Omega \cos \vartheta_0)^2} \cos nt - n^2 \frac{\sqrt{J_B J_C} M_C}{(J\Omega \cos \vartheta_0)^2} \sin nt;$$

$$\ddot{\psi} = n^2 \frac{\sqrt{J_B J_C} M_B}{(J\Omega \cos \vartheta_0)^2} \sin nt + n^2 \frac{J_B M_C}{(J\Omega \cos \vartheta_0)^2} \cos nt.$$

Из полученных равенств в соответствии с зависимостью (53) следует, что при $t = 0$ гироскоп обладал ускорениями

$$\ddot{\vartheta}(0) = n^2 \frac{J_C M_B}{(J\Omega \cos \vartheta_0)^2} = \frac{M_B}{J_B};$$

$$\ddot{\psi}(0) = n^2 \frac{J_B M_C}{(J\Omega \cos \vartheta_0)^2} = \frac{M_C}{J_C}.$$

Но при повороте гироскопа, обладающего собственным вращением ($\Omega \neq 0$), вокруг его осей подвеса сразу же возникнут моменты гироскопической реакции, которые и обусловят появление нутационных колебаний. В результате проекция полюса H гироскопа начнет перемещаться на плоскости Q по некоторой кривой вокруг центра N. Координаты центра N в начальный момент времени будут определяться третьими членами выражений (65):

$$\vartheta^*(0) = \frac{J_C M_B}{(J\Omega \cos \vartheta_0)^2}; \quad \psi^*(0) = \frac{J_B M_C}{(J\Omega \cos \vartheta_0)^2}.$$

Если предположить, что в течение времени, близкого к начальному, положение центра N остается на плоскости Q неизменным, то проекция точки H будет перемещаться вокруг этого центра по эллипсу, как это имело место при воздействии на гироскоп момента мгновенной силы (см. рис. 36). Значения полуосей такого эллипса в рассматриваемом случае движения гироскопа определяются коэффициентами при тригонометрических членах выражений (65):

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_a &= \sqrt{\left[\frac{J_C M_B}{(J\Omega \cos \vartheta_0)^2}\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{J_B J_C} M_C}{(J\Omega \cos \vartheta_0)^2}\right]^2} = \frac{\sqrt{J_C (J_C M_B^2 + J_B M_C^2)}}{(J\Omega \cos \vartheta_0)^2}; \\
\psi_a &= \sqrt{\left[\frac{\sqrt{J_B J_C} M_B}{(J\Omega \cos \vartheta_0)^2}\right]^2 + \left[\frac{J_B M_C}{(J\Omega \cos \vartheta_0)^2}\right]^2} = \frac{\sqrt{J_B (J_C M_B^2 + J_B M_C^2)}}{(J\Omega \cos \vartheta_0)^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (66)$$

Однако в действительности положение центра N на плоскости Q не остается неизменным. Последние члены выражений (65) показывают, что его положение на плоскости Q непрерывно изменяется, так как углы ϑ^* и ψ^* непрерывно растут по закону

$$\vartheta^* = \frac{J_C M_B}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2} - \frac{M_C t}{J\Omega\cos\vartheta_0}; \quad \psi^* = \frac{J_B M_C}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2} + \frac{M_B t}{J\Omega\cos\vartheta_0}.$$

Нетрудно заметить, что центр N удаляется от начала O^* координат $O^*\vartheta\psi$, двигаясь одновременно вдоль положительного направления оси $O^*\psi$ и отрицательного — оси $O^*\vartheta$. При этом скорости перемещения проекции полюса H гироскопа будут определяться коэффициентами при переменном t в последних членах выражений (65):

$$\dot{\vartheta}^* = -\frac{M_C}{J\Omega\cos\vartheta_0}; \quad \dot{\psi}^* = \frac{M_B}{J\Omega\cos\vartheta_0}. \tag{67}$$

Так как при постоянных значениях M_B и M_C коэффициенты при t в выражениях (65) остаются постоянными, то в пределах малых углов ϑ и ψ центр N практически будет перемещаться по некоторой прямой линии NM. В результате этого проекция полюса H гироскопа будет описывать на плоскости Q сложную кривую.

Для подтверждения сказанного вновь обратимся к выражениям (65). Будем полагать, что моменты инерции гироскопической системы J_B и J_C относительно осей OB и OC ее подвеса равны между собой: $J_B = J_C = J_п$ и что действующие на гироскоп постоянные внешние силы создают момент только относительно оси OB, т. е. будем считать $M_C = 0$. При указанных предположениях выражения (65) принимают вид

$$\vartheta = -\frac{J_п M_B}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}\cos nt + \frac{J_п M_B}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2};$$

$$\psi = -\frac{J_п M_B}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}\sin nt + \frac{M_B}{J\Omega\cos\vartheta_0}t.$$

Возводя последние равенства в квадрат, а затем складывая их, получим уравнение

$$\left[\vartheta - \frac{J_п M_B}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}\right]^2 + \left[\psi - \frac{M_B}{J\Omega\cos\vartheta_0}t\right]^2 = \left[\frac{J_п M_B}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}\right]^2, \tag{68}$$

которое и позволяет составить суждение о траектории движения проекции полюса H гироскопа на плоскости Q.

Как было показано выше (см. § 14), мелкие нутационные колебания гироскопа происходят с частотой n, весьма большой по сравнению с угловыми скоростями $\dot{\vartheta}^*$ и $\dot{\psi}^*$ его прецессионного движения, определяемыми по выражениям (67). Поэтому, фиксируя

какое-либо время $t = \tau$, можно для t, близкого к τ, рассматривать (68) как уравнение окружности. Радиус этой окружности и смещение ее центра N относительно начала O^* координатной системы $O^*\vartheta\psi$ в начальный момент времени будут определяться в данном случае величиной угла $\vartheta^*(0) = \frac{J_п M_B}{(J\Omega \cos\vartheta_0)^2}$.

В то же время слагаемое $\frac{M_B}{J\Omega\cos\vartheta_0} t$ уравнения (68) показывает, что центр N исследуемой окружности не остается на плоскости Q неподвижным, а непрерывно отклоняется от точки O^*, обусловливая тем самым перемещение проекции полюса H гироскопа на плоскости Q по сложной траектории.

Пример 6. Определить угловые скорости прецессионного движения гироскопа и амплитуды его нутационных колебаний при действии на гироскоп с тремя степенями свободы постоянных моментов внешних сил $M_B = 2{,}5$ *Гсм*, $M_C = 3{,}2$ *Гсм*. Гироскоп обладает моментами инерции $J = 2{,}1$ *Гсмсек*^{2}, $J_B = 1{,}7$ *Гсмсек*^{2}, $J_C = 3{,}4$ *Гсмсек*^{2}. Ротор вращается вокруг главной оси гироскопа с угловой скоростью $\Omega = 2900$ сек$^{-1}$. В начальный момент времени главная ось составляет с осью $O\xi_0$ угол $\vartheta_0 = 10°$.

Из зависимостей (67) находим значения угловых скоростей прецессионного движения гироскопа:

$$\dot\vartheta^* = -\frac{M_C}{J\Omega\cos\vartheta_0} = -\frac{3{,}2}{2{,}1\cdot 2900\cdot 0{,}985} = -5{,}3\cdot 10^{-4}\ \text{сек.}^{-1};$$

$$\dot\psi^* = \frac{M_B}{J\Omega\cos\vartheta_0} = \frac{2{,}5}{2{,}1\cdot 2900\cdot 0{,}985} = 4{,}2\cdot 10^{-4}\ \text{сек.}^{-1},$$

или

$$\dot\vartheta^* = -5{,}3\cdot 10^{-4}\cdot 57{,}3\cdot 60 = -1{,}82\ \text{угл. мин. сек.}^{-1};$$

$$\dot\psi^* = 4{,}2\cdot 10^{-4}\cdot 57{,}3\cdot 60 = 1{,}44\ \text{угл. мин. сек.}^{-1}$$

Искомые значения амплитуд нутационных колебаний определяются по выражениям (66):

$$\vartheta_a = \frac{\sqrt{J_C\left(J_C M_B^2 + J_B M_C^2\right)}}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2} = \frac{\sqrt{3{,}4\,(3{,}4\cdot 2{,}5^2 + 1{,}7\cdot 3{,}2^2)}}{(2{,}1\cdot 2900\cdot 0{,}985)^2} = 3{,}2\cdot 10^{-7}\ \text{рад.};$$

$$\psi_a = \frac{\sqrt{J_B\left(J_C M_B^2 + J_B M_C^2\right)}}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2} = \frac{\sqrt{1{,}7\,(3{,}4\cdot 2{,}5^2 + 1{,}7\cdot 3{,}2^2)}}{(2{,}1\cdot 2900\cdot 0{,}985)^2} = 2{,}3\cdot 10^{-7}\ \text{рад.},$$

или

$$\vartheta_a = 3{,}2\cdot 10^{-7}\cdot 57{,}3\cdot 60 = 1{,}1\cdot 10^{-3}\ \text{угл. мин.};$$

$$\psi_a = 2{,}3\cdot 10^{-7}\cdot 57{,}3\cdot 60 = 0{,}8\cdot 10^{-3}\ \text{угл. мин.}$$

§ 16. ТРАЕКТОРИЯ ПОЛЮСА ГИРОСКОПА

Чтобы более подробно изучить характер траектории перемещения проекции полюса H на плоскости Q при действии на гироскоп моментов внешних сил и выяснить причины, оказывающие влияние на ее изменение, вновь обратимся к выражениям (64).

Для упрощения последующих выкладок будем полагать, что внешние силы, действуя на гироскоп, создают момент только относительно его внутренней оси подвеса OB, т. е. $M_B = \text{const}$; $M_C = 0$. При этом условии выражения (64) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= C_1 \cos nt + C_2 \sin nt + C_3; \\ \psi &= \sqrt{\frac{J_B}{J_C}} (C_1 \sin nt - C_2 \cos nt) + C_4 + \frac{M_B}{J\Omega \cos \vartheta_0} t. \end{aligned}\right\} \quad (69)$$

Предположим, что при $t = 0$, когда главная ось OA гироскопа отклонена от прямой OO^* (рис. 38) на углы $\vartheta_н$ и $\psi_н$, гироскопу была сообщена начальная угловая скорость $\dot{\psi}_н$ вокруг наружной оси подвеса OC, т. е. $\vartheta(0) = \vartheta_н$; $\psi(0) = \psi_н$; $\dot{\vartheta}(0) = 0$; $\dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_н$. В соответствии с указанными начальными условиями из выражений (69) и их первых производных вытекают следующие зависимости:

$$\vartheta(0) = C_1 + C_3 = \vartheta_н; \quad \psi(0) = -\sqrt{\frac{J_B}{J_C}} C_2 + C_4 = \psi_н;$$

$$\dot{\vartheta}(0) = nC_2 = 0; \quad \dot{\psi}(0) = \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\, nC_1 + \frac{M_B}{J\Omega \cos \vartheta_0} = \dot{\psi}_н,$$

откуда

$$C_1 = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{J_C}{J_B}} \left(\dot{\psi}_н - \frac{M_B}{J\Omega \cos \vartheta_0} \right); \quad C_2 = 0;$$

$$C_3 = \vartheta_н - \frac{1}{n} \sqrt{\frac{J_C}{J_B}} \left(\dot{\psi}_н - \frac{M_B}{J\Omega \cos \vartheta_0} \right); \quad C_4 = \psi_н.$$

Подставив найденные значения постоянных интегрирования в (69), находим выражения для углов ϑ и ψ:

$$\vartheta = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{J_C}{J_B}} \left(\dot{\psi}_н - \frac{M_B}{J\Omega \cos \vartheta_0} \right) \cos nt + \vartheta_н - \\ - \frac{1}{n} \sqrt{\frac{J_C}{J_B}} \left(\dot{\psi}_н - \frac{M_B}{J\Omega \cos \vartheta_0} \right);$$

$$\psi = \frac{1}{n} \left(\dot{\psi}_н - \frac{M_B}{J\Omega \cos \vartheta_0} \right) \sin nt + \psi_н + \frac{M_B}{J\Omega \cos \vartheta_0} t.$$

Откладывая по осям $O^*\vartheta$ и $O^*\psi$ (рис. 38) значения ϑ и ψ для различных моментов времени t, получаем траекторию проекции полюса H гироскопа на плоскости Q. Дифференцируя полученные выражения, находим угловые скорости перемещения проекции полюса H:

$$\dot{\vartheta} = -\sqrt{\frac{J_C}{J_B}} \left(\dot{\psi}_н - \frac{M_B}{J\Omega \cos \vartheta_0} \right) \sin nt;$$

$$\dot{\psi} = \left(\dot{\psi}_н - \frac{M_B}{J\Omega \cos \vartheta_0} \right) \cos nt + \frac{M_B}{J\Omega \cos \vartheta_0},$$

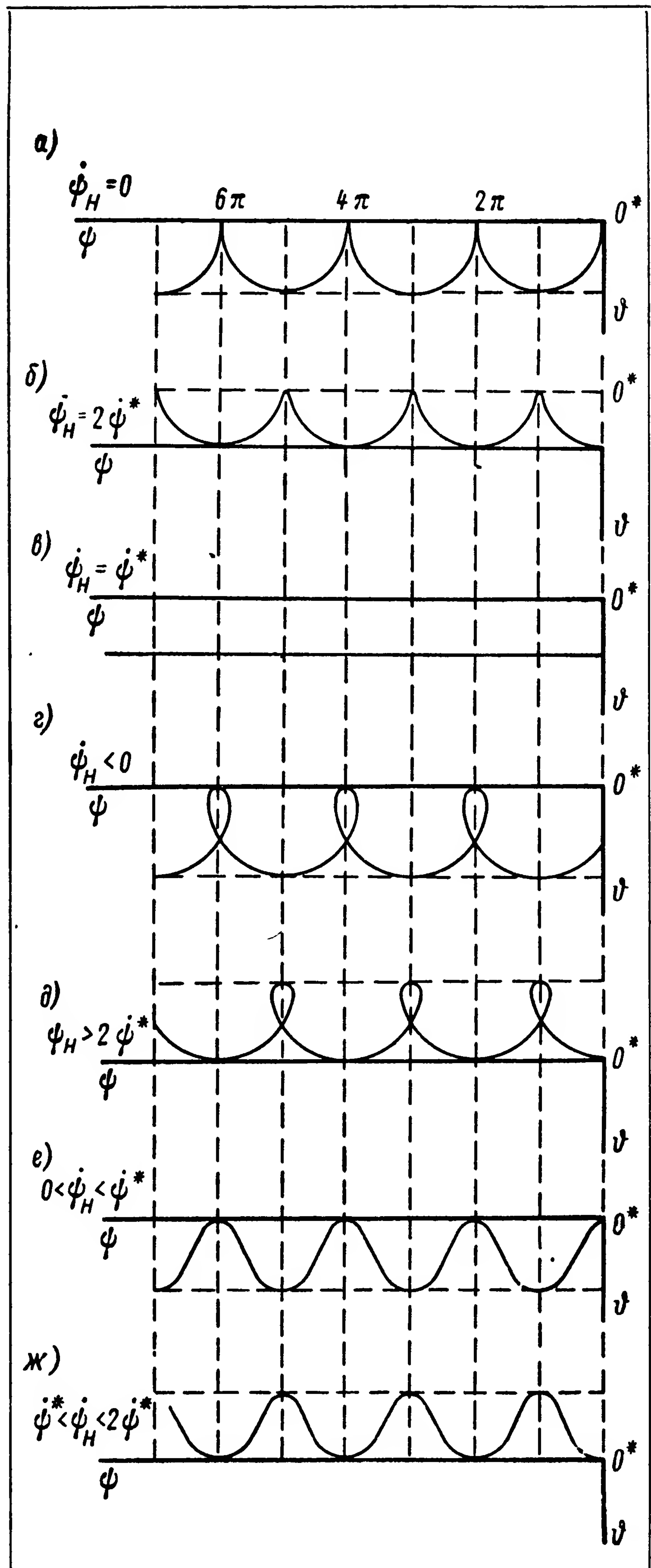


Рис. 39. Виды траекторий, описываемых полюсом прецессирующего гироскопа.

или, учитывая равенства (67),

$$\dot{\vartheta} = -\sqrt{\frac{J_C}{J_B}}(\dot{\psi}_н - \dot{\psi}^*)\sin nt;$$

$$\dot{\psi} = (\dot{\psi}_н - \dot{\psi}^*)\cos nt + \dot{\psi}^*. \qquad (70)$$

Проследим, в каких случаях угловая скорость $\dot{\psi}$ может обращаться в нуль и менять свой знак при положительном значении $\dot{\psi}^*$. Полагая $\dot{\psi} = 0$, из второго уравнения (70) находим

$$\cos nt = -\frac{\dot{\psi}^*}{\dot{\psi}_н - \dot{\psi}^*} = \frac{\dot{\psi}^*}{\dot{\psi}^* - \dot{\psi}_н}. \qquad (71)$$

Анализ выражений (71) и (70) позволяет определить вид траектории, по которой будет перемещаться проекция полюса гироскопа на картинной плоскости при различных значениях начальной угловой скорости $\dot{\psi}_н$. Равенство (71) показывает, что в тех случаях, когда $\dot{\psi}_н = 0$, угловая скорость $\dot{\psi} = 0$ при $nt = 2\pi k$, где k — целое положительное число. Согласно первому выражению (70) в эти же мгновения равна нулю и угловая скорость $\dot{\vartheta}$, положительная в первую четверть периода рассматриваемых колебаний. Таким образом, при $\dot{\psi}_н = 0$ исследуемая траектория имеет вид кривой, показанной на рис. 39, *а*.

Если $\dot{\psi}_н = 2\dot{\psi}^*$, то $\dot{\psi} = 0$ при $nt = \pi(2k+1)$. В эти же мгновения угловая скорость $\dot{\vartheta}$, которая в первую четверть периода колебаний отрицательна, также становится равной нулю. Исследуемая траектория показана на рис. 39, *б*. При $\dot{\psi}_н = \dot{\psi}^*$ из равенств (70) следует, что $\dot{\vartheta} = 0$, а $\dot{\psi} = \dot{\psi}^*$. Как видим, траектория проекции полюса принимает в этом случае вид прямой линии (рис. 39, *в*).

В тех случаях, когда $\dot{\psi}_н < 0$ или $\dot{\psi}_н > 2\dot{\psi}^*$, угловая скорость $\dot{\psi}$, как показывают выражения (70), периодически меняет свой знак, в связи с чем рассматриваемая траектория получает вид петлеобразной кривой (рис. 39, *г*). Если $\dot{\psi}_н < 0$, то $\dot{\psi} = 0$ в те мгновения, когда $\cos nt = 1$. При этом условии $\dot{\vartheta}$ в первую четверть периода колебаний положительна (рис. 39, *г*). Если $\dot{\psi}_н > 2\dot{\psi}^*$, то $\dot{\psi} = 0$ при $\cos nt = -1$, а $\dot{\vartheta}$ в первую четверть периода колебаний отрицательна (рис. 39, *д*).

Наконец, в тех случаях, когда $0 < \dot{\psi}_н < \dot{\psi}^*$ или $\dot{\psi}^* < \dot{\psi}_н < 2\dot{\psi}^*$, угловая скорость $\dot{\psi}$ не меняет своего знака. Если $\dot{\psi}_н$ определяется условием $0 < \dot{\psi}_н < \dot{\psi}^*$, то $\dot{\psi} = 0$ в те мгновения, когда $\cos nt = 1$. В этом случае $\dot{\vartheta}$ в первую четверть периода колебаний положительна и исследуемая траектория имеет вид кривой, приведенной на рис. 39, *е*. Если же $\dot{\psi}_н$ подчинена условию $\dot{\psi}^* < \dot{\psi}_н < 2\dot{\psi}^*$, то $\dot{\psi} = 0$ при $\cos nt = -1$. При этом $\dot{\vartheta}$ в первую четверть периода колебаний отрицательна и рассматриваемая траектория характеризуется кривой, показанной на рис. 39, *ж*.

§ 17. ДВИЖЕНИЕ ГИРОСКОПА ПОД ВЛИЯНИЕМ МОМЕНТА ВНЕШНЕЙ СИЛЫ, ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ПО ГАРМОНИЧЕСКОМУ ЗАКОНУ

Рассмотрим случай, когда моменты внешних сил изменяются по гармоническому закону:

$$M_B = M_{0B} \sin q_B t; \quad M_C = M_{0C} \cos q_C t,$$

где M_{0B} и M_{0C} — амплитуды, q_B и q_C — соответствующие круговые частоты изменений моментов M_B и M_C.

При этом условии система уравнений (47) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\psi}\cos\vartheta_0 &= M_{0B}\sin q_B t; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\dot{\vartheta}\cos\vartheta_0 &= M_{0C}\cos q_C t. \end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

Решение однородной системы уравнений (50), соответствующей (72), было найдено выше (см. § 14) и определялось выражениями (57). Учитывая характер изменения во времени действую-

щих на гироскоп моментов внешних сил, частные решения системы (72) будем искать в виде

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_r &= K\cos q_B t + L\sin q_B t + N\cos q_C t + R\sin q_C t;\\ \psi_r &= K^*\cos q_B t + L^*\sin q_B t + N^*\cos q_C t + R^*\sin q_C t, \end{aligned}\right\} \quad (73)$$

где K, K^*, L, L^*, N, N^*, R и R^* — амплитуды искомых колебаний.

Чтобы найти условия, при которых частные решения (73) будут при любых t удовлетворять уравнениям (72), определим первые и вторые производные выражений (73) и подставим их в исходную систему уравнений (72):

$$\begin{gathered} -J_B\left(q_B^2 K\cos q_B t + q_B^2 L\sin q_B t + q_C^2 N\cos q_C t + q_C^2 R\sin q_C t\right) + \\ + J\Omega\cos\vartheta_0\left(-q_B K^*\sin q_B t + q_B L^*\cos q_B t - q_C N^*\sin q_C t + \right.\\ \left. + q_C R^*\cos q_C t\right) = M_{0B}\sin q_B t; \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} -J_C\left(q_B^2 K^*\cos q_B t + q_B^2 L^*\sin q_B t + q_C^2 N^*\cos q_C t + q_C^2 R^*\sin q_C t\right) - \\ - J\Omega\cos\vartheta_0\left(-q_B K\sin q_B t + q_B L\cos q_B t - q_C N\sin q_C t + \right.\\ \left. + q_C R\cos q_C t\right) = M_{0C}\cos q_C t. \end{gathered}$$

Приравнивая коэффициенты соответствующих тригонометрических членов в правой и левой частях полученных уравнений и учитывая (53), находим значения амплитуд:

$$K = L^* = N = R^* = 0;$$

$$K^* = \frac{-M_{0B}}{q_B J\Omega\cos\vartheta_0\left(1 - \frac{q_B^2}{n^2}\right)}; \quad L = \frac{J_C M_{0B}}{J^2\Omega^2\cos^2\vartheta_0\left(1 - \frac{q_B^2}{n^2}\right)};$$

$$N^* = \frac{J_B M_{0C}}{J^2\Omega^2\cos^2\vartheta_0\left(1 - \frac{q_C^2}{n^2}\right)}; \quad R = \frac{-M_{0C}}{q_C J\Omega\cos\vartheta_0\left(1 - \frac{q_C^2}{n^2}\right)}.$$

Таким образом, учитывая (57) и найденные значения амплитуд, общее решение системы уравнений (72) получим в виде

$$\left.\begin{gathered} \vartheta = C_1\cos nt + C_2\sin nt + C_3 + \\ + \frac{J_C M_{0B}}{J^2\Omega^2\cos^2\vartheta_0\left(1 - \frac{q_B^2}{n^2}\right)}\sin q_B t - \frac{M_{0C}}{q_C J\Omega\cos\vartheta_0\left(1 - \frac{q_C^2}{n^2}\right)}\sin q_C t; \\ \psi = \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\left(C_1\sin nt - C_2\cos nt\right) + C_4 + \\ + \frac{J_B M_{0C}}{J^2\Omega^2\cos^2\vartheta_0\left(1 - \frac{q_C^2}{n^2}\right)}\cos q_C t - \frac{M_{0B}}{q_B J\Omega\cos\vartheta_0\left(1 - \frac{q_B^2}{n^2}\right)}\cos q_B t. \end{gathered}\right\} \quad (74)$$

Пренебрегая в (74) членами, характеризующими нутационные колебания гироскопа, получим

$$\left.\begin{aligned}\vartheta &= \frac{J_C M_{0B}}{J^2\Omega^2 \cos^2\vartheta_0\left(1-\frac{q_B^2}{n^2}\right)}\sin q_B t - \frac{M_{0C}}{q_C J\Omega\cos\vartheta_0\left(1-\frac{q_C^2}{n^2}\right)}\sin q_C t;\\ \psi &= \frac{J_B M_{0C}}{J^2\Omega^2 \cos^2\vartheta_0\left(1-\frac{q_C^2}{n^2}\right)}\cos q_C t - \frac{M_{0B}}{q_B J\Omega\cos\vartheta_0\left(1-\frac{q_B^2}{n^2}\right)}\cos q_B t.\end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Как видим, под действием моментов внешних сил, изменяющихся по гармоническому закону, гироскоп начинает совершать вынужденные гармонические колебания. Эти колебания происходят с частотами q_B и q_C изменений возмущающих сил. Как правило, q_B и q_C ничтожно малы по сравнению с частотой n нутационных колебаний гироскопа. Учитывая сказанное, можно утверждать, что в выражениях (75) множители

$$1-\frac{q_B^2}{n^2};\quad 1-\frac{q_C^2}{n^2} \tag{76}$$

практически будут мало отличаться от единицы.

Поэтому выражения (75) могут быть упрощены и переписаны в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}\vartheta &= \frac{J_C M_{0B}}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}\sin q_B t - \frac{M_{0C}}{q_C J\Omega\cos\vartheta_0}\sin q_C t;\\ \psi &= \frac{J_B M_{0C}}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}\cos q_C t - \frac{M_{0B}}{q_B J\Omega\cos\vartheta_0}\cos q_B t.\end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Проанализировав выражения (77), убеждаемся, что вынужденные колебания гироскопа в рассматриваемом случае состоят из двух гармонических составляющих. Основная составляющая описывается зависимостями

$$\left.\begin{aligned}\vartheta &= \frac{M_{0C}}{q_C J\Omega\cos\vartheta_0}\sin q_C t;\\ \psi &= \frac{M_{0B}}{q_B J\Omega\cos\vartheta_0}\cos q_B t.\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Ее амплитуды $\frac{M_{0C}}{q_C J\Omega\cos\vartheta_0}$ и $\frac{M_{0B}}{q_B J\Omega\cos\vartheta_0}$ во много раз превосходят амплитуды $\frac{J_C M_{0B}}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}$ и $\frac{J_B M_{0C}}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}$ второй составляющей. Заметим, что с увеличением частоты вынужденных колебаний амплитуды основной гармонической составляющей уменьшаются, в то время как амплитуды второй остаются неизменными.

Таким образом, выражения (78) в первом приближении характеризуют изменение положения главной оси гироскопа в пространстве в тех случаях, когда на гироскоп действуют моменты внешних сил, изменяющихся по гармоническому закону. Как следует из (77), при действии момента только относительно одной оси гироскоп начинает колебаться одновременно вокруг обеих осей подвеса. При этом амплитуда колебаний гироскопа вокруг оси, относительно которой действует момент возмущающей силы, значительно меньше амплитуды его колебаний вокруг второй оси подвеса. В самом деле, если в выражениях (77) амплитуду одного из моментов, например M_{0B}, полагать равной нулю, то указанные выражения примут вид

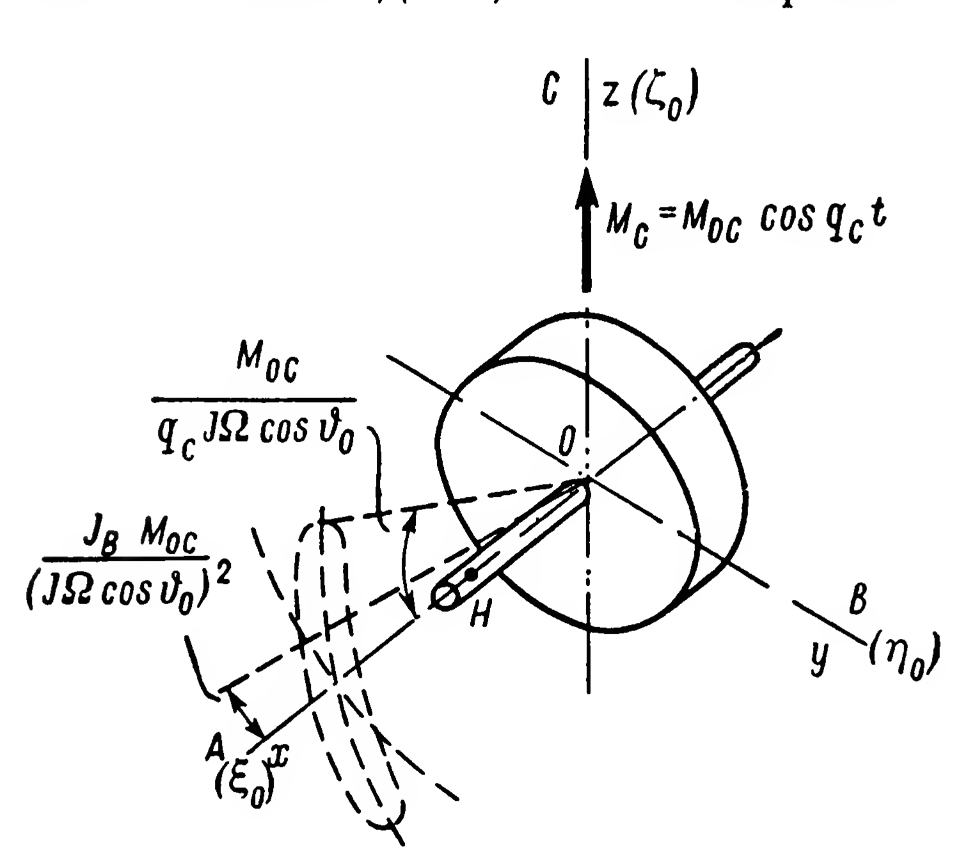


Рис. 40. К определению вынужденных колебаний гироскопа с тремя степенями свободы.

$$\vartheta = -\frac{M_{0C}}{q_C J\Omega \cos\vartheta_0}\sin q_C t;$$

$$\psi = \frac{J_B M_{0C}}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}\cos q_C t.$$

Как видим, амплитуда изменения угла ψ поворота гироскопа вокруг оси OC, относительно которой на гироскоп действует момент M_C внешней возмущающей силы, во много раз меньше амплитуды изменения угла ϑ поворота гироскопа вокруг оси OB. В результате система координат $Oxyz$, связанная с гироскопом (рис. 40), совершает колебания относительно неподвижных координатных осей $O\xi_0\eta_0\zeta_0$, в процессе которых полюс H гироскопа описывает эллипс. Его большая ось расположена параллельно оси действия внешнего момента.

Пример 7. Определить амплитуды вынужденных колебаний гироскопа при действии на него моментов M_B и M_C внешних сил, изменяющихся по гармоническому закону с круговой частотой $q_B = q_C = 1{,}16$ сек$^{-1}$ и амплитудами $M_{0B} = M_{0C} = 6$ *Гсм*. Параметры гироскопа: $J\Omega = 2820$ *Гсмсек*; $J_B = 0{,}66$ *Гсмсек*^{2}, $J_C = 5{,}55$ *Гсмсек*^{2}. Главная ось гироскопа в начальный момент времени составляет с плоскостью горизонта угол $\vartheta_0 = 0$.

По формуле (53) находим круговую частоту n собственных нутационных колебаний гироскопа:

$$n = \frac{J\Omega\cos\vartheta_0}{\sqrt{J_B J_C}} = \frac{2820\cdot 1}{\sqrt{0{,}66\cdot 5{,}55}} = 1477{,}6 \text{ сек.}^{-1}$$

Подставив значения n; q_B и q_C в выражения (76), убеждаемся, что коэффициенты

$$1 - \frac{q_B^2}{n^2} = 1 - \frac{q_C^2}{n^2} = 1 - \left(\frac{1{,}16}{1477{,}6}\right)^2 = 1 - (7{,}9\cdot 10^{-4})^2 \approx 1.$$

Следовательно, для определения искомых амплитуд вынужденных колебаний гироскопа можно воспользоваться непосредственно выражениями (77). Подставляя численные значения величин, входящих в эти выражения, будем иметь

$$\vartheta = \frac{J_C M_{0B}}{(J\Omega \cos \vartheta_0)^2} \sin q_B t - \frac{M_{0C}}{q_C J\Omega \cos \vartheta_0} \sin q_C t =$$

$$= \frac{5{,}55\cdot 6}{(2820\cdot 1)^2} \sin 1{,}16t - \frac{6}{1{,}16\cdot 2820\cdot 1} \sin 1{,}16t =$$

$$= 4{,}18\cdot 10^{-6} \sin 1{,}16t - 1{,}84\cdot 10^{-3} \sin 1{,}16t;$$

$$\psi = \frac{J_B M_{0C}}{J\Omega \cos \vartheta_0)^2} \cos q_C t - \frac{M_{0B}}{q_B J\Omega \cos \vartheta_0} \cos q_B t =$$

$$= \frac{0{,}66\cdot 6}{(2820\cdot 1)^2} \cos 1{,}16t - \frac{6}{1{,}16\cdot 2820\cdot 1} \cos 1{,}16t =$$

$$= 4{,}96\cdot 10^{-7} \cos 1{,}16t - 1{,}84\cdot 10^{-3} \cos 1{,}16t.$$

Полученные результаты показывают, что амплитуды основной составляющей вынужденных колебаний гироскопа в рассматриваемом случае на три-четыре порядка превосходят амплитуды их второй составляющей.

§ 18. ДЕЙСТВИЕ МОМЕНТА ВНЕШНЕЙ СИЛЫ НА ГИРОСКОП С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Рассмотренные выше случаи движения гироскопа с тремя степенями свободы при действии на него момента внешней силы теряют свою специфическую особенность при лишении гироскопа свободы вращения относительно одной из его осей подвеса. Действительно, представим себе гироскоп, лишенный свободы вращения, например, относительно оси OC (рис. 41). Наружное кольцо HK такого гироскопа благодаря тому, что оно жестко соединяется с основанием $K\Pi$, выполняет по существу роль корпуса прибора. По той же причине поворот гироскопа вокруг оси OC по отношению к корпусу $K\Pi$ становится невозможным.

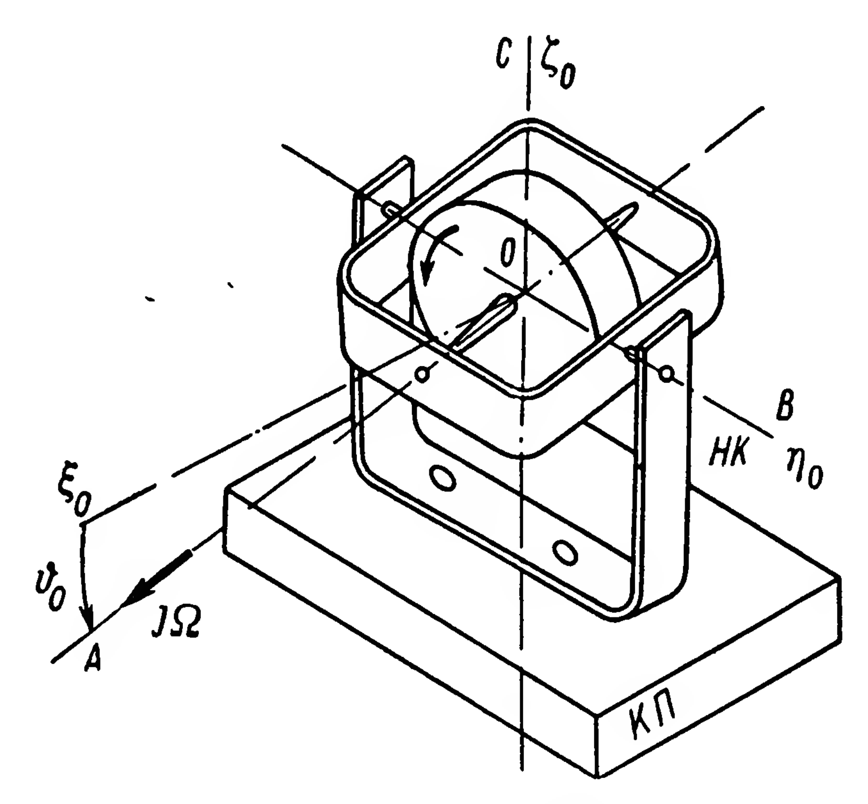


Рис. 41. Гироскоп с двумя степенями свободы.

Сообщим ротору вращение вокруг главной оси OA с угловой скоростью Ω и выясним характер движения такого гироскопа относительно системы координат $O\xi_0\eta_0\zeta_0$, связанной с корпусом

прибора *КП*, под действием момента внешней силы. Обратимся с этой целью к уравнениям (47). Так как угол ψ в рассматриваемом гироскопическом устройстве все время остается равным нулю, то система уравнений (47) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} &= M_B; \\ -J\Omega\dot{\vartheta}\cos\vartheta_0 &= M_C. \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Первое из уравнений (79) показывает, что при действии относительно оси подвеса *ОВ* момента M_B внешней силы гироскоп начинает вращаться вокруг этой оси с ускорением $\ddot{\vartheta} = \frac{M_B}{J_B}$, как и обычное твердое тело, в направлении действия момента M_B.

Если внешний момент был порожден мгновенной силой, действовавшей на гироскоп в течение малого времени, то первое уравнение (79) примет вид $J_B\ddot{\vartheta} = 0$, откуда следует, что сообщаемая гироскопу в начальный момент времени угловая скорость $\dot{\vartheta}_н$ будет оставаться неизменной:

$$\dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_н = \text{const}.$$

При гармоническом изменении внешнего момента M_B первое уравнение (79) должно быть переписано в виде

$$J_B\ddot{\vartheta} = M_{0B}\sin q_B t,$$

откуда путем интегрирования находим значение угловой скорости

$$\dot{\vartheta} = -\frac{M_{0B}}{q_B J_B}\cos q_B t + C_1$$

и угла поворота

$$\vartheta = -\frac{M_{0B}}{q_B^2 J_B}\sin q_B t + C_1 t + C_2.$$

При начальных условиях $\vartheta(0) = 0$, $\dot{\vartheta}(0) = 0$ постоянные интегрирования определятся следующими равенствами:

$$C_1 = \frac{M_{0B}}{q_B J_B}; \quad C_2 = 0.$$

Тогда выражение для угла ϑ примет вид

$$\vartheta = -\frac{M_{0B}}{q_B^2 J_B}\sin q_B t + \frac{M_{0B}}{q_B J_B}t, \tag{80}$$

откуда следует, что в рассматриваемом случае гироскоп с двумя степенями свободы вращается с постоянной угловой скоростью $\frac{M_{0B}}{q_B J_B}$ вокруг оси *ОВ* в направлении начального действия момента M_B. На это движение накладываются гармонические колеба-

ния, происходящие с частотой q_B изменения внешнего возмущающего момента M_B и амплитудой

$$\vartheta_a = \frac{M_{0B}}{q_B^2 J_B}.$$

Как видим, гироскоп с двумя степенями свободы, в отличие от гироскопа с тремя степенями свободы, не обладает устойчивостью. Действие момента внешней силы вызывает вращение гироскопа с двумя степенями свободы, как и обычного твердого тела, в направлении возмущающего момента.

Второе уравнение (79) позволяет определить величину момента гироскопической реакции, характеризующего сопротивляемость массы ротора гироскопа при сообщении ей поворотного ускорения. Последнее, как известно (см. § 6), возникает всякий раз, как только ротору гироскопа сообщается вращение вокруг осей *ОА* и *ОВ* одновременно. Действующий на кольцо *НК* и детали его крепления к основанию *КП* гироскопический момент будет гаситься реакцией внутренних сил сопротивления материала, из которого выполнены элементы гироскопического устройства.

Пример 8. Определить угловую скорость постоянной составляющей вращения и амплитуду вынужденных колебаний гироскопа при лишении его свободы вращения вокруг оси *ОС*. Параметры гироскопа и условия его работы приведены в примере 7.

По формуле (80) определяем угловую скорость постоянной составляющей движения гироскопа вокруг оси подвеса:

$$\dot{\vartheta} = \frac{M_{0B}}{q_B J_B} = \frac{6}{1{,}16 \cdot 0{,}66} = 7{,}85 \text{ сек.}^{-1},$$

или

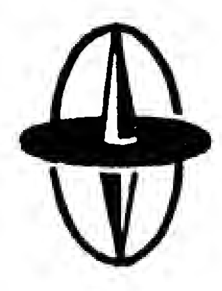
$$\dot{\vartheta} = 7{,}85 \cdot 57{,}3 = 448{,}8 \text{ град./сек.}$$

Из той же формулы (80) находим амплитуду вынужденных колебаний

$$\vartheta_a = \frac{M_{0B}}{q_B^2 J_B} = \frac{6}{1{,}16^2 \cdot 0{,}66} = 6{,}77 \text{ рад.},$$

или

$$\vartheta_a = 6{,}77 \cdot 57{,}3 = 377{,}9°.$$



Глава III

УТОЧНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

§ 19. ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТА ВНЕШНИХ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩЕГО НА ГИРОСКОП ОТНОСИТЕЛЬНО ЕГО ГЛАВНОЙ ОСИ, ПРИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ РОТОРА

Анализ уравнений движения гироскопа с тремя степенями свободы (см. гл. II) показывает, что систематический уход, или, как говорят, дрейф, гироскопа может иметь место лишь при действии момента внешней силы, не изменяющего своего знака в течение сравнительно продолжительного времени (см. § 15). Если действие момента внешней силы кратковременно (см. § 14) или периодически изменяется (см. § 17), то дрейф гироскопа отсутствует.

Однако на практике систематический дрейф гироскопа в кардановом подвесе, правда с весьма малой угловой скоростью, наблюдается и в тех случаях, когда на него действует момент как мгновенных, так и гармонически изменяющихся внешних сил. Такое несоответствие результатов анализа с действительным характером изучаемого движения объясняется пренебрежением малыми членами исходной системы уравнений (39), которая была заменена упрощенной системой (47). Между тем факторы, характеризуемые опущенными членами исследуемых уравнений, оказывают определенное влияние на движение гироскопа.

Обратимся к системе уравнений (39) и выделим из нее первое уравнение:

$$J\frac{d\Phi}{dt} - M_A = J\frac{d}{dt}(\dot{\psi}\sin\vartheta_0 + \vartheta\dot{\psi}\cos\vartheta_0). \qquad (81)$$

Это уравнение уже было исследовано в первом приближении (§ 12), когда его правая часть принималась равной нулю. В соответствии с таким допущением было получено равенство (45), показывающее, что момент M_A (см. рис. 30) при установившейся угловой скорости вращения ротора ($\dot{\Phi} = \Omega = \mathrm{const}$) равен нулю и крутящий момент M_D, развиваемый гиромотором, полностью затрачивается на преодоление момента M_s сил сопротивления. Между тем, любое движение гироскопа с тремя степенями свободы сопровождается нутационными колебаниями (гл. II). Поэтому в действительности правая часть уравнения (81) отлична от нуля.

Для выяснения влияния опускаемых ранее факторов подставим в правую часть уравнения (81) значения переменных ϑ и ψ, определяемые решением первого приближения при исследовании нутационных колебаний гироскопа. Переписав уравнение (81) в виде

$$M_A = M_D - M_s = J\frac{d\Phi}{dt} - J(\ddot{\psi}\sin\vartheta_0 + \dot{\vartheta}\dot{\psi}\cos\vartheta_0 + \vartheta\ddot{\psi}\cos\vartheta_0)$$

и подставив значения ϑ и ψ, определяемые по выражениям (59),

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= a\cos nt + b\sin nt - a; \\ \psi &= c\sin nt - d\cos nt + d, \end{aligned}\right\} \qquad (82)$$

где

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{J_C\dot{\psi}_{н}}{J\Omega\cos\vartheta_0}; \quad b = \frac{\sqrt{J_BJ_C}\,\dot{\vartheta}_{н}}{J\Omega\cos\vartheta_0}; \\ c &= \frac{\sqrt{J_BJ_C}\,\dot{\psi}_{н}}{J\Omega\cos\vartheta_0}; \quad d = \frac{J_B\dot{\vartheta}_{н}}{J\Omega\cos\vartheta_0}, \end{aligned}\right\} \qquad (83)$$

будем иметь

$$M_A = M_D - M_s = J\dot{\Phi} + Jn^2[(c\sin nt - d\cos nt)(\sin\vartheta_0 - a\cos\vartheta_0) + (ac - bd)\cos\vartheta_0\sin 2nt - (bc + ad)\cos\vartheta_0\cos 2nt],$$

или, учитывая равенства (53) и (83),

$$M_A = M_D - M_s = J\dot{\Phi} + J\cos\vartheta_0\left[(J\Omega\sin\vartheta_0 - J_C\dot{\psi}_{н})\left(\frac{\dot{\psi}_{н}}{\sqrt{J_BJ_C}}\sin nt - \frac{\dot{\vartheta}_{н}}{J_C}\cos nt\right) + \frac{J_C\dot{\psi}_{н}^2 - J_B\dot{\vartheta}_{н}^2}{\sqrt{J_BJ_C}}\sin 2nt - 2\dot{\vartheta}_{н}\dot{\psi}_{н}\cos 2nt\right].$$

После преобразований находим

$$M_A = M_D - M_s = J\dot{\Phi} + \frac{J\cos\vartheta_0}{\sqrt{J_BJ_C}}\left[(J\Omega\sin\vartheta_0 - J_C\dot{\psi}_{н})\sqrt{\dot{\psi}_{н}^2 + \frac{J_B}{J_C}\dot{\vartheta}_{н}^2}\sin(nt - \lambda_1) + (J_C\dot{\psi}_{н}^2 + J_B\dot{\vartheta}_{н}^2)\sin(2nt - \lambda_2)\right], \qquad (84)$$

где соответствующие смещения по фазе

$$\lambda_1 = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\frac{\dot{\vartheta}_{н}}{\dot{\psi}_{н}};$$

$$\lambda_2 = \operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt{J_BJ_C}\,\dot{\vartheta}_{н}\dot{\psi}_{н}}{J_C\dot{\psi}_{н}^2 - J_B\dot{\vartheta}_{н}^2}.$$

Из уравнения (84) видно, что нутационные колебания гироскопа порождают периодические изменения момента M_A внешних сил, действующего относительно его главной оси. Указанные изменения происходят по закону, характеризуемому кривой, образованной в результате сложения двух синусоид с периодами $2\frac{\pi}{n}$ и $\frac{\pi}{n}$. Такая суммарная кривая, как известно,[1] отлична от синусоиды, однако в рассматриваемом случае отличие это будет весьма незначительным.

В самом деле, нетрудно заметить, что первое слагаемое многочлена (84), заключенного в квадратные скобки, несоизмеримо велико по сравнению с его остальными членами. Опуская величины высших порядков малости, перепишем уравнение (84) в виде

$$M_A = M_D - M_s = J\ddot{\Phi} + $$
$$+ \frac{J\cos\vartheta_0}{\sqrt{J_B J_C}} J\Omega \sin\vartheta_0 \sqrt{\dot{\psi}_н^2 + \frac{J_B}{J_C}\dot{\vartheta}_н^2}\sin(nt - \lambda_1)$$

или, обозначая

$$\frac{J\cos\vartheta_0}{\sqrt{J_B J_C}} J\Omega \sin\vartheta_0 \sqrt{\dot{\psi}_н^2 + \frac{J_B}{J_C}\dot{\vartheta}_н^2} = M_{0A}, \qquad (85)$$

в виде

$$M_A = M_D - M_s = J\ddot{\Phi} + M_{0A}\sin(nt - \lambda_1), \qquad (86)$$

Незначительное изменение момента M_A вблизи от режима установившегося значения числа оборотов оказывает весьма малое влияние на изменение угловой скорости $\dot{\Phi}$ собственного вращения ротора (см. рис. 31). В то же время при установившемся режиме работы гироскопа период его нутационных колебаний (см. § 14) измеряется всего лишь тысячными долями секунды. Поэтому при таком кратковременном и незначительном по величине приращении момента M_A ротор гироскопа, обладающий огромным количеством запасенной кинетической энергии, за время одного полупериода нутационных колебаний практически не сможет изменить значения угловой скорости собственного вращения.

Таким образом, в рассматриваемом случае угловое ускорение $\ddot{\Phi}$ будет близким к нулю. При постоянной скорости собственного вращения момент сил сопротивления M_s будет также постоянным. На преодоление этого постоянного момента $M_s = M_{s\Omega} = \text{const}$ будет, как уже говорилось выше (см. § 12), затрачиваться вполне определенная часть $M_{D\Omega}$ крутящего момента M_D гиромотора, равная по величине и обратная по направлению $M_{s\Omega}$. Полагая,

[1] См.: С. П. Стрелков. Введение в теорию колебаний. ГИТТЛ, 1950, стр. 58.

что M_D состоит из постоянного значения $M_{D\Omega} = \text{const}$ и некоторого приращения ΔM_D, уравнение (86) можно переписать в виде

$$M_A = M_{D\Omega} + \Delta M_D - M_{s\Omega} = M_{0A} \sin(nt - \lambda_1),$$

или, учитывая равенство моментов $M_{D\Omega}$ и $M_{s\Omega}$,

$$M_A = \Delta M_D = M_{0A} \sin(nt - \lambda_1). \tag{87}$$

Выражение (87) показывает, что при установившемся режиме работы крутящий момент гиромотора непрерывно пульсирует. При этом приращение ΔM_D момента M_A осуществляется за счет соответствующего изменения количества энергии, подводимой к гиромотору извне.

Пример 9. Определить амплитуду изменений крутящего момента гиромотора, порождаемых нутационными колебаниями гироскопа. Параметры гироскопа $J = 0{,}73$ *Гсмсек*^{2}, $J_B = 0{,}62$ *Гсмсек*^{2}, $M_D = 18$ *Гсм*, $\Omega = 2500$ сек. В начальный момент оси OA и $O\xi_0$ (см. рис. 36) составляют угол $\vartheta_0 = 3°$, момент инерции гироскопа относительно его наружной оси подвеса $J_C = 1{,}86$ *Гсмсек*^{2}, а сообщенные ему угловые скорости $\dot\vartheta_н = 0{,}4$ град./сек., $\dot\psi_н = 0{,}5$ град./сек.

Вычислим значения $\dot\vartheta_н$ и $\dot\psi_н$ в радианах в секунду:

$$\dot\vartheta_н = \frac{0{,}4}{57{,}3} = 7{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}; \qquad \dot\psi_н = \frac{0{,}5}{57{,}3} = 8{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}.$$

Подставив затем в выражение (85) численные значения входящих в него величин, найдем амплитуду M_{0A} изменения момента M_A:

$$M_{0A} = \frac{J^2\Omega \sin 2\vartheta_0}{2J_C} \sqrt{\frac{J_C\dot\psi_н^2 + J_B\dot\vartheta_н^2}{J_B}} =$$

$$= \frac{0{,}73^2 \cdot 2500 \cdot 0{,}105}{2 \cdot 1{,}86} \sqrt{\frac{1{,}86 \cdot 8{,}7^2 \cdot 10^{-6} + 0{,}62 \cdot 7{,}0^2 \cdot 10^{-6}}{0{,}62}} = 0{,}62 \text{ Гсм}.$$

Полученное значение M_{0A} по отношению к крутящему моменту M_D гиромотора (при установившихся оборотах вращения его ротора) составляет

$$\frac{M_{0A}}{M_D} 100 = \frac{0{,}62}{18} 100 = 3{,}45\%.$$

§ 20. СИСТЕМАТИЧЕСКИЙ ДРЕЙФ, ВОЗНИКАЮЩИЙ ПРИ НУТАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ГИРОСКОПА

Так как при установившемся режиме работы гироскопа угловая скорость его собственного вращения практически не изменяется (см. § 19), то в уравнении (81) можно полагать

$$\frac{d}{dt}(\dot\Phi - \dot\psi \sin\vartheta_0 - \vartheta\dot\psi \cos\vartheta_0) = 0,$$

следовательно,

$$\dot\Phi - \dot\psi \sin\vartheta_0 - \vartheta\dot\psi \cos\vartheta_0 \approx \Omega = \text{const}. \tag{88}$$

Это условие позволяет выделить из системы (39) ее первое уравнение и рассматривать его самостоятельно (см. § 12), а оставшиеся два уравнения переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\psi}\cos\vartheta_0 = M_B + J\Omega\vartheta\dot{\psi}\sin\vartheta_0 - \\ - J_D\dot{\psi}^2(\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 + \vartheta\cos 2\vartheta_0); \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\dot{\vartheta}\cos\vartheta_0 = M_C + M_A(\sin\vartheta_0 + \vartheta\cos\vartheta_0) + \\ + 2J_D\vartheta\ddot{\psi}\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 - J\Omega\vartheta\dot{\vartheta}\sin\vartheta_0 + \\ + 2J_D\dot{\vartheta}\dot{\psi}(\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 + \vartheta\cos 2\vartheta_0). \end{aligned}\right\} \quad (89)$$

Уточняя результаты исследования движения гироскопа под действием моментов мгновенных сил, необходимо M_B и M_C в системе (89) принять равными нулю. Подставив в правые части уравнений вместо ϑ и ψ их приближенные значения (82), а вместо момента M_A его значение (87), будем иметь

$$J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\psi}\cos\vartheta_0 = J\Omega(a\cos nt + b\sin nt - a)\,n\,(c\cos nt +$$
$$+ d\sin nt)\sin\vartheta_0 - J_D n^2(c\cos nt + d\sin nt)^2[\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 +$$
$$+ (a\cos nt + b\sin nt - a)\cos 2\vartheta_0];$$

$$J_C\ddot{\psi} - J\Omega\dot{\vartheta}\cos\vartheta_0 = M_{0A}\sin nt\,[\sin\vartheta_0 + (a\cos nt + b\sin nt -$$
$$- a)\cos\vartheta_0] + 2J_D(a\cos nt + b\sin nt - a)\,n^2(-c\sin nt +$$
$$+ d\cos nt)\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 - J\Omega(a\cos nt + b\sin nt - a)\,n\,(-a\sin nt +$$
$$+ b\cos nt)\sin\vartheta_0 + 2J_D n^2(-a\sin nt + b\cos nt)(c\cos nt +$$
$$+ d\sin nt)[\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 + (a\cos nt + b\sin nt - a)\cos 2\vartheta_0].$$

Производя соответствующие перемножения и группируя члены, можем записать

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\psi}\cos\vartheta_0 = K_B\sin nt + L_B\cos nt + \\ + N_B\sin nt\cos nt + P_B\sin^2 nt + Q_B\cos^2 nt + \\ + R_B\sin^2 nt\cos nt + U_B\sin nt\cos^2 nt + \\ + V_B\sin^3 nt + W_B\cos^3 nt; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\dot{\vartheta}\cos\vartheta_0 = K_C\sin nt + L_C\cos nt + \\ + N_C\sin nt\cos nt + P_C\sin^2 nt + Q_C\cos^2 nt + \\ + R_C\sin^2 nt\cos nt + U_C\sin nt\cos^2 nt + \\ + V_C\sin^2 nt + W_C\cos^3 nt + E_C\cos 2nt. \end{aligned}\right\} \quad (90)$$

Постоянные коэффициенты уравнений (90) с учетом равенств (53) и (83) определяются следующими выражениями:

$$\left.\begin{aligned}
&K_B = -\sqrt{J_B J_C}\,\dot\vartheta_н\dot\psi_н\ \operatorname{tg}\vartheta_0; \qquad L_B = -J_C\dot\psi_н^2\operatorname{tg}\vartheta_0;\\
&N_B = 2\sqrt{J_B J_C}\,\dot\vartheta_н\dot\psi_н\left(\operatorname{tg}\vartheta_0 - \frac{J_D}{J_C}\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{J_D\dot\psi_н}{J\Omega\cos\vartheta_0}\cos 2\vartheta_0\right);\\
&P_B = J_B\dot\vartheta_н^2\left(\operatorname{tg}\vartheta_0 - \frac{J_D}{J_C}\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 + \frac{J_D\dot\psi_н}{J\Omega\cos\vartheta_0}\cos 2\vartheta_0\right);\\
&Q_B = J_C\dot\psi_н^2\left(\operatorname{tg}\vartheta_0 - \frac{J_D}{J_C}\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 + \frac{J_D\dot\psi_н}{J\Omega\cos\vartheta_0}\cos 2\vartheta_0\right);\\
&R_B = -\frac{3J_B J_D\dot\vartheta_н^2\dot\psi_н}{J\Omega\cos\vartheta_0}\cos 2\vartheta_0;\\
&U_B = -\frac{3\sqrt{J_B J_C}\,J_D\dot\vartheta_н\dot\psi_н^2}{J\Omega\cos\vartheta_0}\cos 2\vartheta_0;\\
&V_B = -\sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\,\frac{J_B J_D\dot\vartheta_н^3}{J\Omega\cos\vartheta_0}\cos 2\vartheta_0;\\
&W_B = \frac{J_C J_D\dot\psi_н^3}{J\Omega\cos\vartheta_0}\cos 2\vartheta_0;\\
&K_C = M_{0A}\sin\vartheta_0 - \frac{J_C M_{0A}\dot\psi_н}{J\Omega} - \sqrt{\frac{J_C}{J_B}}\,J_C\dot\psi_н^2\left(\operatorname{tg}\vartheta_0 - \right.\\
&\qquad \left. - 2\frac{J_D}{J_C}\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0\right);\\
&L_C = J_C\dot\vartheta_н\dot\psi_н\left(\operatorname{tg}\vartheta_0 - 2\frac{J_D}{J_C}\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0\right);\\
&N_C = \frac{J_C M_{0A}\dot\psi_н}{J\Omega} - J_C\frac{J_B\dot\vartheta_н^2 - J_C\dot\psi_н^2}{\sqrt{J_B J_C}}\left(\operatorname{tg}\vartheta_0 - \right.\\
&\qquad \left. - 4\frac{J_D}{J_C}\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0\right);\\
&P_C = \frac{\sqrt{J_B J_C}\,M_{0A}\dot\vartheta_н}{J\Omega} + 2J_D\frac{J_C\dot\vartheta_н\dot\psi_н^2}{J\Omega\cos\vartheta_0}\cos 2\vartheta_0;\\
&Q_C = -2J_D\frac{J_C\dot\vartheta_н\dot\psi_н^2}{J\Omega\cos\vartheta_0}\cos 2\vartheta_0;\\
&R_C = -2J_D\frac{\dot\vartheta_н(2J_C\dot\psi_н^2 - J_B\dot\vartheta_н^2)}{J\Omega\cos\vartheta_0}\cos 2\vartheta_0;\\
&U_C = 2J_D\sqrt{\frac{J_C}{J_B}}\,\frac{\dot\psi_н(2J_B\dot\vartheta_н^2 - J_C\dot\psi_н^2)}{J\Omega\cos\vartheta_0}\cos 2\vartheta_0;
\end{aligned}\right\} \qquad (91)$$

$$\left.\begin{aligned}
V_C &= -2J_D \frac{\sqrt{J_B J_C}\,\dot\vartheta_н^2 \dot\psi_н}{J\Omega \cos\vartheta_0} \cos 2\vartheta_0;\\
W_C &= 2J_D \frac{J_C \dot\vartheta_н \dot\psi_н^2}{J\Omega \cos\vartheta_0} \cos 2\vartheta_0;\\
E_C &= -J_C \dot\vartheta_н \dot\psi_н \left(\operatorname{tg}\vartheta_0 - 4\frac{J_D}{J_C}\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0\right).
\end{aligned}\right\}$$

Пользуясь формулами тригонометрических преобразований

$$\left.\begin{aligned}
\sin nt \cos nt &= \frac{1}{2}\sin 2nt;\\
\sin^2 nt &= \frac{1}{2}(1-\cos 2nt);\\
\cos^2 nt &= \frac{1}{2}(1+\cos 2nt);\\
\sin^3 nt &= \frac{1}{4}(3\sin nt - \sin 3nt);\\
\cos^3 nt &= \frac{1}{4}(3\cos nt + \cos 3nt);\\
\sin^2 nt \cos nt &= \cos nt - \cos^3 nt = \frac{1}{4}(\cos nt - \cos 3nt);\\
\sin nt \cos^2 nt &= \sin nt - \sin^3 nt = \frac{1}{4}(\sin nt + \sin 3nt),
\end{aligned}\right\} \quad (92)$$

перепишем систему уравнений (90) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
J_B\ddot\vartheta + J\Omega\dot\psi\cos\vartheta_0 &= \frac{1}{2}(P_B + Q_B) + \left(K_B + \frac{1}{4}U_B + \right.\\
&\left. + \frac{3}{4}V_B\right)\sin nt + \left(L_B + \frac{1}{4}R_B + \frac{3}{4}W_B\right)\cos nt + \\
&+ \frac{1}{2}N_B \sin 2nt + \frac{1}{2}(P_B - Q_B)\cos 2nt + \\
&+ \frac{1}{4}(U_B - V_B)\sin 3nt - \frac{1}{4}(R_B - W_B)\cos 3nt;\\
J_C\ddot\psi - J\Omega\dot\vartheta\cos\vartheta_0 &= \frac{1}{2}(P_C + Q_C) + \left(K_C + \frac{1}{4}U_C + \right.\\
&\left. + \frac{3}{4}V_C\right)\sin nt + \left(L_C + \frac{1}{4}R_C + \frac{3}{4}W_C\right)\cos nt + \\
&+ \frac{1}{2}N_C \sin 2nt + \frac{1}{2}(Q_C - P_C + E_C)\cos 2nt + \\
&+ \frac{1}{4}(U_C - V_C)\sin 3nt - \frac{1}{4}(R_C - W_C)\cos 3nt.
\end{aligned}\right\} \quad (93)$$

Уравнения (93) представляют систему двух неоднородных дифференциальных уравнений. В их правых частях содержатся

как постоянные, так и тригонометрические члены. Поэтому, согласно изложенному в § 15 и 17, частные решения исследуемой системы уравнений будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_r &= A_0 t + A_1 \cos nt + A_2 \sin nt + A_3 \cos 2nt + \\ &+ A_4 \sin 2nt + A_5 \cos 3nt + A_6 \sin 3nt; \\ \psi_r &= B_0 t + B_1 \cos nt + B_2 \sin nt + B_3 \cos 2nt + \\ &+ B_4 \sin 2nt + B_5 \cos 3nt + B_6 \sin 3nt. \end{aligned}\right\} \quad (94)$$

Величины A_i и B_i могут быть определены из равенств между коэффициентами при соответствующих членах правых и левых частей уравнений (93). Для этого в левые части (93) вместо $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$, $\ddot{\vartheta}$ и $\ddot{\psi}$ должны быть подставлены их значения, вытекающие из (94). Заметим, что гироскоп в рассматриваемом случае совершает нутационные колебания не только с частотой n, как это следовало из анализа его движения в первом приближении (см. § 14). Уравнения (93) показывают, что гироскоп в кардановом подвесе совершает нутационные колебания с основной частотой n и кратными ей частотами $2n$ и $3n$ и при этом систематически поворачивается вокруг своих осей подвеса.

Угловая скорость систематического дрейфа будет определяться постоянными составляющими правых частей уравнений (93). Поэтому, опуская все тригонометрические члены правых частей указанных уравнений и приравнивая угловые ускорения $\ddot{\vartheta}$ и $\ddot{\psi}$ нулю, находим выражения для угловых скоростей дрейфа:

$$\dot{\psi}_д = \frac{P_B + Q_B}{2J\Omega \cos \vartheta_0}; \quad \dot{\vartheta}_д = -\frac{P_C + Q_C}{2J\Omega \cos \vartheta_0},$$

или, подставляя в полученные зависимости значения P_B, Q_B, P_C и Q_C, определяемые по формулам (91),

$$\dot{\psi}_д = \frac{J_B \dot{\vartheta}_н^2 + J_C \dot{\psi}_н^2}{2J\Omega \cos \vartheta_0} \left(\operatorname{tg} \vartheta_0 - \frac{J_D}{J_C} \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 + \frac{J_D \dot{\psi}_н}{J\,\Omega \cos \vartheta_0} \cos 2\vartheta_0 \right);$$

$$\dot{\vartheta}_д = -\frac{\sqrt{J_B J_C} M_{0\,A} \dot{\vartheta}_н}{2J^2\Omega^2 \cos \vartheta_0}.$$

Производя дальнейшие преобразования и учитывая зависимости (38) и (85), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi}_д &= \frac{J_B \dot{\vartheta}_н^2 + J_C \dot{\psi}_н^2}{2J\Omega \cos \vartheta_0} \left(\frac{J_н + J_{вx}}{J_C \cos \vartheta_0} \sin \vartheta_0 + \frac{J_D \dot{\psi}_н}{J\Omega \cos \vartheta_0} \cos 2\vartheta_0 \right); \\ \dot{\vartheta}_д &= -\frac{\sqrt{J_B \dot{\vartheta}_н^2 + J_C \dot{\psi}_н^2}}{2J\Omega \cos \vartheta_0} \cdot \frac{J \dot{\vartheta}_н \sin 2\vartheta_0}{2\sqrt{J_C}}. \end{aligned}\right\} \quad (95)$$

Анализируя выражения (95), нетрудно заметить, что вторая составляющая угловой скорости $\dot\psi_д$ и угловая скорость $\dot\vartheta_д$ представляют собой величины второго порядка малости по сравнению с первой составляющей угловой скорости $\dot\psi_д$ дрейфа гироскопа вокруг его наружной оси подвеса. Поэтому при определении угловых скоростей дрейфа гироскопа, обусловленного его нутационными колебаниями, можно с достаточной для практики степенью точности пользоваться приближенными выражениями

$$\left.\begin{aligned} \dot\psi_д &\approx \frac{J_B\dot\vartheta_н^2 + J_C\,\dot\psi_н^2}{2J\Omega\cos\vartheta_0}\cdot\frac{J_н + J_{вx}}{J_C\cos\vartheta_0}\sin\vartheta_0;\\ \dot\vartheta_д &\approx 0. \end{aligned}\right\} \qquad (96)$$

Впервые вопрос о систематическом дрейфе гироскопа, обусловливаемом инерцией колец карданова подвеса, был рассмотрен К. Магнусом [49], а также Б. Плаймелем и Р. Гудштейном [51]. Его дальнейшему развитию посвящены работы Д. С. Пельпора [34], С. С. Тихменева [41], Я. Л. Лунца [22] и др.

Пример 10. Определить угловые скорости систематического дрейфа гироскопа в кардановом подвесе, обусловливаемого нутационными колебаниями. Параметры гироскопа: $J\Omega = 2800$ *Гсмсек*, $J = 0{,}8$ *Гсмсек*^{2}, $J_B = 0{,}7$ *Гсмсек*^{2}, $J_н = 4{,}9$ *Гсмсек*^{2}, $J_{вx} = 0{,}3$ *Гсмсек*^{2}, $J_D = 0{,}4$ *Гсмсек*^{2}. В начальный момент оси OA и $O\xi_0$ (см. рис. 36) составляют угол $\vartheta_0 = 5°$, момент инерции гироскопа относительно его наружной оси подвеса $J_C = 5{,}7$ *Гсмсек*^{2}, а сообщенные ему угловые скорости $\dot\vartheta_н = 4$ град./сек., $\dot\psi_н = 5$ град./сек.

Вычислим значение начальных угловых скоростей в радианах в секунду:

$$\dot\vartheta_н = \frac{4}{57{,}3} = 0{,}07\ \text{сек.}^{-1};$$

$$\dot\psi_н = \frac{5}{57{,}3} = 0{,}09\ \text{сек.}^{-1}.$$

Подставив в формулы (95) численные значения входящих в них величин, найдем:

$$\dot\psi_д = \frac{J_B\dot\vartheta_н^2 + J_C\,\dot\psi_н^2}{2J\Omega\cos\vartheta_0}\left(\frac{J_н + J_{вx}}{J_C\cos\vartheta_0}\sin\vartheta_0 + \frac{J_D\dot\psi_н}{J\Omega\cos\vartheta_0}\cos 2\vartheta_0\right) =$$

$$= \frac{0{,}7\cdot 0{,}07^2 + 5{,}7\cdot 0{,}09^2}{2\cdot 2800\cdot\cos 5°}\left(\frac{4{,}9+0{,}3}{5{,}7\cos 5°}\sin 5° + \frac{0{,}4\cdot 0{,}09}{2800\cos 5°}\cos 10°\right) =$$

$$= 7{,}3\cdot 10^{-7} + 1{,}2\cdot 10^{-10} \approx 7{,}3\cdot 10^{-7}\ \text{сек.}^{-1};$$

$$\dot\vartheta_д = -\frac{\sqrt{J_B\dot\vartheta_н^2 + J_C\dot\psi_н^2}}{2J\Omega\cos\vartheta_0}\cdot\frac{J\dot\vartheta_н\sin 2\vartheta_0}{2\sqrt{J_C}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{0{,}7\cdot 0{,}07^2 + 5{,}7\cdot 0{,}09^2}}{2\cdot 2800\cdot\cos 5°}\cdot\frac{0{,}8\cdot 0{,}07\cdot\sin 10°}{2\sqrt{5{,}7}} = -8{,}24\cdot 10^{-8}\ \text{сек.}^{-1},$$

или соответственно

$$\dot\psi_д = 7{,}3\cdot 10^{-7}\cdot 57{,}3\cdot 60\cdot 60 = 0{,}15\ \text{град./час.};$$

$$\dot\vartheta_д = -8{,}24\cdot 10^{-8}\cdot 57{,}3\cdot 60\cdot 60 = -0{,}017\ \text{град./час}.$$

§ 21. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЧИНЫ, ОБУСЛОВЛИВАЮЩИЕ СИСТЕМАТИЧЕСКИЙ ДРЕЙФ ГИРОСКОПА В РЕЗУЛЬТАТЕ ЕГО НУТАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Систематический дрейф гироскопа в кардановом подвесе, возникающий в процессе нутационных колебаний последнего, имеет простое физическое объяснение. Представим гироскоп в кардановом подвесе с тремя степенями свободы (рис. 42), наружная ось подвеса OC которого совмещена с осью $O\zeta_0$ неподвижной

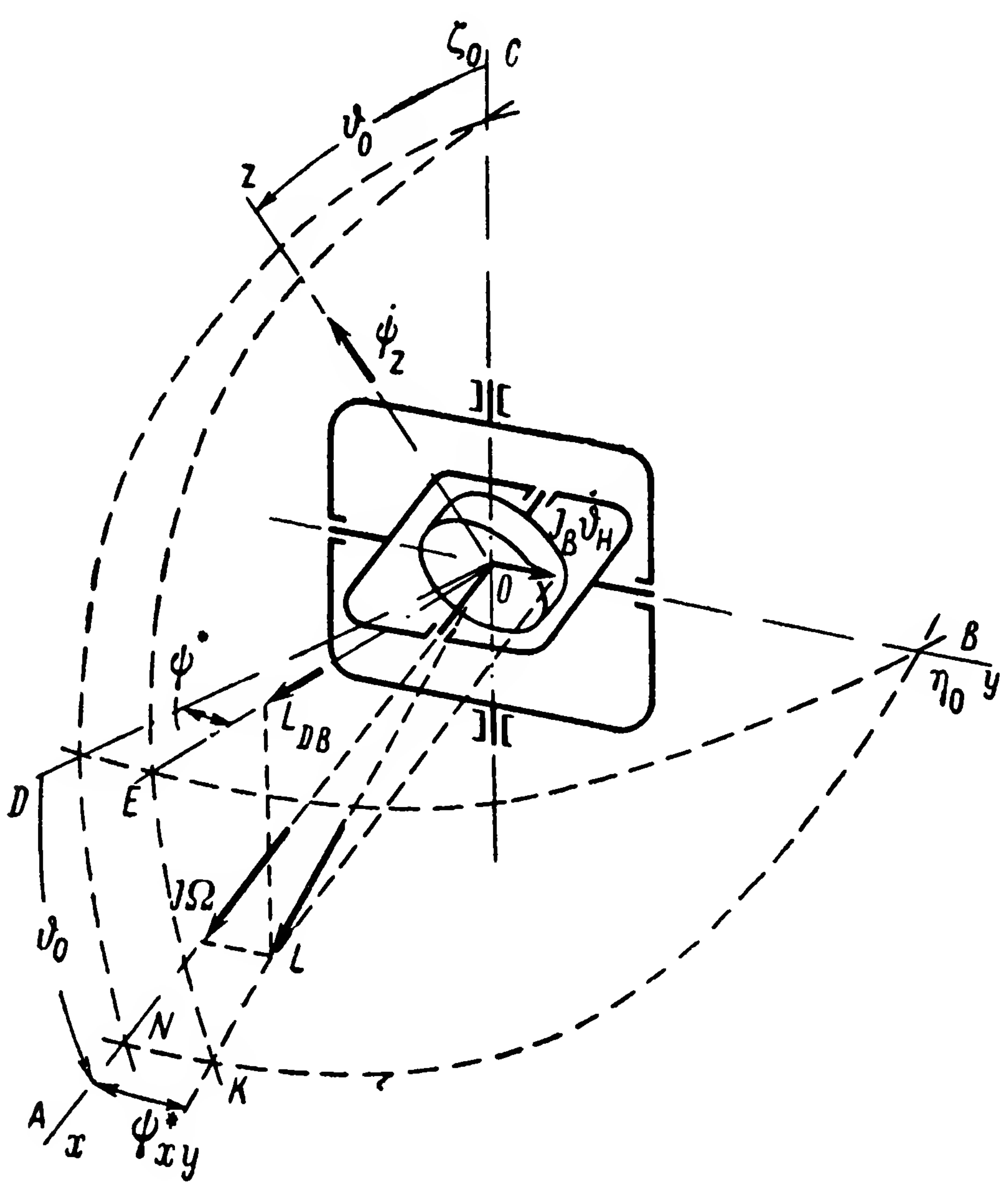


Рис. 42. Проекция вектора $\bar{L}$ на плоскость DOB.

системы координат $O\xi_0\eta_0\zeta_0$. В начальный момент времени главная ось гироскопа, вокруг которой его ротор вращается с угловой скоростью Ω, составляет с плоскостью $\xi_0 O\eta_0$ угол ϑ_0. Предположим, что в это мгновение в результате удара гироскопу была сообщена дополнительная скорость вращения вокруг оси, не совпадающей с главной. Для простоты условимся полагать, что дополнительная угловая скорость $\dot{\vartheta}_н$ сообщена вокруг внутренней оси подвеса OB.

Главный момент количества движения L гироскопической системы будет определяться в этом случае суммой двух составляющих — момента количества движения $J\bar{\Omega}$ ротора гироскопа относительно оси Ox и момента количества движения $J_B\bar{\dot{\vartheta}}_н$ ротора и внутреннего карданова кольца относительно оси Oy:

$$\bar{L} = J\bar{\Omega} + J_B\bar{\dot{\vartheta}}_н.$$

Вектор $\bar{L}$ главного момента количества движения гироскопической системы, равный по модулю

$$L = \sqrt{J^2\Omega^2 + J_B^2\dot{\vartheta}_н^2}, \qquad (97)$$

составляет с осью Ox в плоскости xOy (рис. 42) угол

$$\psi_{xy}^* = \operatorname{arc\,tg} \frac{J_B\dot{\vartheta}_н}{J\Omega},$$

или вследствие его малости

$$\psi_{xy}^* = \frac{J_B\dot{\vartheta}_н}{J\Omega}. \qquad (98)$$

Как только ротору, вращающемуся с угловой скоростью Ω вокруг оси Ox, будет сообщена угловая скорость $\dot{\vartheta}_н$ вокруг оси Oy, так сразу же вследствие инертности его массы он начнет двигаться вокруг оси Oz с угловой скоростью $\dot{\psi}_z$ (см. § 8, рис. 22). Однако при наличии карданова подвеса поворот ротора вокруг оси Oz возможен лишь при вращении гироскопической системы вокруг наружной оси подвеса OC. При этом между угловыми скоростями $\dot{\psi}_z$ и $\dot{\psi}$ указанных поворотов (рис. 43) будет существовать зависимость

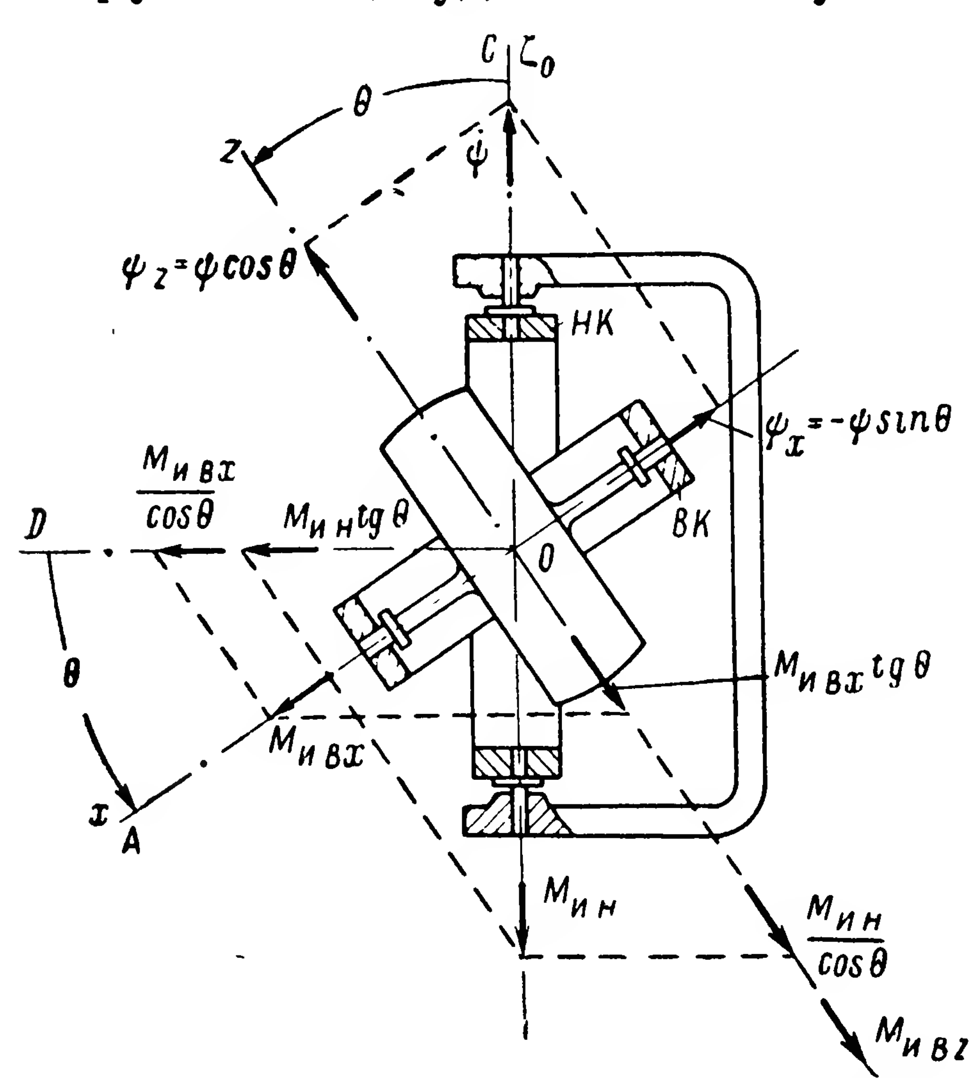


Рис. 43. Векторы моментов сил инерции, порождаемые массами кардановых колец.

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\cos\Theta}\dot{\psi}_z,$$

где Θ — текущее значение угла, составляемого главной осью OA гироскопа с перпендикуляром OD к плоскости наружного карданова кольца $НК$.

Таким образом, ротор, поворачивающийся вокруг оси Oz, будет вращать вокруг оси OC оба кардановых кольца $НК$ и $ВК$. При этом наружное кольцо $НК$ будет поворачиваться непосредственно вокруг оси OC с угловой скоростью $\dot{\psi}$. Поворот внутреннего кольца $ВК$ вокруг оси OC при наличии угла Θ будет слагаться из двух движений: вокруг оси Oz с угловой скоростью $\dot{\psi}_z = \dot{\psi}\cos\Theta$ и вокруг оси Ox с угловой скоростью $\dot{\psi}_x = -\dot{\psi}\sin\Theta$.

Вполне очевидно, что инерция масс кардановых колец, принудительно вращаемых вокруг осей OC, Ox и Oz, будет оказывать

сопротивление тому естественному повороту ротора вокруг оси Oz, который возникает в результате проявления гироскопического эффекта у быстро вращающихся тел. Значения моментов $M_{и.\,н}$, $M_{и.\,в\,x}$ и $M_{и.\,в\,z}$ сил инерции масс наружного $НК$ и внутреннего $ВК$ колец подвеса, действующих относительно осей OC, Ox и Oz, согласно основному закону динамики определятся следующими выражениями:

$$M_{и.\,н} = -J_{н} \frac{d\dot{\psi}}{dt} = -J_{н}\ddot{\psi};$$

$$M_{и.\,в\,x} = -J_{в\,x} \frac{d}{dt}(-\dot{\psi}\sin\Theta) = J_{в\,x}(\ddot{\psi}\sin\Theta + \dot{\psi}\dot{\Theta}\cos\Theta);$$

$$M_{и.\,в\,z} = -J_{вz} \frac{d}{dt}\dot{\psi}\cos\Theta = -J_{в\,z}(\ddot{\psi}\cos\Theta - \dot{\psi}\dot{\Theta}\sin\Theta),$$

где $J_{н}$, $J_{вx}$ и $J_{вz}$ — моменты инерции наружного кольца относительно оси OC и внутреннего — относительно осей Ox и Oz.

Проектируя векторы моментов $M_{и.\,н}$, $M_{и.\,в\,x}$ и $M_{и.\,в\,z}$ на ось Oz и перпендикуляр OD, определим суммарные значения моментов $M_{и\,z}$ и $M_{и\,D}$ сил инерции масс кардановых колец, действующих относительно осей Oz и OD:

$$M_{и\,z} = -\frac{M_{и.\,н}}{\cos\Theta} - M_{и.\,в\,x}\operatorname{tg}\Theta - M_{и.\,в\,z} =$$

$$= -\frac{J_{н} + J_{в\,x}\sin^2\Theta + J_{в\,z}\cos^2\Theta}{\cos\Theta}\ddot{\psi} + (J_{в\,z} - J_{в\,x})\dot{\psi}\dot{\Theta}\sin\Theta; \qquad (99)$$

$$M_{и\,D} = M_{и.\,н}\operatorname{tg}\Theta + \frac{M_{и.\,в\,x}}{\cos\Theta} = (J_{н} + J_{в\,x})\ddot{\psi}\operatorname{tg}\Theta + J_{в\,x}\dot{\psi}\dot{\Theta}.$$

Моменты сил инерции $M_{и\,z}$ и $M_{и\,D}$ будут по-разному влиять на движение гироскопической системы. Так, момент $M_{и\,z}$ будет оказывать влияние лишь на частоту и амплитуду нутационных колебаний гироскопа. Момент $M_{и\,D}$, кроме того, будет создавать нагрузку F (рис. 44), действующую на опоры, расположенные по наружной оси OC подвеса гироскопа. В свою очередь силы R реакции опор, действуя на гироскоп, создадут относительно оси OD момент M_{RD}, равный по величине, но обратный по направлению моменту $M_{и\,D}$.

Момент M_{RD} опорных реакций, определяемый в соответствии с выражением (99) равенством

$$M_{RD} = -M_{и\,D} = -(J_{н} + J_{в\,x})\ddot{\psi}\operatorname{tg}\Theta - J_{в\,x}\dot{\psi}\dot{\Theta}, \qquad (100)$$

является для гироскопа моментом внешних сил; следовательно, он будет вызывать прецессию гироскопа (см. § 8).

Для определения угловой скорости $\dot{\psi}$ прецессии гироскопа вокруг оси OC, порождаемой моментом M_{RD}, спроектируем век-

тор $\bar{L}$ главного момента количества движения (рис. 42) на плоскость DOB. С этой целью вычислим предварительно угол KOE между осями OK и OE. Согласно формуле (30) для сферического треугольника KNC можем записать

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \angle KOE\right) = \cos\psi^*_{xy}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta_0\right) + $$
$$+ \sin\psi^*_{xy}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta_0\right)\cos\frac{\pi}{2}$$

или

$$\sin\angle KOE = \cos\psi^*_{xy}\sin\vartheta_0.$$

Так как угол ψ^*_{xy} весьма мал (см. § 14), то его косинус практически будет равен единице, в соответствии с чем

$$\sin\angle KOE \approx \sin\vartheta_0$$

и, следовательно,

$$\angle KOE \approx \vartheta_0.$$

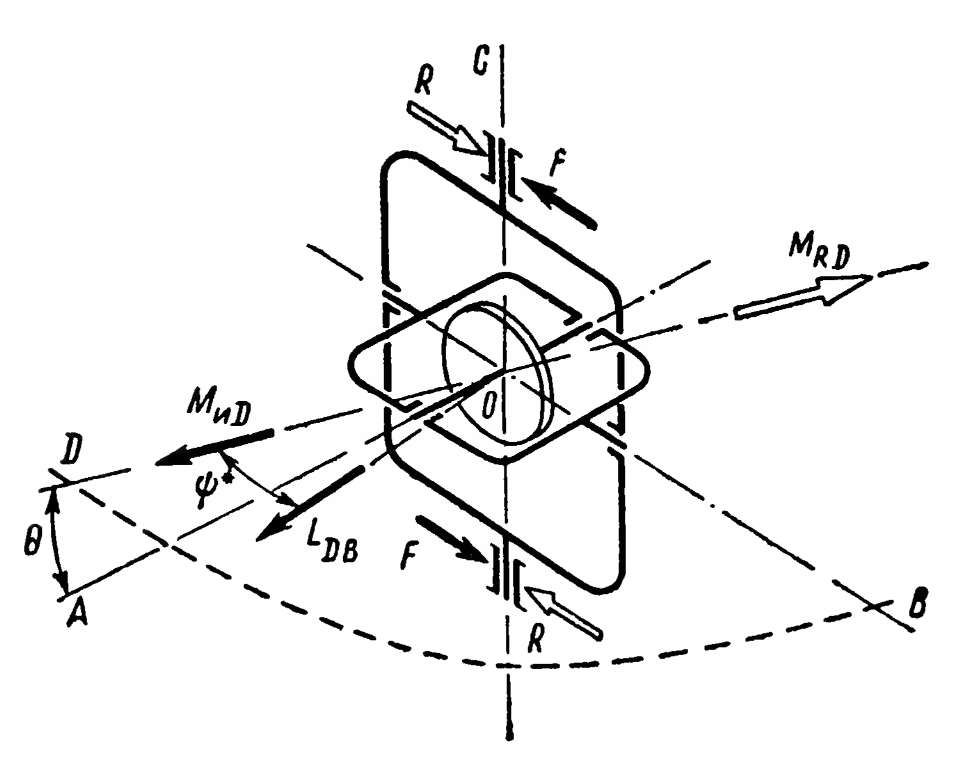


Рис. 44. Схема действия момента опорных реакций на гироскоп.

Таким образом, проекция L_{DB} вектора $\bar{L}$ на плоскость DOB, если учесть равенство (97), определится выражением

$$L_{DB} = L\cos\vartheta_0 =$$
$$= \sqrt{J^2\Omega^2 + J_B^2\dot{\vartheta}_н^2}\cos\vartheta_0.$$

Пренебрегая слагаемым $J_B^2\dot{\vartheta}_н^2$ как величиной высшего порядка малости по сравнению с $J^2\Omega^2$, с достаточной степенью точности можем считать

$$L_{DB} = J\Omega\cos\vartheta_0. \qquad (101)$$

Вектор $\bar{L}_{DB}$ (рис. 42) составляет с осью OD в плоскости DOB угол ψ^*. Для определения величины этого угла воспользуемся теоремой синусов, согласно которой для сферических треугольников CED и CKN

$$\sin\angle DOE\cdot\sin\angle EDC = \sin\angle DCE\cdot\sin\angle DOC;$$
$$\sin\angle NOK\cdot\sin\angle KNC = \sin\angle DCE\cdot\sin\angle NOC.$$

Деля полученные равенства одно на другое и учитывая значения входящих в них величин, имеем

$$\frac{\sin\psi^*}{\sin\psi^*_{xy}} = \frac{1}{\cos\vartheta_0}.$$

При малости углов ψ^* и ψ^*_{xy}

$$\psi^* = \psi^*_{xy} \frac{1}{\cos \vartheta_0}. \tag{102}$$

Векторы $\overline{M}_{RD}$ и $\overline{L}_{DB}$ лежат в одной плоскости DOB (рис. 45) под углом $(\pi - \psi^*)$ друг к другу. Поэтому, спроектировав M_{RD} на два взаимно-перпендикулярных направления OW и OP, совмещенных с той же плоскостью DOB, получим

$$M_{RW} = -M_{RD} \cos \psi^*; \quad M_{RP} = M_{RD} \sin \psi^*.$$

Составляющая M_{RW} обусловит уменьшение суммарного момента количества движения гироскопа. В связи с тем, что величина M_{RW} весьма мала, этим уменьшением практически можно пренебречь.

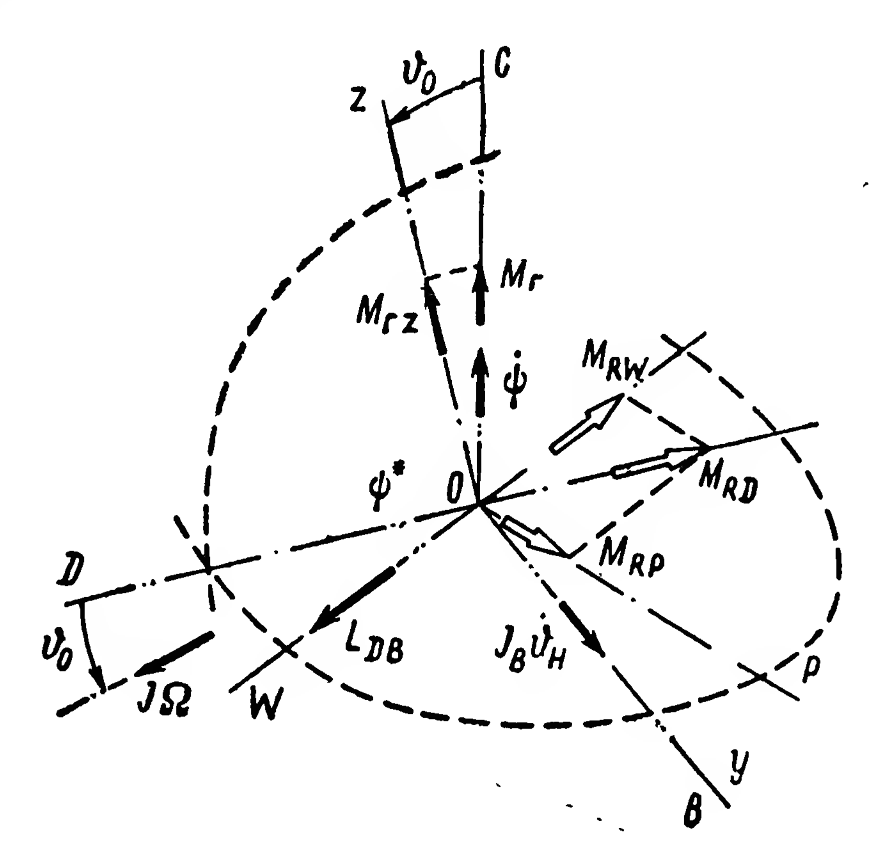


Рис. 45. Соссавляющие момента опорных реакций.

Под действием составляющей M_{RP} вектор $\overline{L}_{DB}$, а следовательно, и гироскоп получают вращение вокруг оси OC. Согласно основному закону прецессии (см. § 8) угловая скорость такого поворота будет положительна и равна

$$\dot\psi = \frac{M_{RP}}{L_{DB}} = \frac{M_{RD} \sin \psi^*}{L_{DB}},$$

или, учитывая малость угла ψ^*,

$$\dot\psi = \frac{M_{RD}\psi^*}{L_{DB}}.$$

Подставив в полученную формулу значения (100), (101) и (102), будем иметь

$$\dot\psi = \frac{(J_{н} + J_{в\,x})\,\ddot\psi \operatorname{tg}\Theta + J_{в\,x}\dot\psi\dot\Theta}{J\Omega \cos \vartheta_0} \cdot \frac{\psi^*_{xy}}{\cos \vartheta_0}.$$

Так как слагаемое $J_{в\,x}\dot\psi\dot\Theta$ является величиной второго порядка малости по сравнению с $(J_{н} + J_{в\,x})\,\ddot\psi \operatorname{tg}\Theta$, то, опуская его и заменяя величину ψ^*_{xy} ее значением (98), перепишем последнее выражение:

$$\dot\psi = \frac{J_{н} + J_{в\,x}}{J\Omega \cos \vartheta_0} \ddot\psi \operatorname{tg}\Theta \frac{J_B\dot\vartheta_{н}}{J\Omega \cos \vartheta_0}. \tag{103}$$

В формуле (103) величины $\ddot\psi$ и $\operatorname{tg}\Theta$ меняются с течением времени, обусловливая тем самым переменный характер угловой скорости $\dot\psi$ вращения гироскопа вокруг его наружной оси подвеса. Чтобы определить среднее значение $\dot\psi_{ср}$, которое и будет предста-

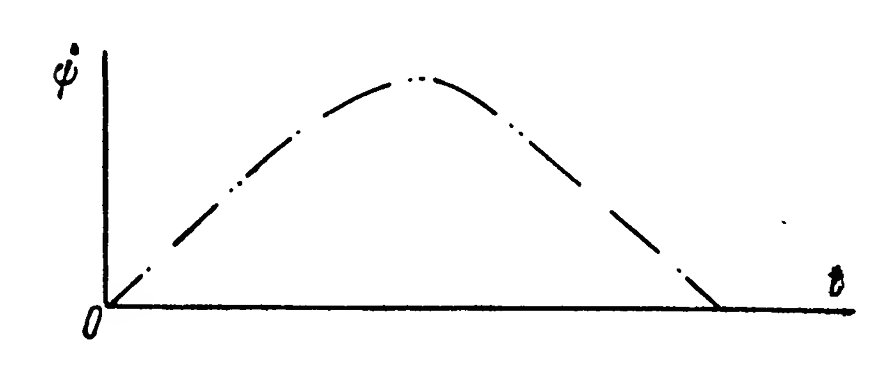
влять собой угловую скорость $\dot{\psi}_д$ систематического дрейфа гироскопа, необходимо вычислить средние значения $\ddot{\psi}_{ср}$ и $\operatorname{tg}\Theta_{ср}$. В соответствии с равенствами (37) при малом угле ϑ имеем

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta} = \frac{\sin(\vartheta_0+\vartheta)}{\cos(\vartheta_0+\vartheta)} = \frac{\sin\vartheta_0+\vartheta\cos\vartheta_0}{\cos\vartheta_0-\vartheta\sin\vartheta_0}.$$

Пренебрегая, как и выше, членами второго порядка малости, получаем выражение

$$\operatorname{tg}\Theta_{ср} = \frac{\sin\vartheta_0}{\cos\vartheta_0}.$$

Среднее значение углового ускорения $\ddot{\psi}_{ср}$ может быть определено из следующих соображений. В начальный момент времени, когда гироскопу, обладающему относительно оси Ox кинетическим моментом $J\Omega$ (рис. 42), сообщается скорость $\dot{\vartheta}_н$ вращения вокруг оси OB, возникает момент гироскопической реакции $M_{гz}$ (рис. 45), действующий относительно оси Oz (см. § 6 и 7). В первое мгновение согласно формуле (29) $M_{гz} = J\Omega\dot{\vartheta}_н$.



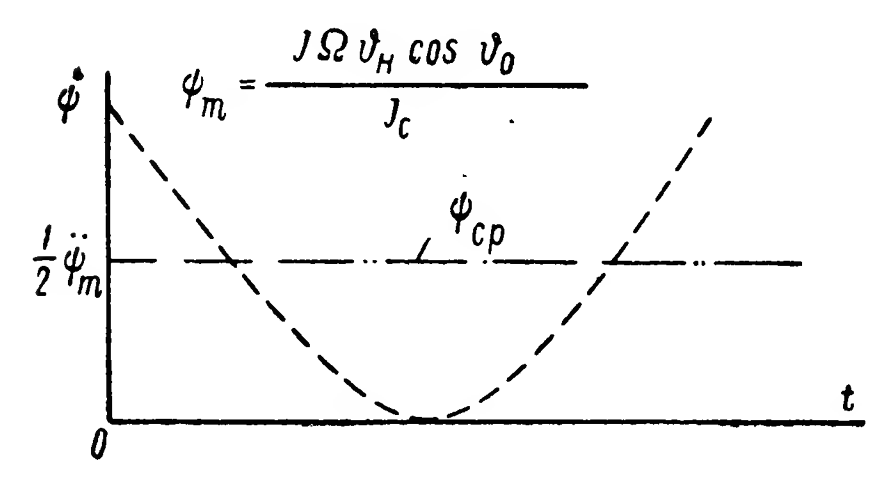


Рис. 46. К приближенному определению среднего значения $\ddot{\psi}$:

С течением времени угловая скорость вращения гироскопа вокруг внутренней оси подвеса начнет уменьшаться, обусловливая тем самым соответствующее уменьшение момента гироскопической реакции. При этом в процессе нутационных колебаний момент гироскопической реакции уравновешивается моментами сил инерции массы гироскопа, вынужденного вращаться вокруг оси, не совпадающей с главной. В рассматриваемом случае это движение происходит вокруг оси OC. Поэтому, спроектировав в начальный момент времени вектор $\overline{M}_{гz}$ на ось OC и приравняв его моменту сил инерции

$$M_г = M_{гz}\cos\vartheta_0 = J_C\ddot{\psi}_m,$$

найдем максимальное значение углового ускорения:

$$\ddot{\psi}_m = \frac{J\Omega\dot{\vartheta}_н\cos\vartheta_0}{J_C}.$$

Выше было показано (§ 8, рис. 24), что под действием внешнего момента относительно внутренней оси подвеса гироскопа угловая скорость $\dot{\psi}$ его поворота вокруг наружной оси подвеса изменяется от нуля до некоторого максимума и затем опять уменьшается до

нуля (рис. 46). При этом условии угловое ускорение $\ddot{\psi}$ будет изменяться от максимального значения $\ddot{\psi}_m$ до нуля, а затем снова возрастать до своего максимума. Таким образом, из анализа графиков, приведенных на рис. 46, следует, что среднее значение $\ddot{\psi}_{ср}$ углового ускорения будет определяться выражением

$$\ddot{\psi}_{ср} \approx \frac{\ddot{\psi}_m}{2} \approx \frac{J\Omega\dot{\vartheta}_н \cos\vartheta_0}{2J_C}.$$

Подставив значения $\ddot{\psi}_{ср}$ и $\operatorname{tg}\Theta_{ср}$ в выражение (103), определим угловую скорость систематического дрейфа гироскопа:

$$\dot{\psi}_д = \frac{J_B\dot{\vartheta}_н^2}{2J\Omega\cos\vartheta_0}\cdot\frac{J_н + J_{в\,x}}{J_C\cos\vartheta_0}\sin\vartheta_0. \qquad (104)$$

Как видим, формула (104) совпадает с найденным выше выражением (96) для $\dot{\psi}_д$ при условии $\dot{\psi}_н = 0$.

§ 22. СИСТЕМАТИЧЕСКИЙ ДРЕЙФ ГИРОСКОПА, ПОРОЖДАЕМЫЙ ЕГО КОЛЕБАНИЯМИ

Анализируя выражения (96), нетрудно заметить, что угловая скорость $\dot{\psi}_д$ систематического дрейфа гироскопа находится в прямой зависимости от амплитуды изменения угловой скорости его колебаний вокруг наружной оси подвеса. Переписывая (96) в несколько измененной форме

$$\dot{\psi}_д = \frac{J_н + J_{в\,x}}{2J\Omega\cos\vartheta_0}\operatorname{tg}\vartheta_0\,\frac{J_B\dot{\vartheta}_н^2 + J_C\dot{\psi}_н^2}{J_C}, \qquad (105)$$

видим, что множитель

$$\frac{J_B\dot{\vartheta}_н^2 + J_C\dot{\psi}_н^2}{J_C} \qquad (106)$$

представляет квадрат амплитуды угловой скорости нутационных колебаний гироскопа вокруг его наружной оси.

Из (59) и (53) следует, что

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}_н\cos nt + \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\,\dot{\vartheta}_н\sin nt.$$

Обозначая в полученной формуле

$$\dot{\psi}_н = \dot{\psi}_a\cos\lambda; \quad \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\,\dot{\vartheta}_н = \dot{\psi}_a\sin\lambda,$$

можем переписать ее в более наглядном виде:

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}_a\cos(nt - \lambda).$$

В последнем выражении амплитуда $\dot{\psi}_a$ определяется зависимостью

$$\dot{\psi}_a = \sqrt{\dot{\psi}_н^2 + \left(\sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\,\dot{\vartheta}_н\right)^2} = \sqrt{\frac{J_C\dot{\psi}_н^2 + J_B\,\dot{\vartheta}_н^2}{J_C}}, \qquad (107)$$

которая и подтверждает равенство множителя (106) квадрату амплитуды $\dot{\psi}_a$.

Таким образом, заменяя в выражении (105) множитель (106) его значением (107), можем записать

$$\dot{\psi}_д = \frac{J_н + J_{в\,x}}{2J\Omega\cos\vartheta_0}\,\dot{\psi}_a^2 \operatorname{tg}\vartheta_0, \qquad (108)$$

откуда следует, что отклонение главной оси гироскопа от заданного направления в пространстве может возникать при любых колебаниях гироскопа вокруг его наружной оси подвеса.

Действительно, систематический дрейф гироскопа вокруг его наружной оси, вызываемый моментом опорных реакций, характерен не только для нутационных колебаний. С подобным явлением приходится встречаться во всех тех случаях, когда имеют место колебания гироскопической системы.

Пользуясь описанным в § 20 методом, представляется возможным подробно исследовать характер движения гироскопа в каждом конкретном случае [30]. Значение угловой скорости $\dot{\psi}_д$ возникающего при этом систематического дрейфа может быть вычислено с точностью принятых выше допущений непосредственно по формуле (108). Для этого из решения первого приближения необходимо определить лишь амплитуду $\dot{\psi}_a$ угловой скорости колебаний гироскопа вокруг его наружной оси. Так, например, при исследовании движения гироскопа под влиянием постоянного момента внешней силы (§ 15) было установлено, что гироскопическая система, прецессируя с постоянными угловыми скоростями вокруг осей подвеса, совершает еще и нутационные колебания. Амплитуда угловой скорости этих колебаний вокруг наружной оси подвеса может быть определена непосредственно из (65). Опуская в выражении для ψ последний член, характеризующий прецессионное движение, после дифференцирования с учетом (53) находим

$$\dot{\psi} = \frac{M_B}{J\Omega\cos\vartheta_0}\cos nt + \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\,\frac{M_C}{J\Omega\cos\vartheta_0}\sin nt,$$

откуда следует

$$\dot{\psi}_a = \sqrt{\frac{J_C M_B^2 + J_B M_C^2}{J_C\,(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}}.$$

Подставив квадрат амплитуды $\dot{\psi}_a$ в формулу (108), определим угловую скорость дрейфа гироскопа

$$\dot{\psi}_д = \frac{J_н + J_{вx}}{2J\Omega \cos \vartheta_0} \cdot \frac{J_C M_B^2 + J_B M_C^2}{J_C (J\Omega \cos \vartheta_0)^2} \operatorname{tg} \vartheta_0, \tag{109}$$

которая характеризует дополнительное отклонение главной оси гироскопа от заданного направления в пространстве.

При исследовании движения гироскопа под действием момента внешней силы, изменяющейся по гармоническому закону (§ 17), были найдены выражения (78), характеризующие в первом приближении его вынужденные колебания. Дифференцируя второе из указанных выражений, находим угловую скорость вынужденных колебаний гироскопа вокруг наружной оси подвеса и ее амплитудное значение:

$$\dot{\psi} = \frac{M_{0B}}{J\Omega \cos \vartheta_0} \sin q_B t;$$

$$\dot{\psi}_a = \frac{M_{0B}}{J\Omega \cos \vartheta_0}.$$

Подставив в выражение (108) значение $\dot{\psi}_a^2$, найдем величину угловой скорости систематического дрейфа гироскопа, обусловленного его вынужденными колебаниями:

$$\dot{\psi}_д = \frac{J_н + J_{вx}}{2J\Omega \cos \vartheta_0} \cdot \frac{M_{0B}^2}{(J\Omega \cos \vartheta_0)^2} \operatorname{tg} \vartheta_0. \tag{110}$$

Угловая скорость $\dot{\psi}_д$ прецизионных гироскопических приборов индикаторного типа весьма мала, что позволяет во многих практических случаях ею пренебречь без какого-либо ущерба для точности решения навигационных задач. Но при определении погрешностей прецизионных гироскопических устройств, предназначенных для непрерывной работы в течение многих часов, приходится учитывать тот факт, что общая ошибка прибора складывается из целого ряда таких малых отклонений. Вызванные рассмотренными причинами угловые скорости дрейфа в таких устройствах, где гироскоп непосредственно стабилизирует какой-либо объект, могут достигать значений, соизмеримых с требуемой от прибора точностью.

Часто гироскопические приборы, предназначенные для выдерживания заданного направления, используются и как непосредственные стабилизаторы управляющих механизмов, фотоаппаратов, прицельных устройств и других агрегатов. Примерами такого использования гироскопа может служить стабилизатор курса морской торпеды [4, стр. 102; 8, стр. 248] или курсовой гироскоп автопилота «С-1» [26, стр. 449; 3, стр. 506]. Естественно, что в этих условиях гироскоп испытывает значительные пере-

менные внешние возмущения, вызывающие угловые скорости систематического дрейфа, соизмеримые с требуемой от гироскопического прибора точностью, тем более, что в этих условиях угол ϑ_0 отклонения главной оси гироскопа от перпендикуляра OD к плоскости его наружного карданова кольца может достигать нескольких градусов.

Пример 11. Определить угловую скорость системетического дрейфа гироскопа при действии относительно его внутренней оси момента внешней силы, изменяющегося по гармоническому закону, с амплитудой $M_{0B} = 7{,}0$ *Гсм*. Параметры гироскопа: $J\Omega = 1550$ *Гсмсек*, $J_н = 10{,}2$ *Гсмсек*^{2}, $J_{вх} = 3{,}2$ *Гсмсек*^{2}. В начальный момент оси OA и $O\xi_0$ (см. рис. 36) составляют угол $\vartheta_0 = 15°$.

Подставив в формулу (110) значения входящих в нее величин, найдем

$$\dot{\psi}_д = \frac{J_н + J_{вх}}{2J\Omega\cos\vartheta_0}\cdot\frac{M_{0B}^2}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}\operatorname{tg}\vartheta_0 =$$

$$= \frac{10{,}2 + 3{,}2}{2\cdot 1550\cdot\cos 15°}\cdot\frac{7{,}0^2}{(1550\cos 15°)^2}\operatorname{tg} 15° = 0{,}262\cdot 10^{-6}\ \text{сек.}^{-1}$$

или соответственно

$$\dot{\psi}_д = 0{,}262\cdot 10^{-6}\cdot 57{,}3\cdot 60\cdot 60 = 0{,}005\ \text{град/час.}$$

§ 23. ДВИЖЕНИЕ ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ ДО ДОСТИЖЕНИЯ ЕГО РОТОРОМ ПОСТОЯННОЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ СОБСТВЕННОГО ВРАЩЕНИЯ

До тех пор пока отсутствует собственное вращение гироскопа, его главная ось OA (см. рис. 35) может занимать в системе координат $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ произвольное положение. Поэтому в тот момент, когда на гиромотор будет подано питание, главная ось OA гироскопа может составить с осью OD наружного карданова кольца (рис. 47) угол ϑ_0, отличный от нуля. Как и любой другой двигатель, гиромотор в первое мгновение создает крутящий момент M_D, по величине несколько превышающий свое номинальное значение. Момент M_s сил сопротивления вследствие малости угловой скорости $\dot{\Phi}$ вращения ротора будет обусловливаться (см. рис. 31) лишь силами трения в опорах главной оси. Разница между моментами M_D и M_s быстро уменьшается (см. § 12), однако в течение всего периода разгона ротора M_D больше M_s, и, следовательно, суммарный момент M_A, определяемый из равенства (44), больше нуля.

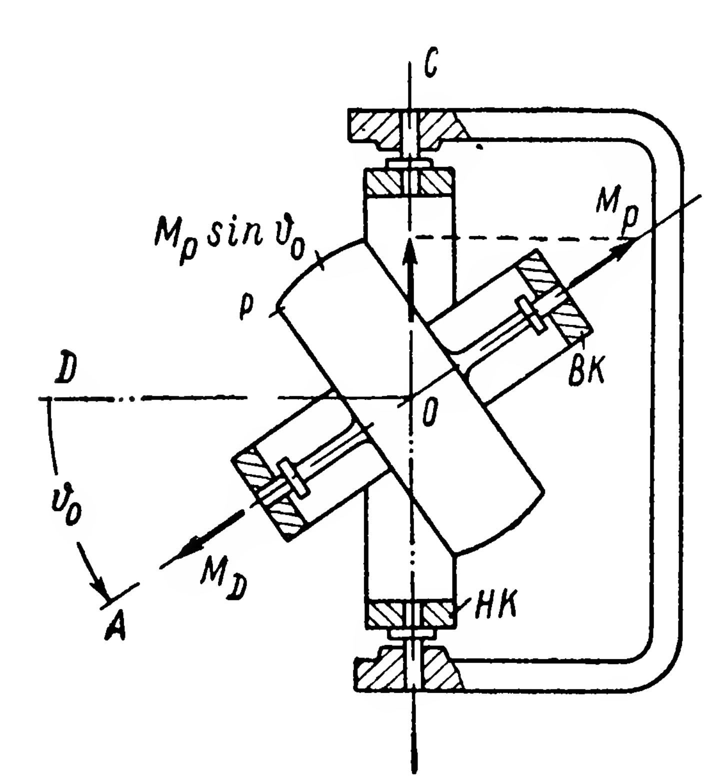


Рис. 47. Схема действия момента реакции статора гиромотора на гироскопическую систему.

Это обстоятельство уже не позволяет воспользоваться уравнениями (47) для изучения движения гироскопа во время разгона его ротора. Поэтому приходится вновь обращаться к системе (42), учитывая, что в рассматриваемом случае угловая скорость $\dot{\Phi}$ собственного вращения ротора и момент M_A внешних сил, действующий на гироскоп относительно его главной оси (см. рис. 31), изменяются с течением времени. Если не учитывать момента $M_{тA}$ сил трения в опорах главной оси, эти изменения по аналогии с изложенным в § 12 могут быть выражены приближенными зависимостями

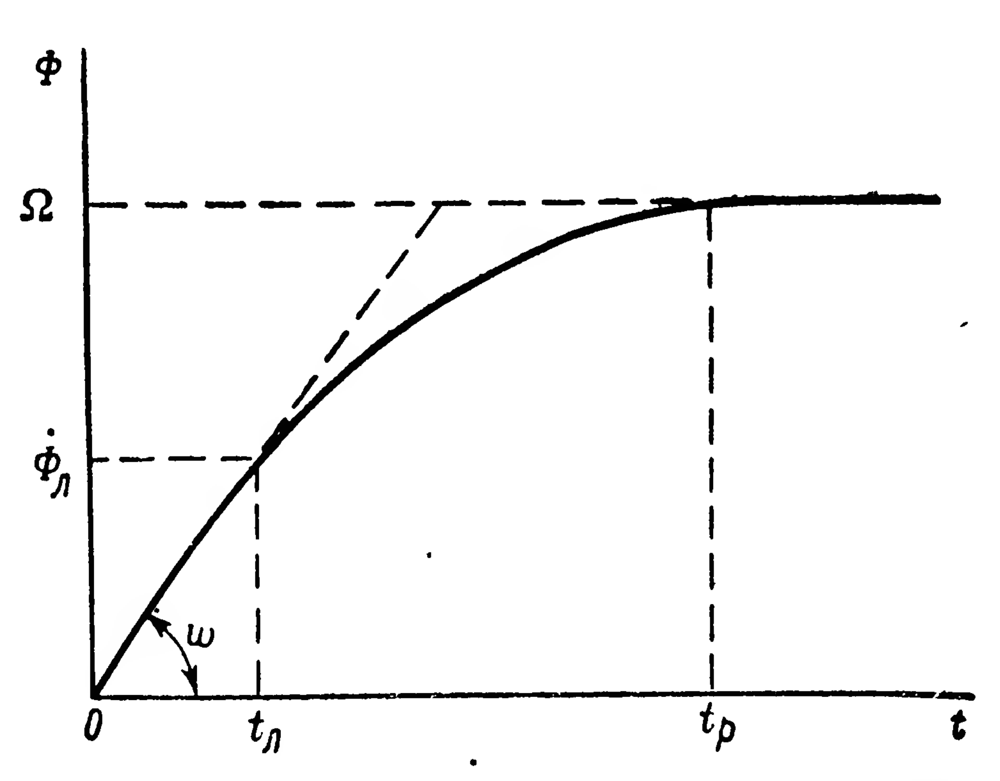


Рис. 48. К определению начального ускорения при разгоне ротора.

$$\dot{\Phi} = k\Omega;$$

$$M_A = M_D (1 - k). \quad (111)$$

Здесь коэффициент k изменяется от нуля до единицы. Первое его значение соответствует начальному моменту времени $t = 0$, второе — моменту $t = t_р$, в который угловая скорость собственного вращения $\dot{\Phi} = \Omega = \text{const}$.

Подставляя зависимости (111) в систему (42) и полагая для упрощения моменты M_B и M_C равными нулю, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + Jk\Omega\dot{\psi}\cos\vartheta_0 &= 0; \\ J_C\ddot{\psi} - Jk\Omega\dot{\vartheta}\cos\vartheta_0 &= M_D (1 - k)(\sin\vartheta_0 + \vartheta\cos\vartheta_0). \end{aligned}\right\} \quad (112)$$

Как показывает опыт (рис. 48), разгон ротора в начальный период происходит равноускоренно, в соответствии с чем

$$\dot{\Phi} = wt, \quad (113)$$

где w — угловое ускорение ротора в начальный период разгона.

Приравнивая правые части первого выражения (111) и равенства (113), находим значение коэффициента k:

$$k = \frac{w}{\Omega} t. \quad (114)$$

Подставив его в (112), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + Jwt\dot{\psi}\cos\vartheta_0 &= 0; \\ J_C\ddot{\psi} - Jwt\dot{\vartheta}\cos\vartheta_0 &= M_D\left(1 - \frac{w}{\Omega} t\right)(\sin\vartheta_0 + \vartheta\cos\vartheta_0). \end{aligned}\right\} \quad (115)$$

Существующие методы математического анализа не позволяют решить неоднородную систему дифференциальных уравнений (115) с переменными коэффициентами в общем виде. Поэтому для выяснения характера движения гироскопа в период разгона его ротора приходится обращаться к приближенным методам исследования. Разобьем с этой целью время $t_л$ равномерно ускоренного вращения ротора (рис. 49) на равные промежутки продолжительностью Δt. Условимся, что в течение каждого такого промежутка времени Δt угловая скорость ротора $\dot{\Phi}$ и момент внешних сил M_A практически сохраняют свои значения постоянными. Принятое допущение позволяет зафиксировать определенные моменты времени $\tau_1 = \frac{1}{2}\Delta t$, $\tau_2 = \tau_1 + \Delta t$, $\tau_3 = \tau_2 + \Delta t$ и т. д., для которых могут быть вычислены значения коэффициентов уравнений (115). Поэтому система (115) может быть переписана для каждого промежутка времени как система двух дифференциальных уравнений теперь уже с постоянными коэффициентами

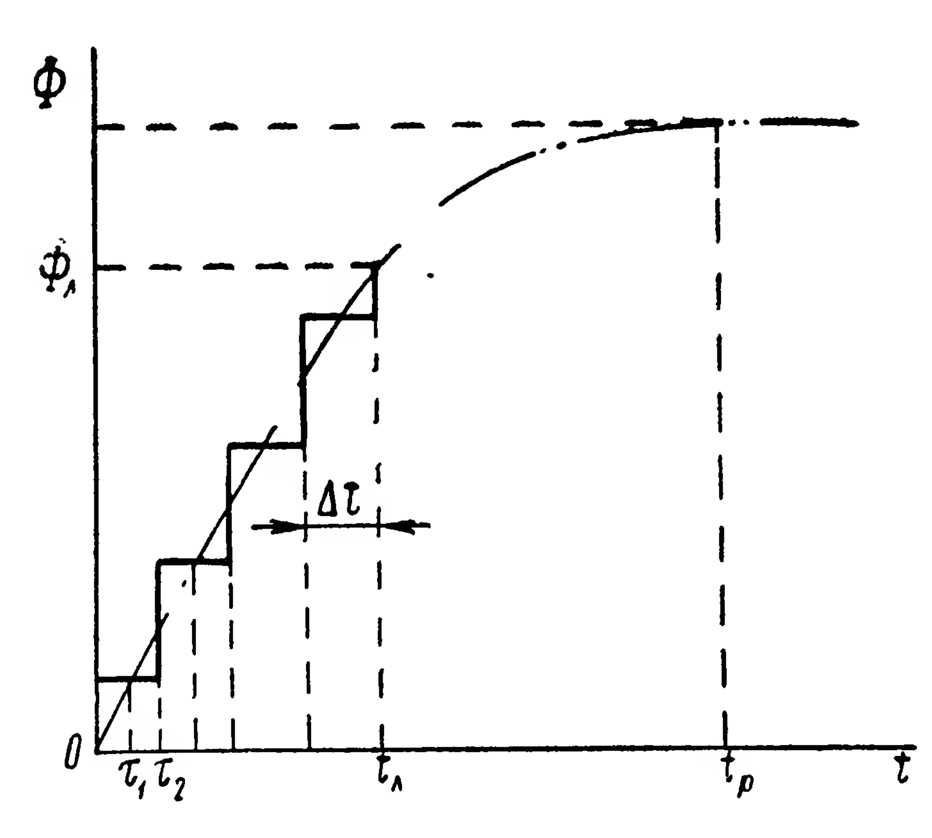


Рис. 49. График изменения средних скоростей вращения ротора на отдельных участках в период разгона.

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\omega\tau_j\dot{\psi}\cos\vartheta_{0j} &= 0; \\ J_{Cj}\ddot{\psi} - J\omega\tau_j\dot{\vartheta}\cos\vartheta_{0j} &= M_D\left(1 - \frac{\omega}{\Omega}\tau_j\right)(\sin\vartheta_{0j} + \vartheta\cos\vartheta_{0j}), \end{aligned}\right\} \quad (116)$$

где индекс j характеризует порядковое число рассматриваемого промежутка времени Δt.

При $\vartheta_{0j} \neq 0$ слагаемое $\sin\vartheta_{0j} \gg \vartheta\cos\vartheta_{0j}$. Поэтому, опуская в системе (116) малую величину $\vartheta\cos\vartheta_{0j}$, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\omega\tau_j\dot{\psi}\cos\vartheta_{0j} &= 0; \\ J_{Cj}\ddot{\psi} - J\omega\tau_j\dot{\vartheta}\cos\vartheta_{0j} &= M_D\left(1 - \frac{\omega}{\Omega}\tau_j\right)\sin\vartheta_{0j}. \end{aligned}\right\} \quad (117)$$

Частное решение системы (117) определяется вытекающим из ее второго уравнения равенством

$$\dot{\vartheta}_r = -\frac{M_D\left(1 - \frac{\omega}{\Omega}\tau_j\right)}{J\omega\tau_j}\operatorname{tg}\vartheta_{0j},$$

из которого находим

$$\vartheta_r = -\frac{M_D\left(1-\frac{w}{\Omega}\tau_j\right)\operatorname{tg}\vartheta_{0j}}{Jw\tau_j}t. \qquad (118)$$

Решение системы однородных дифференциальных уравнений

$$J_B\ddot{\vartheta} + Jw\tau_j\dot{\psi}\cos\vartheta_{0j} = 0,$$
$$J_{Cj}\ddot{\psi} - Jw\tau_j\dot{\vartheta}\cos\vartheta_{0j} = 0,$$

соответствующей (117), по аналогии с решением (57) системы (50) будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_p &= C_1\cos n_jt + C_2\sin n_jt + C_3;\\ \psi_p &= \sqrt{\frac{J_B}{J_{Cj}}}(C_1\sin n_jt - C_2\cos n_jt) + C_4,\end{aligned}\right\} \qquad (119)$$

где

$$n_j = \frac{Jw\tau_j\cos\vartheta_{0j}}{\sqrt{J_BJ_{Cj}}}. \qquad (120)$$

Таким образом, общее решение системы уравнений (117), являющееся суммой решений (119) и (118), определится выражениями

$$\left.\begin{aligned}\vartheta &= C_1\cos n_jt + C_2\sin n_jt + C_3 - \frac{M_D\left(1-\frac{w}{\Omega}\tau_j\right)\operatorname{tg}\vartheta_{0j}}{Jw\tau_j}t;\\ \psi &= \sqrt{\frac{J_B}{J_{Cj}}}(C_1\sin n_jt - C_2\cos n_jt) + C_4.\end{aligned}\right\} \qquad (121)$$

Постоянные интегрирования, входящие в (121), зависят от начальных условий каждого рассматриваемого промежутка времени Δt_j. Для первого промежутка Δt_1 в начальный момент и углы и угловые скорости поворота гироскопа равны нулю:

$$\vartheta(0) = 0;\ \psi(0) = 0;\ \dot{\vartheta}(0) = 0;\ \dot{\psi}(0) = 0.$$

При этих начальных условиях из выражений (121) и их первых производных следует

$$\vartheta(0) = C_1 + C_3 = 0;$$

$$\psi(0) = -\sqrt{\frac{J_B}{J_{C0}}}C_2 + C_4 = 0;$$

$$\dot{\vartheta}(0) = n_1C_2 - \frac{M_D\left(1-\frac{w}{\Omega}\tau_1\right)\operatorname{tg}\vartheta_0}{Jw\tau_1} = 0;$$

$$\dot{\psi}(0) = \sqrt{\frac{J_B}{J_{C0}}}n_1C_1 = 0.$$

Совместное решение полученных зависимостей позволяет найти, учитывая (120), постоянные интегрирования для первого промежутка времени Δt_1:

$$C_1 = 0;\ C_2 = \frac{\sqrt{J_B J_{C0}} M_D \left(1 - \frac{w}{\Omega}\tau_1\right)\sin\vartheta_0}{(Jw\tau_1\cos\vartheta_0)^2};$$

$$C_3 = 0; \quad C_4 = \frac{J_B M_D\left(1 - \frac{w}{\Omega}\tau_1\right)\sin\vartheta_0}{(Jw\tau_1\cos\vartheta_0)^2}.$$

Подставляя найденные значения постоянных интегрирования в равенства (121) и учитывая, что в первые мгновения $\frac{w}{\Omega}\tau_1 \ll 1$, находим зависимости изменений углов ϑ и ψ во времени в первый промежуток Δt_1 рассматриваемого движения гироскопа:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= \frac{\sqrt{J_B J_{C0}} M_D \sin\vartheta_0}{(Jw\tau_1\cos\vartheta_0)^2}\sin n_1 t - \frac{M_D\sin\vartheta_0}{Jw\tau_1\cos\vartheta_0}t; \\ \psi &= -\frac{J_B M_D\sin\vartheta_0}{(Jw\tau_1\cos\vartheta_0)^2}\cos n_1 t + \frac{J_B M_D\sin\vartheta_0}{(Jw\tau_1\cos\vartheta_0)^2}. \end{aligned}\right\} \quad (122)$$

Из зависимостей (122) следует, что с первого же мгновения гироскоп начинает поворачиваться вокруг наружной оси подвеса OC со значительным ускорением. Действительно, дважды дифференцируя второе равенство (122), находим ускорение

$$\ddot{\psi} = \frac{M_D\sin\vartheta_0}{J_{C0}}\cos n_1 t,$$

величина которого в начальный момент времени, при $t = 0$, определяется значением

$$\ddot{\psi}(0) = \frac{M_D\sin\vartheta_0}{J_{C0}}.$$

Момент $M_D\sin\vartheta_0$, порождающий ускорение $\ddot{\psi}(0)$, обусловливается реакцией статора гиромотора. Крутящий момент гиромотора M_D, действующий относительно оси OA (рис. 47), передается с внутреннего карданова кольца BK на ротор P. В свою очередь ротор P действует на кольцо BK моментом $M_р$ реакции статора, равным по величине, но обратным по направлению крутящему моменту M_D. Если оси OA и OD расположены под углом ϑ_0, то момент $M_р$ будет давать составляющую $M_р\sin\vartheta_0$, действующую относительно оси OC. Именно эта составляющая, равная по величине $M_D\sin\vartheta_0$, и порождает ускорение $\ddot{\psi}(0)$ в начальное мгновение.

В процессе возникшего движения гироскопа его полюс будет перемещаться на картинной плоскости вокруг точки N_1 (рис. 50), удаленной от оси ординат $O^*\vartheta$ на величину угла ψ^*, определяемого последним членом второго равенства (122):

$$\psi^* = \frac{J_B M_D \sin\vartheta_0}{(J\omega\tau_1 \cos\vartheta_0)^2}. \tag{123}$$

При этом сама точка N_1 будет двигаться вдоль оси ординат $O^*\vartheta$ с отрицательной угловой скоростью

$$\dot\vartheta = -\frac{M_D \sin\vartheta_0}{J\omega\tau_1 \cos\vartheta_0}, \tag{124}$$

определяемой коэффициентом при t первого равенства (122).

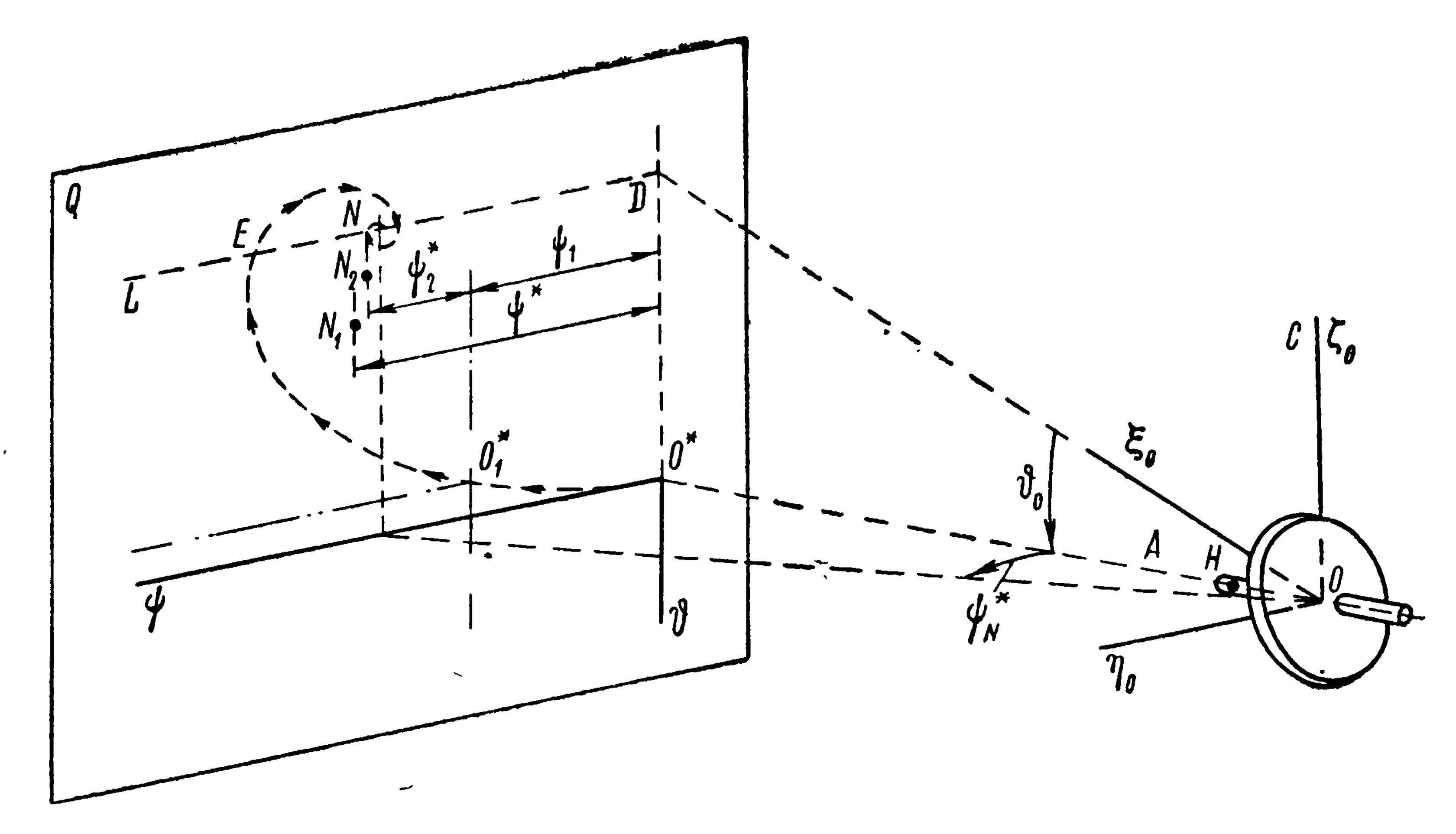


Рис. 50. Траектория перемещения полюса гироскопа при разгоне ротора.

В результате описанного движения главная ось гироскопа к концу первого промежутка времени Δt_1 повернется вокруг точки подвеса на углы ϑ_1 и ψ_1, согласно (122) равные

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1 &= \frac{\sqrt{J_B J_{C0}} M_D \sin\vartheta_0}{(J\omega\tau_1 \cos\vartheta_0)^2} \sin n_1 \Delta t - \frac{M_D \sin\vartheta_0}{J\omega\tau_1 \cos\vartheta_0} \Delta t; \\ \psi_1 &= \frac{J_B M_D \sin\vartheta_0}{(J\omega\tau_1 \cos\vartheta_0)^2} (1 - \cos n_1 \Delta t). \end{aligned}\right\} \tag{125}$$

К этому же моменту времени $t = \Delta t$ угловые скорости $\dot\vartheta$ и $\dot\psi$ гироскопа, учитывая (120), достигнут значений

$$\left.\begin{aligned} \dot\vartheta_1 &= -\frac{M_D \sin\vartheta_0}{J\omega\tau_1 \cos\vartheta_0} (1 - \cos n_1 \Delta t); \\ \dot\psi_1 &= \sqrt{\frac{J_B}{J_{C0}}} \frac{M_D \sin\vartheta_0}{J\omega\tau_1 \cos\vartheta_0} \sin n_1 \Delta t. \end{aligned}\right\} \tag{126}$$

Рассмотрим теперь движение гироскопа во второй промежуток времени Δt_2. Перенесем с этой целью начало координатной системы $O^*\vartheta\psi$ в точку O_1^*, с которой совместился полюс гироскопа на картинной плоскости в момент времени $t = \Delta t$. Начальные условия движения гироскопа во втором промежутке времени Δt_2 будут характеризоваться равенствами

$$\vartheta(0) = 0;\ \psi(0) = 0;\ \dot\vartheta(0) = \dot\vartheta_1;\ \dot\psi(0) = \dot\psi_1,$$

в соответствии с которыми из выражений (121) и их первых производных вытекают зависимости:

$$\vartheta(0) = C_1 + C_3 = 0;$$

$$\psi(0) = -\sqrt{\frac{J_B}{J_{C1}}}C_2 + C_4 = 0;$$

$$\dot\vartheta(0) = n_2C_2 - \frac{M_D\left(1 - \frac{w}{\Omega}\tau_2\right)\operatorname{tg}\vartheta_{01}}{Jw\tau_2} = \dot\vartheta_1;$$

$$\dot\psi(0) = \sqrt{\frac{J_B}{J_{C1}}}n_2C_1 = \dot\psi_1.$$

Решая совместно полученные уравнения и учитывая равенства (120) и (126), находим значения постоянных интегрирования:

$$C_1 = \sqrt{\frac{J_{C1}}{J_{C0}}}\cdot\frac{\sqrt{J_BJ_{C1}}M_D\sin\vartheta_0}{(Jw)^2\tau_1\tau_2\cos\vartheta_0\cos\vartheta_{01}}\sin n_1\Delta t;$$

$$C_2 = \frac{\sqrt{J_BJ_{C1}}M_D}{Jw\tau_2\cos\vartheta_{01}}\left[\frac{\sin\vartheta_0}{Jw\tau_1\cos\vartheta_0}\cos n_1\Delta t + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\sin\vartheta_{01}}{Jw\tau_2\cos\vartheta_{01}} - \frac{\sin\vartheta_0}{Jw\tau_1\cos\vartheta_0}\right) - \frac{\sin\vartheta_{01}}{J\Omega\cos\vartheta_{01}}\right];$$

$$C_3 = -\sqrt{\frac{J_{C1}}{J_{C0}}}\cdot\frac{\sqrt{J_BJ_{C1}}M_D\sin\vartheta_0}{(Jw)^2\tau_1\tau_2\cos\vartheta_0\cos\vartheta_{01}}\sin n_1\Delta t;$$

$$C_4 = \frac{J_BM_D}{Jw\tau_2\cos\vartheta_{01}}\left[\frac{\sin\vartheta_0}{Jw\tau_1\cos\vartheta_0}\cos n_1\Delta t + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\sin\vartheta_{01}}{Jw\tau_2\cos\vartheta_{01}} - \frac{\sin\vartheta_0}{Jw\tau_1\cos\vartheta_0}\right) - \frac{\sin\vartheta_{01}}{J\Omega\cos\vartheta_{01}}\right],$$

или, пренебрегая величинами высших порядков малости,

$$C_1 = \sqrt{\frac{J_{C1}}{J_{C0}}}\cdot\frac{\sqrt{J_BJ_{C1}}M_D\sin\vartheta_0\sin n_1\Delta t}{(Jw)^2\tau_1\tau_2\cos\vartheta_0\cos\vartheta_{01}};$$

$$C_2 = \frac{\sqrt{J_BJ_{C1}}M_D\sin\vartheta_0\cos n_1\Delta t}{(Jw)^2\tau_1\tau_2\cos\vartheta_0\cos\vartheta_{01}};$$

$$C_3 = -\sqrt{\frac{J_{C1}}{J_{C0}}} \cdot \frac{\sqrt{J_B J_{C1}}\, M_D \sin\vartheta_0 \sin n_1 \Delta t}{(J\omega)^2 \tau_1\tau_2 \cos\vartheta_0 \cos\vartheta_{01}};$$

$$C_4 = \frac{J_B M_D \sin\vartheta_0 \cos n_1 \Delta t}{(J\omega)^2 \tau_1\tau_2 \cos\vartheta_0 \cos\vartheta_{01}}.$$

Подставляя вычисленные значения постоянных интегрирования в равенства (121), находим выражения, характеризующие изменения углов ϑ и ψ поворота гироскопа в течение второго промежутка времени Δt_2:

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta = &-\sqrt{\frac{J_{C1}}{J_{C0}}} \cdot \frac{\sqrt{J_B J_{C1}}\, M_D \sin\vartheta_0 \sin n_1 \Delta t}{(J\omega)^2 \tau_1\tau_2 \cos\vartheta_0 \cos\vartheta_{01}} (1 - \cos n_2 t) + \\
&+ \frac{\sqrt{J_B J_{C1}}\, M_D \sin\vartheta_0 \cos n_1 \Delta t}{(J\omega)^2 \tau_1\tau_2 \cos\vartheta_0 \cos\vartheta_{01}} \sin n_2 t - \\
&- \frac{M_D \left(1 - \frac{\omega}{\Omega}\tau_2\right) \operatorname{tg}\vartheta_{01}}{J\omega\tau_2} t; \\
\psi = &\sqrt{\frac{J_{C1}}{J_{C0}}} \cdot \frac{J_B M_D \sin\vartheta_0 \sin n_1 \Delta t}{(J\omega)^2 \tau_1\tau_2 \cos\vartheta_0 \cos\vartheta_{01}} \sin n_2 t + \\
&+ \frac{J_B M_D \sin\vartheta_0 \cos n_1 \Delta t}{(J\omega)^2 \tau_1\tau_2 \cos\vartheta_0 \cos\vartheta_{01}} (1 - \cos n_2 t).
\end{aligned}\right\} \quad (127)$$

Из (127) следует, что в процессе движения гироскопа во втором промежутке времени Δt_2 его полюс продолжает перемещаться на картинной плоскости вокруг центра, совмещенного теперь с точкой N_2 (рис. 50). Так же, как и в первом промежутке времени Δt_1, центр вращения полюса гироскопа движется вдоль оси ординат $O^*\vartheta$ с отрицательной угловой скоростью, определяемой коэффициентом при t в первом выражении (127). Сравнив указанную угловую скорость с ее значением (124) в первом промежутке времени, заметим, что ее величина начинает уменьшаться. По мере уменьшения угла ϑ_{0j} и увеличения времени τ_j, центр N_2 вращения полюса гироскопа незначительно приближается к оси ординат $O^*\vartheta$. Действительно, суммируя постоянный член второго равенства (127) с величиной ψ_1, определяемой по выражению (125), и сравнивая полученную сумму с величиной угла ψ^*, характеризуемого равенством (123), находим

$$\psi_2^* + \psi_1 = \frac{J_B M_D \sin\vartheta_0}{(J\omega\tau_1 \cos\vartheta_0)^2} \left[1 - \frac{(\tau_2 \cos\vartheta_{01} - \tau_1 \cos\vartheta_0) \cos n_1 \Delta t}{\tau_2 \cos\vartheta_{01}}\right] < \psi^*.$$

Нетрудно заметить, что скорость перемещения центра вращения полюса вдоль оси ординат $O^*\vartheta$, особенно в первые мгновения рассматриваемого движения гироскопа, весьма велика. Поэтому уже к концу первого полупериода колебаний гироскопа его полюс совместится с линией DL. С этого мгновения угол ϑ_{0j} становится

равным нулю и уравнения (115) движения гироскопа принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &J_B\ddot{\vartheta} + Jwt\dot{\psi} = 0; \\ &J_C\ddot{\psi} - Jwt\dot{\vartheta} - M_D\left(1 - \frac{w}{\Omega}t\right)\vartheta = 0. \end{aligned}\right\} \quad (128)$$

Зафиксируем, как и выше, некоторое время $t = \tau_j$ в окрестностях которого произведение wt будем полагать изменяющимся весьма медленно. В этом случае система (128) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} &J_B\ddot{\vartheta} + Jw\tau_j\dot{\psi} = 0; \\ &J_C\ddot{\psi} - Jw\tau_j\dot{\vartheta} - M_D\left(1 - \frac{w}{\Omega}\tau_j\right)\vartheta = 0. \end{aligned}\right\} \quad (129)$$

Решение системы (129) определится значениями корней характеристического уравнения, которое запишем в виде следующего определителя:

$$\begin{vmatrix} J_Bp^2, & Jw\tau_jp \\ -\left[Jw\tau_jp + M_D\left(1 - \frac{w}{\Omega}\tau_j\right)\right], & J_Cp^2. \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель

$$p^4 + \frac{(Jw\tau_j)^2}{J_BJ_C}p^2 + \frac{Jw\tau_jM_D\left(1 - \frac{w}{\Omega}\tau_j\right)}{J_BJ_C}p = 0 \quad (130)$$

и вынося величину p за скобки, находим значение одного из четырех корней:

$$p_4 = 0. \quad (131)$$

Оставшееся в скобках кубическое уравнение

$$p^3 + ap + b = 0, \quad (132)$$

где

$$a = \frac{(Jw\tau_j)^2}{J_BJ_C}; \quad b = \frac{Jw\tau_jM_D\left(1 - \frac{w}{\Omega}\tau_j\right)}{J_BJ_C}, \quad (133)$$

позволяет вычислить остальные три корня характеристического уравнения (130).

Воспользуемся для этого формулами Кардана.[1] Так как коэффициенты (133) удовлетворяют условию

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 > 0, \quad (134)$$

[1] См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Т. I, Гостехиздат, 1948, стр. 442.

то искомые корни определятся следующими зависимостями:

$$p_1 = u + v;$$
$$p_{2,3} = -\frac{1}{2}(u+v) \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}(u-v), \tag{135}$$

где

$$\left.\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}; \\ v &= \sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}}. \end{aligned}\right\} \tag{136}$$

В данном случае величины u и v в соответствии со значениями (133) коэффициентов a и b будут равны:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{J\omega\tau_j M_D\left(1-\frac{w}{\Omega}\tau_j\right)}{2J_B J_C}+\sqrt{\frac{\left[J\omega\tau_j M_D\left(1-\frac{w}{\Omega}\tau_j\right)\right]^2}{(2J_B J_C)^2}+\frac{(J\omega\tau_j)^6}{(3J_B J_C)^3}}};$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{J\omega\tau_j M_D\left(1-\frac{w}{\Omega}\tau_j\right)}{2J_B J_C}-\sqrt{\frac{\left[J\omega\tau_j M_D\left(1-\frac{w}{\Omega}\tau_j\right)\right]^2}{(2J_B J_C)^2}+\frac{(J\omega\tau_j)^6}{(3J_B J_C)^3}}}$$

Вследствие большого значения ω, даже при сравнительно малых величинах τ_j, последний член рассматриваемых равенств преобладает над двумя первыми. Почти сразу же после запуска гиромотора третий член становится весьма большим по сравнению с остальными. Поэтому, пренебрегая первыми двумя членами последних зависимостей, можем записать

$$u \approx \frac{J\omega\tau_j}{\sqrt{3J_B J_C}}; \quad v \approx -\frac{J\omega\tau_j}{\sqrt{3J_B J_C}}.$$

Подставляя приближенные значения u и v в выражения (135) и учитывая (131), определяем искомые значения корней уравнения (130):

$$p_1 = 0; \qquad p_{2,3} = \pm i\frac{J\omega\tau_j}{\sqrt{J_B J_C}}; \qquad p_4 = 0.$$

В соответствии с вычисленными значениями корней характеристического уравнения (130) решение системы (129), по аналогии с решением (57) системы (50), примет уже знакомый нам вид (119).

В момент совмещения полюса гироскопа с точкой E (рис. 50), являющийся начальным для рассматриваемого этапа, движение гироскопа будет характеризоваться условиями

$$\vartheta(0)=0; \quad \psi(0)=\psi_н; \quad \dot{\vartheta}(0)=-\dot{\vartheta}_н; \quad \dot{\psi}(0)=0.$$

При этих начальных условиях постоянные интегрирования в выражениях (119) с учетом (120) будут равны:

$$C_1=0; \quad C_2=-\frac{\sqrt{J_B J_C}\,\dot{\vartheta}_н}{Jw\tau_j}; \quad C_3=0; \quad C_4=\psi_н-\frac{J_B\dot{\vartheta}_н}{Jw\tau_j},$$

в соответствии с чем выражения (119) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= -\frac{\sqrt{J_B J_C}}{Jw\tau_j}\sin n_j t; \\ \psi &= \frac{J_B\dot{\vartheta}_н}{Jw\tau_j}\cos n_j t+\psi_н-\frac{J_B\dot{\vartheta}_н}{Jw\tau_j}. \end{aligned}\right\} \qquad (137)$$

Выражения (137) показывают, что после совмещения полюса с точкой E на картинной плоскости гироскоп начинает совершать колебания вокруг обеих осей подвеса. В связи с непрерывным увеличением времени τ_j амплитуды этих колебаний уменьшаются. В результате проекция полюса гироскопа будет перемещаться на картинной плоскости по спирали, пока не совместится с точкой N, координаты которой в системе $O^*\vartheta\psi$ равны $-\vartheta_0$ и $\overset{*}{\psi}_N$.

Так как главная ось OA гироскопа совмещается с осью OD (рис. 50) за время первого полупериода его колебаний, то для определения $\overset{*}{\psi}_N$ можно воспользоваться формулой (123), вычислив соответствующее значение τ_N.

По кривой разгона ротора (рис. 49) определяется угловое ускорение

$$w=\frac{\dot{\Phi}_л}{t_л}. \qquad (138)$$

Зная w, по формуле (120) нетрудно вычислить коэффициент w_n, характеризующий увеличение круговой частоты n нутационных колебаний гироскопа,

$$w_n=\frac{J\cos\vartheta_0}{\sqrt{J_B J_C}}w=\frac{J\cos\vartheta_0}{\sqrt{J_B J_C}}\frac{\dot{\Phi}_л}{t_л}\ сек^{-2}.$$

и коэффициент w_f, характеризующий увеличение частоты этих колебаний,

$$w_f=\frac{w_n}{2\pi}=\frac{J\cos\vartheta_0}{2\pi\sqrt{J_B J_C}}\frac{\dot{\Phi}_л}{t_л}\ гц\ сек^{-1}. \qquad (139)$$

При $t = 0$ частота колебаний $f_0 = 0$, в связи с чем среднее значение частоты колебаний гироскопа за время T_1 первого периода будет равно

$$f_1 = f_0 + 0{,}5w_f T_1 = 0{,}5w_f T_1.$$

Приравнивая частоту f_1 единице, находим время T_1 первого периода, в течение которого гироскоп совершит первый цикл нутационных колебаний:

$$T_1 = \frac{1}{0{,}5w_f}.$$

Подставляя в полученное равенство зависимость (139) для коэффициента w_f и учитывая значение (138) ускорения w, находим

$$T_1 = \frac{4\pi\sqrt{J_B J_C}\,t_л}{J\cos\vartheta_0 \dot{\Phi}_л} = \frac{4\pi\sqrt{J_B J_C}}{Jw\cos\vartheta_0}. \tag{140}$$

Период T_1 состоит из двух неравных между собой полупериодов t_{11} и t_{12}:

$$T_1 = t_{11} + t_{12}. \tag{141}$$

Соотношение между значениями первого и второго полупериодов при коэффициенте w_f будет определяться зависимостью

$$\frac{t_{11}}{t_{12}} = w_f;$$

следовательно,

$$T_1 = (w_f + 1)\,t_{12},$$

откуда

$$t_{12} = \frac{T_1}{w_f + 1}. \tag{142}$$

Из равенств (141) и (142) определяем величину первого полупериода

$$t_{11} = \frac{w_f}{w_f + 1}T_1$$

и его среднее значение

$$\tau_N = \frac{t_{11}}{2} = \frac{w_f}{w_f + 1}\cdot\frac{T_1}{2}.$$

Подставив в последнее выражение зависимости (139), (138) и (140), найдем

$$\tau_N = \frac{2\pi\sqrt{J_B J_C}}{Jw\cos\vartheta_0 + 2\pi\sqrt{J_B J_C}}. \tag{143}$$

Учитывая значение τ_N в формуле (123), получаем выражение для определения отклонения равновесного положения гироскопа от оси ординат $O^*\vartheta$:

$$\psi_N^* = \frac{J_B M_D \sin\vartheta_0}{(J\omega\tau_N \cos\vartheta_0)^2}. \qquad (144)$$

Пример 12. Определить угол поворота гироскопа вокруг наружной оси подвеса после подачи на гиромотор питания, если в начальный момент оси OA и OD составляют угол $\vartheta_0 = 30°$, а начальное ускорение собственного вращения ротора (см. рис. 48) $\omega = 43$ сек.$^{-2}$ Параметры гироскопа: $J = 1{,}75$ *Гсмсек*^{2}, $J_э = 1{,}13$ *Гсмсек*^{2}, $J_{в\,x} = 1{,}9$ *Гсмсек*^{2}, $J_{в\,y} = 1{,}85$ *Гсмсек*^{2}, $J_{в\,z} = 3{,}0$ *Гсмсек*^{2}, $J_н = 9{,}5$ *Гсмсек*^{2}.

По уравнению (44), в котором для первых секунд разгона ротора момент M_s сил сопротивления окружающей среды с достаточной для практики точностью (см. рис. 31) можно полагать равным нулю, вычислим величину крутящего момента гиромотора:

$$M_D = J\ddot{\Phi} = J\omega = 1{,}75\cdot 43 = 75{,}25 \text{ Гсм}.$$

Из зависимостей (38) найдем значения моментов инерции гироскопа относительно внутренней и наружной осей подвеса:

$$J_B = J_э + J_{в\,y} = 1{,}13 + 1{,}85 = 2{,}98 \text{ Гсмсек}^2;$$

$$J_C = J_н + (J_э + J_{в\,z})\cos^2\vartheta_0 + J_{в\,x}\sin^2\vartheta_0 = 9{,}5 + (1{,}13 + 3{,}0)\cos^2 30° + 1{,}9\sin^2 30° = 13{,}07 \text{ Гсмсек}^2.$$

Из формулы (140) находим время T_1 первого периода колебаний гироскопа:

$$T_1 = \frac{4\pi\sqrt{J_B J_C}}{J\omega\cos\vartheta_0} = \frac{4\cdot 3{,}14\sqrt{2{,}98\cdot 13{,}07}}{1{,}75\cdot 43\cdot\cos 30°} = 1{,}2 \text{ сек.},$$

а из формулы (143) — среднее значение τ_N первого полупериода:

$$\tau_N = \frac{2\pi\sqrt{J_B J_C}}{J\omega\cos\vartheta_0 + 2\pi\sqrt{J_B J_C}} = \frac{2\cdot 3{,}14\sqrt{2{,}98\cdot 13{,}07}}{1{,}75\cdot 43\cdot\cos 30° + 2\cdot 3{,}14\sqrt{2{,}98\cdot 13{,}07}} = 0{,}376 \text{ сек}.$$

Подставив вычисленные значения величин в формулу (144), определим угол ψ_N^* поворота гироскопа вокруг наружной оси подвеса:

$$\psi_N^* = \frac{J_B M_D \sin\vartheta_0}{(J\omega\tau_N\cos\vartheta_0)^2} = \frac{2{,}98\cdot 75{,}25\cdot\sin 30°}{(1{,}75\cdot 43\cdot 0{,}376\cdot\cos 30°)^2} = 0{,}187 \text{ рад.},$$

или

$$\psi_N^* = 57{,}3\cdot 0{,}187 = 10°72.$$

Угловая скорость $\dot{\vartheta}$ движения оси OA гироскопа к совмещению с осью OD (рис. 50) определится равенством (124). Заменив в нем τ_1 на τ_N, найдем

$$\dot{\vartheta} = -\frac{M_D\sin\vartheta_0}{J\omega\tau_N\cos\vartheta_0} = -\frac{75{,}25\sin 30°}{1{,}75\cdot 43\cdot 0{,}376\cdot\cos 30°} = -1{,}6 \text{ сек}^{-1}$$

или

$$\dot{\vartheta} = -57{,}3\cdot 1{,}6 = -91{,}68 \text{ град/сек}.$$

Следовательно, точка N, вокруг которой перемещается проекция полюса гироскопа, совместится с линией DL всего лишь за время

$$t = \frac{-\vartheta_0}{\dot{\vartheta}} = \frac{-30}{-91,68} = 0,327 \text{ сек.}$$

Для сравнения результатов расчета с действительным характером рассматриваемого движения на рис. 51 приведены экспериментальные графики изме-

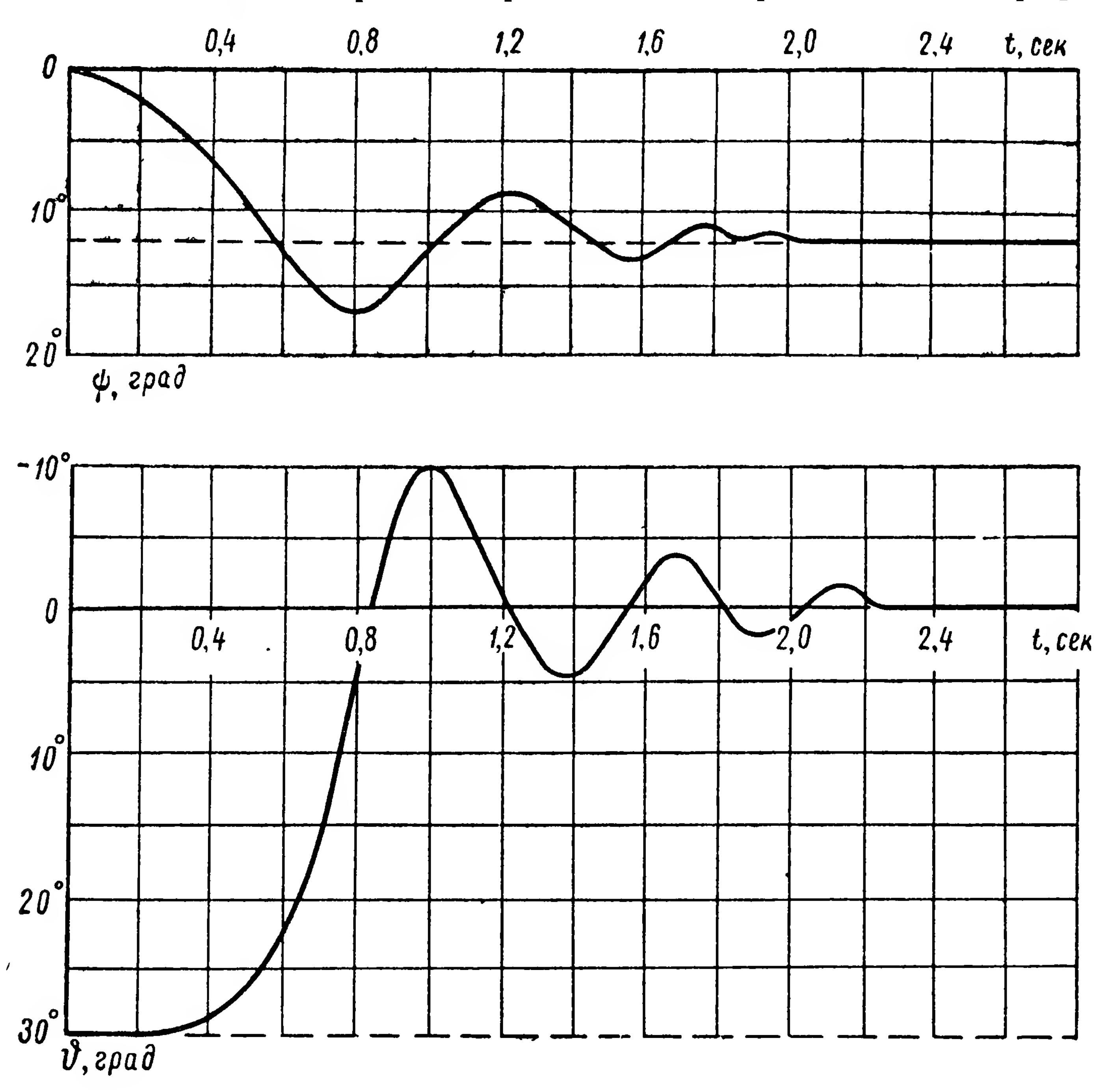
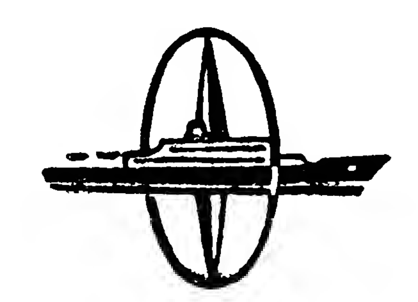


Рис. 51. Графики изменения углов ϑ и ψ при запуске прибора.

нения углов ϑ и ψ гироскопа, параметры которого указаны в данном примере. Как видим, приближенный метод определения отклонений гироскопа в процессе его запуска дает результаты, близко совпадающие с действительными.



Глава IV
УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА В ПОДВИЖНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ И ИХ АНАЛИЗ

§ 24. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА В ПОДВИЖНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Рассмотренные законы движения гироскопа (гл. II и III) были получены в предположении, что корпус прибора находился

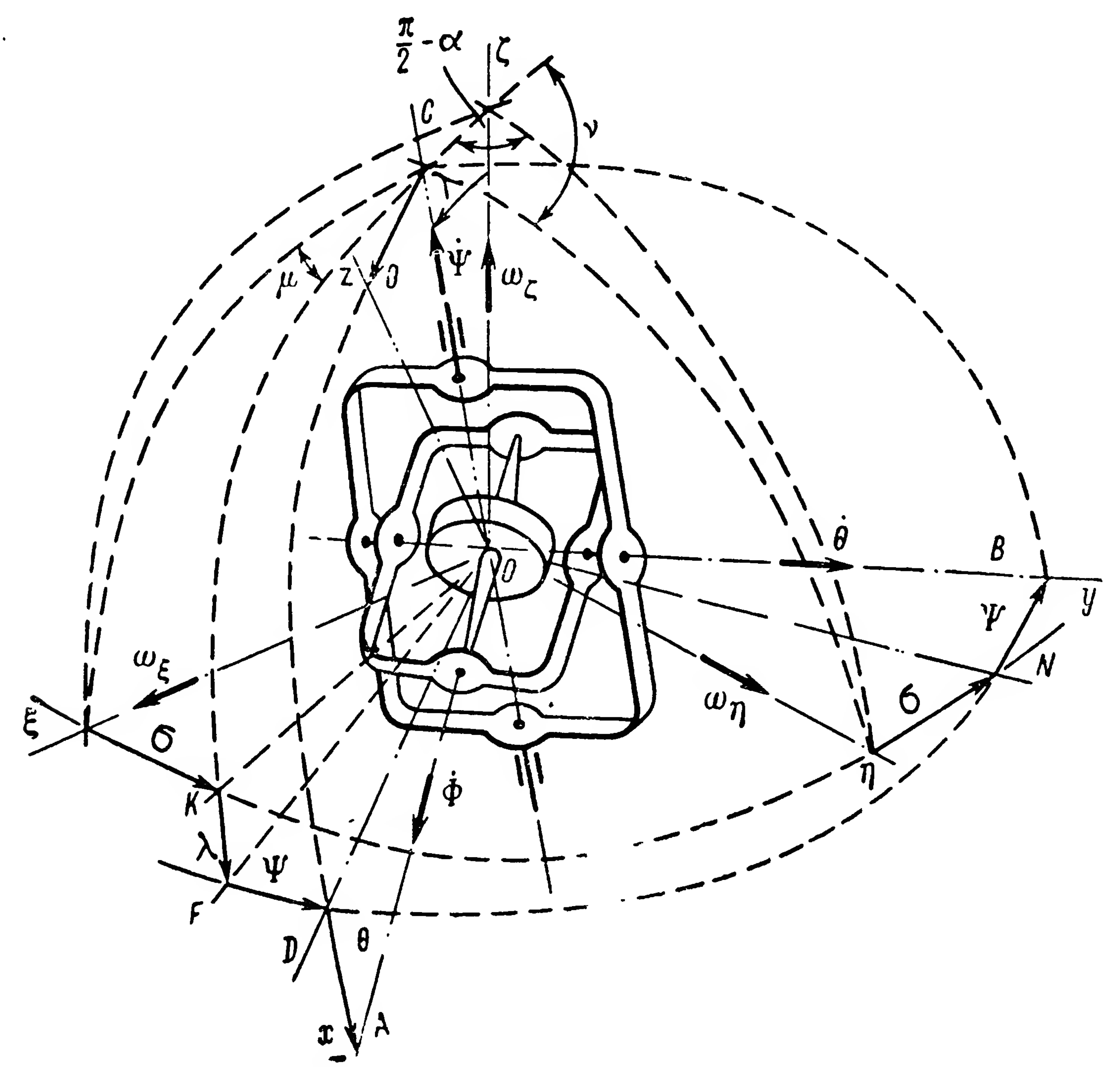


Рис. 52. Положение гироскопа в подвижной системе координат.

в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения в инерциальном пространстве. Выражения для углов ϑ и ψ характеризовали изменения положения главной оси гироскопа в системе координат $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ (см. рис. 35), остающейся неподвиж-

ной. Между тем, в большинстве практических случаев координатные оси, относительно которых определяются перемещения гироскопа, сами совершают вращение.

Перемещение гироскопа относительно подвижных осей и неподвижной системы координат различно. Сущность этого различия можно определить из анализа уравнения движения гироскопа с учетом вращения координатной системы, в которой рассматривается его перемещение. В этом случае при определении кинетической энергии системы материальных тел должны быть, как известно,[1] учтены и относительные и переносные скорости ее движения.

Рассмотрим движение гироскопа в кардановом подвесе (рис. 52) относительно системы координат $O\xi\eta\zeta$, совершающей вращение в пространстве вокруг осей $O\xi$, $O\eta$ и $O\zeta$ с угловыми скоростями ω_ξ, ω_η и ω_ζ. В общем случае наружная ось OC гироскопа может составлять с осью $O\zeta$ угол λ, лежащий в плоскости $FO\zeta$, которая образует с плоскостью $\xi O\zeta$ угол σ. При этом сам гироскоп может быть повернут вокруг оси OC по отношению к плоскости FOC на угол Ψ и вокруг оси OB по отношению к плоскости DOB на угол Θ. Определив проекции переносных угловых скоростей ω_ξ, ω_η и ω_ζ на оси $ODBC$ и $Oxyz$, соответственно связанные с наружным и внутренним кардановыми кольцами подвеса гироскопа, можем записать

$$\left.\begin{aligned}
\omega_x &= \omega_A = \omega_\xi \cos(\xi, A) + \omega_\eta \cos(\eta, A) + \omega_\zeta \cos(\zeta, A);\\
\omega_y &= \omega_B = \omega_\xi \cos(\xi, B) + \omega_\eta \cos(\eta, B) + \omega_\zeta \cos(\zeta, B);\\
\omega_C &= \omega_\xi \cos(\xi, C) + \omega_\eta \cos(\eta, C) + \omega_\zeta \cos(\zeta, C);\\
\omega_D &= \omega_\xi \cos(\xi, D) + \omega_\eta \cos(\eta, D) + \omega_\zeta \cos(\zeta, D);\\
\omega_z &= \omega_\xi \cos(\xi, z) + \omega_\eta \cos(\eta, z) + \omega_\zeta \cos(\zeta, z).
\end{aligned}\right\} \quad (145)$$

Для нахождения косинусов углов, входящих в равенства (145), воспользуемся формулой (30). При принятых обозначениях углов (рис. 52)

$$\cos(\xi, B) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \sigma\right)\cos\Psi + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \sigma\right)\sin\Psi\cos(\tau - \lambda);$$

$$\cos(\xi, C) = \cos\sigma\cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) + \sin\sigma\sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)\cos\frac{\pi}{2};$$

$$\cos(\eta, B) = \cos\sigma\cos\Psi + \sin\sigma\sin\Psi\cos(\tau - \lambda);$$

$$\cos(\eta, C) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \sigma\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) +$$

[1] См.: П. Аппель. Теоретическая механика. Т. II, Физматгиз, 1960, стр. 309.

$$+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sigma\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right)\cos\frac{\pi}{2};$$

$$\cos(\zeta,\ A)=\cos\lambda\cos\left(\frac{\pi}{2}+\Theta\right)+\sin\lambda\sin\left(\frac{\pi}{2}+\Theta\right)\cos(\pi-\Psi);$$

$$\cos(\zeta,\ z)=\cos\lambda\cos\Theta+\sin\lambda\sin\Theta\cos(\pi-\Psi);$$

$$\cos(\zeta,\ D)=\cos\lambda\cos\frac{\pi}{2}+\sin\lambda\sin\frac{\pi}{2}\cos(\pi-\Psi);$$

$$\cos(\zeta,\ B)=\cos\lambda\cos\frac{\pi}{2}+\sin\lambda\sin\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\Psi\right);$$

$$\cos(\zeta,\ C)=\cos\lambda,$$

или после преобразований

$$\left.\begin{aligned}
\cos(\xi,\ B)&=-\sin\sigma\cos\Psi-\cos\sigma\sin\Psi\cos\lambda;\\
\cos(\xi,\ C)&=\cos\sigma\sin\lambda;\\
\cos(\eta,\ B)&=\cos\sigma\cos\Psi-\sin\sigma\sin\Psi\cos\lambda;\\
\cos(\eta,\ C)&=\sin\sigma\sin\lambda;\\
\cos(\zeta,\ A)&=-\cos\lambda\sin\Theta-\sin\lambda\cos\Theta\cos\Psi;\\
\cos(\zeta,\ z)&=\cos\lambda\cos\Theta-\sin\lambda\sin\Theta\cos\Psi;\\
\cos(\zeta,\ D)&=-\sin\lambda\cos\Psi;\\
\cos(\zeta,\ B)&=\sin\lambda\sin\Psi;\\
\cos(\zeta,\ C)&=\cos\lambda.
\end{aligned}\right\}\qquad(146)$$

Для определения косинусов углов, составляемых осями OA, OD и Oz с осями $O\xi$ и $O\eta$, обратимся к сферическому треугольнику ξKC, для которого согласно формуле (30) имеем

$$\cos\sigma=\cos(\xi,\ C)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right)+\sin(\xi,\ C)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right)\cos\mu,$$

где μ — угол между плоскостями ξOC и KOC.

Подставляя в последнее равенство значение $\cos(\xi,\ C)$ из выражений (146) и производя преобразования, находим

$$\cos\sigma=\cos\sigma\sin^2\lambda+\sin(\xi,\ C)\cos\lambda\cos\mu,$$

откуда

$$\cos\mu=\frac{\cos\sigma\cos\lambda}{\sin(\xi,\ C)}.\qquad(147)$$

Для этого же треугольника ξKC согласно теореме синусов можем записать

$$\frac{\sin\sigma}{\sin\mu}=\frac{\sin(\xi,\ C)}{\sin\frac{\pi}{2}},$$

откуда

$$\sin\mu = \frac{\sin\sigma}{\sin(\xi, C)}. \qquad (148)$$

В свою очередь из сферических треугольников ξCA, ξCD и ξCz следует

$$\cos(\xi, A) = \cos(\xi, C)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \Theta\right) +$$

$$+ \sin(\xi, C)\sin\left(\frac{\pi}{2} + \Theta\right)\cos(\mu + \Psi);$$

$$\cos(\xi, D) = \cos(\xi, C)\cos\frac{\pi}{2} + \sin(\xi, C)\sin\frac{\pi}{2}\cos(\mu + \Psi);$$

$$\cos(\xi, z) = \cos(\xi, C)\cos\Theta + \sin(\xi, C)\sin\Theta\cos(\mu + \Psi),$$

или после преобразований

$$\cos(\xi, A) = -\cos(\xi, C)\sin\Theta +$$

$$+ \sin(\xi, C)\cos\Theta(\cos\mu\cos\Psi - \sin\mu\sin\Psi);$$

$$\cos(\xi, D) = \sin(\xi, C)(\cos\mu\cos\Psi - \sin\mu\sin\Psi);$$

$$\cos(\xi, z) = \cos(\xi, C)\cos\Theta + \sin(\xi, C)\sin\Theta(\cos\mu\cos\Psi - \sin\mu\sin\Psi).$$

Подставив в полученные равенства зависимости (146), (147) и (148), найдем

$$\left.\begin{aligned}
\cos(\xi, A) = -\cos\sigma\sin\lambda\sin\Theta + \cos\sigma\cos\lambda\cos\Theta\cos\Psi - \\
- \sin\sigma\cos\Theta\sin\Psi; \\
\cos(\xi, D) = \cos\sigma\cos\lambda\cos\Psi - \sin\sigma\sin\Psi; \\
\cos(\xi, z) = \cos\sigma\sin\lambda\cos\Theta + \cos\sigma\cos\lambda\sin\Theta\cos\Psi - \\
- \sin\sigma\sin\Theta\sin\Psi.
\end{aligned}\right\} \qquad (149)$$

Для сферического треугольника $C\eta z$ можем записать

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\lambda\cos(\eta, C) + \sin\lambda\sin(\eta, C)\cos\nu,$$

где ν — угол между плоскостями $KO\zeta$ и $CO\eta$.

Подставив в последнее равенство значение $\cos(\eta, C)$ из (146), найдем

$$\cos\nu = -\frac{\sin\sigma\cos\lambda}{\sin(\eta, C)}. \qquad (150)$$

Для треугольника $C\eta z$ согласно теореме синусов имеем

$$\frac{\sin(\eta, C)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \sigma\right)} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\nu},$$

откуда

$$\sin \nu = \frac{\cos \sigma}{\sin(\eta, C)}. \qquad (151)$$

Из сферических треугольников $AC\eta$, $DC\eta$ и $zC\eta$ в соответствии с формулой (30) следует

$$\cos(\eta, A) = \cos(\eta, C)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \Theta\right) +$$

$$+ \sin(\eta, C)\sin\left(\frac{\pi}{2} + \Theta\right)\cos[\tau - (\nu + \Psi)];$$

$$\cos(\eta, D) = \cos(\eta, C)\cos\frac{\pi}{2} + \sin(\eta, C)\sin\frac{\pi}{2}\cos[\tau - (\nu + \Psi)];$$

$$\cos(\eta, z) = \cos(\eta, C)\cos\Theta + \sin(\eta, C)\sin\Theta\cos[\tau - (\nu + \Psi)].$$

Подставляя в эти равенства значения входящих в них тригонометрических величин, определяемых выражениями (146), (150) и (151), и производя преобразования, получим

$$\left.\begin{aligned}
\cos(\eta, A) &= -\sin\sigma\sin\lambda\sin\Theta + \sin\sigma\cos\lambda\cos\Theta\cos\Psi + \\
&\quad + \cos\sigma\cos\Theta\sin\Psi; \\
\cos(\eta, D) &= \sin\sigma\cos\lambda\cos\Psi + \cos\sigma\sin\Psi; \\
\cos(\eta, z) &= \sin\sigma\sin\lambda\cos\Theta + \sin\sigma\cos\lambda\sin\Theta\cos\Psi + \\
&\quad + \cos\sigma\sin\Theta\sin\Psi.
\end{aligned}\right\} \qquad (152)$$

Вводя зависимости (146), (149) и (152) в выражения (145) переносных угловых скоростей, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_A &= -\omega_\xi(\cos\sigma\sin\lambda\sin\Theta - \cos\sigma\cos\lambda\cos\Theta\cos\Psi + \\
&\quad + \sin\sigma\cos\Theta\sin\Psi) - \omega_\eta(\sin\sigma\sin\lambda\sin\Theta - \\
&\quad - \sin\sigma\cos\lambda\cos\Theta\cos\Psi - \cos\sigma\cos\Theta\sin\Psi) - \\
&\quad - \omega_\zeta(\cos\lambda\sin\Theta + \sin\lambda\cos\Theta\cos\Psi); \\
\omega_B &= -\omega_\xi(\sin\sigma\cos\Psi + \cos\sigma\cos\lambda\sin\Psi) + \\
&\quad + \omega_\eta(\cos\sigma\cos\Psi - \sin\sigma\cos\lambda\sin\Psi) + \omega_\zeta\sin\lambda\sin\Psi; \\
\omega_C &= \omega_\xi\cos\sigma\sin\lambda + \omega_\eta\sin\sigma\sin\lambda + \omega_\zeta\cos\lambda; \\
\omega_D &= \omega_\xi(\cos\sigma\cos\lambda\cos\Psi - \sin\sigma\sin\Psi) + \\
&\quad + \omega_\eta(\sin\sigma\cos\lambda\cos\Psi + \cos\sigma\sin\Psi) - \omega_\zeta\sin\lambda\cos\Psi; \\
\omega_z &= \omega_\xi(\cos\sigma\sin\lambda\cos\Theta + \cos\sigma\cos\lambda\sin\Theta\cos\Psi - \\
&\quad - \sin\sigma\sin\Theta\sin\Psi) + \omega_\eta(\sin\sigma\sin\lambda\cos\Theta + \\
&\quad + \sin\sigma\cos\lambda\sin\Theta\cos\Psi + \cos\sigma\sin\Theta\sin\Psi) + \\
&\quad + \omega_\zeta(\cos\lambda\cos\Theta - \sin\lambda\sin\Theta\cos\Psi).
\end{aligned}\right\} \qquad (153)$$

Таковы в общем случае значения угловых скоростей переносного движения подвижной системы координат $O\xi\eta\zeta$, в которой гироскоп совершает относительное вращение вокруг осей OA, OB и OC с угловыми скоростями, равными соответственно $\dot{\Phi}$, $\dot{\Theta}$ и $\dot{\Psi}$. Таким образом, абсолютная кинетическая энергия гироскопа с учетом проекций относительных угловых скоростей на оси OA, OB, OC, OD и Oz (см. § 10) будет равна

$$T_а = \frac{1}{2}\left[J(\dot{\Phi} - \dot{\Psi}\sin\Theta + \omega_A)^2 + J_э(\dot{\Theta} + \omega_B)^2 + \right.$$
$$+ J_э(\dot{\Psi}\cos\Theta + \omega_z)^2 + J_{Bx}(-\dot{\Psi}\sin\Theta + \omega_A)^2 + J_{By}(\dot{\Theta} + \omega_B)^2 +$$
$$\left. + J_{Bz}(\dot{\Psi}\cos\Theta + \omega_z)^2 + J_{н\,D}\omega_D^2 + J_{н\,B}\omega_B^2 + J_н(\dot{\Psi} + \omega_C)^2\right];$$

здесь введены дополнительные (см. § 11) обозначения $J_{н\,D}$ и $J_{н\,B}$ для моментов инерции наружного карданова кольца относительно осей OD и OB соответственно.

Угловые скорости ω_ξ, ω_η и ω_ζ переносного движения весьма малы по сравнению с угловыми скоростями $\dot{\Phi}$, $\dot{\Theta}$ и $\dot{\Psi}$ относительного движения гироскопа. Также малы будут и составляющие ω_A, ω_B, ω_C, ω_D и ω_z. Поэтому, преобразуя полученное выражение, опустим в нем члены, содержащие квадраты переносных угловых скоростей:

$$T_а = \frac{1}{2}\left[J(\dot{\Phi}^2 + \dot{\Psi}^2\sin^2\Theta - 2\dot{\Phi}\dot{\Psi}\sin\Theta + 2\dot{\Phi}\omega_A - 2\dot{\Psi}\omega_A\sin\Theta) + \right.$$
$$+ (J_э + J_{вy})(\dot{\Theta}^2 + 2\dot{\Theta}\omega_B) + (J_э + J_{Bz})(\dot{\Psi}^2\cos^2\Theta + 2\dot{\Psi}\omega_z\cos\Theta) +$$
$$\left. + J_{Bx}(\dot{\Psi}^2\sin^2\Theta - 2\dot{\Psi}\omega_A\sin\Theta) + J_н(\dot{\Psi}^2 + 2\dot{\Psi}\omega_C)\right]. \quad (154)$$

Поступая по аналогии с изложенным в § 10, вычислим частные производные от абсолютной кинетической энергии $T_а$ по обобщенным координатам Φ, Θ и Ψ и их первым производным:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial T_а}{\partial \Phi} = J(\dot{\Phi} - \dot{\Psi}\sin\Theta)\frac{\partial\omega_A}{\partial\Phi} + (J_э + J_{вy})\dot{\Theta}\frac{\partial\omega_B}{\partial\Phi} + \\
&+ (J_э + J_{вz})\dot{\Psi}\cos\Theta\frac{\partial\omega_z}{\partial\Phi} - J_{вx}\dot{\Psi}\sin\Theta\frac{\partial\omega_A}{\partial\Phi} + J_н\dot{\Psi}\frac{\partial\omega_C}{\partial\Phi}; \\
&\frac{\partial T_а}{\partial\Theta} = -J(\dot{\Phi} - \dot{\Psi}\sin\Theta + \omega_A)\dot{\Psi}\cos\Theta + \\
&+ J(\dot{\Phi} - \dot{\Psi}\sin\Theta)\frac{\partial\omega_A}{\partial\Theta} + (J_э + J_{вy})\dot{\Theta}\frac{\partial\omega_B}{\partial\Theta} - \\
&- (J_э + J_{вz} - J_{вx})\dot{\Psi}^2\sin\Theta\cos\Theta - \\
&- (J_э + J_{вz})\dot{\Psi}\left(\omega_z\sin\Theta - \cos\Theta\frac{\partial\omega_z}{\partial\Theta}\right) -
\end{aligned}\right\} \quad (155)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&-J_{\text{в}\,x}\dot{\Psi}\left(\omega_A\cos\Theta+\sin\Theta\,\frac{\partial\omega_A}{\partial\Theta}\right)+J_{\text{н}}\dot{\Psi}\,\frac{\partial\omega_C}{\partial\Theta};\\
&\frac{\partial T_{\text{а}}}{\partial\Psi}=J\,(\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta)\,\frac{\partial\omega_A}{\partial\Psi}+(J_{\text{э}}+J_{\text{в}\,y})\,\dot{\Theta}\,\frac{\partial\omega_B}{\partial\Psi}+\\
&+(J_{\text{э}}+J_{\text{в}\,z})\,\dot{\Psi}\cos\Theta\,\frac{\partial\omega_z}{\partial\Psi}-J_{\text{в}\,x}\dot{\Psi}\sin\Theta\,\frac{\partial\omega_A}{\partial\Psi}+J_{\text{н}}\dot{\Psi}\,\frac{\partial\omega_C}{\partial\Psi};\\
&\frac{\partial T_{\text{а}}}{\partial\Phi}=J\left(\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta+\omega_A+\dot{\Phi}\,\frac{\partial\omega_A}{\partial\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta\,\frac{\partial\omega_A}{\partial\Phi}\right)+\\
&+(J_{\text{э}}+J_{\text{в}\,y})\,\dot{\Theta}\,\frac{\partial\omega_B}{\partial\Phi}+(J_{\text{э}}+J_{\text{в}\,z})\,\dot{\Psi}\cos\Theta\,\frac{\partial\omega_z}{\partial\Phi}-\\
&-J_{\text{в}\,x}\dot{\Psi}\sin\Theta\,\frac{\partial\omega_A}{\partial\dot{\Phi}}+J_{\text{н}}\dot{\Psi}\,\frac{\partial\omega_C}{\partial\dot{\Phi}};\\
&\frac{\partial T_{\text{а}}}{\partial\dot{\Theta}}=J\,(\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta)\,\frac{\partial\omega_A}{\partial\dot{\Theta}}+(J_{\text{э}}+J_{\text{в}\,y})\left(\dot{\Theta}+\omega_B+\right.\\
&\left.+\dot{\Theta}\,\frac{\partial\omega_B}{\partial\dot{\Theta}}\right)+(J_{\text{э}}+J_{\text{в}\,z})\,\dot{\Psi}\cos\Theta\,\frac{\partial\omega_z}{\partial\dot{\Theta}}-\\
&-J_{\text{в}\,x}\dot{\Psi}\sin\Theta\,\frac{\partial\omega_A}{\partial\dot{\Theta}}+J_{\text{н}}\dot{\Psi}\,\frac{\partial\omega_C}{\partial\dot{\Theta}};\\
&\frac{\partial T_{\text{а}}}{\partial\dot{\Psi}}=-J\,(\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta+\omega_A)\sin\Theta+\\
&+J\,(\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta)\,\frac{\partial\omega_A}{\partial\dot{\Psi}}+(J_{\text{э}}+J_{\text{в}\,y})\,\dot{\Theta}\,\frac{\partial\omega_B}{\partial\dot{\Psi}}+\\
&+(J_{\text{э}}+J_{\text{в}\,z})\left(\dot{\Psi}\cos^2\Theta+\omega_z\cos\Theta+\dot{\Psi}\cos\Theta\,\frac{\partial\omega_z}{\partial\dot{\Psi}}\right)+\\
&+J_{\text{в}\,x}\left(\dot{\Psi}\sin^2\Theta-\omega_A\sin\Theta-\dot{\Psi}\sin\Theta\,\frac{\partial\omega_A}{\partial\dot{\Psi}}\right)+J_{\text{н}}(\dot{\Psi}+\omega_C).
\end{aligned}
\right\}\quad(155)
$$

Определив частные производные от переносных угловых скоростей (153), получим

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\omega_A}{\partial\Theta}&=-\omega_\xi(\cos\sigma\sin\lambda\cos\Theta+\cos\sigma\cos\lambda\sin\Theta\sin\Psi-\\
&-\sin\sigma\sin\Theta\sin\Psi)-\omega_\eta(\sin\sigma\sin\lambda\cos\Theta+\\
&+\sin\sigma\cos\lambda\sin\Theta\cos\Psi+\cos\sigma\sin\Theta\sin\Psi)-\\
&-\omega_\zeta(\cos\lambda\cos\Theta-\sin\lambda\sin\Theta\cos\Psi)=-\omega_D\sin\Theta-\omega_C\cos\Theta;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\omega_A}{\partial\Psi}&=-\omega_\xi(\cos\sigma\cos\lambda\cos\Theta\sin\Psi+\sin\sigma\cos\Theta\cos\Psi)-\\
&-\omega_\eta(\sin\sigma\cos\lambda\cos\Theta\sin\Psi-\cos\sigma\cos\Theta\cos\Psi)+\\
&+\omega_\zeta\sin\lambda\cos\Theta\sin\Psi=\omega_B\cos\Theta;
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial \omega_B}{\partial \Psi} = \omega_\xi (\sin\sigma \sin\Psi - \cos\sigma\cos\lambda\cos\Psi) -$$

$$- \omega_\eta (\cos\sigma \sin\Psi + \sin\sigma\cos\lambda\cos\Psi) + \omega_\zeta \sin\lambda\cos\Psi = - \omega_D;$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial \Theta} = - \omega_\xi (\cos\sigma \sin\lambda \sin\Theta -$$

$$- \cos\sigma\cos\lambda\cos\Theta\cos\Psi + \sin\sigma\cos\Theta\sin\Psi) -$$

$$- \omega_\eta (\sin\sigma \sin\lambda \sin\Theta - \sin\sigma\cos\lambda\cos\Theta\cos\Psi -$$

$$- \cos\sigma\cos\Theta\sin\Psi) - \omega_\zeta (\cos\lambda \sin\Theta + \sin\lambda\cos\Theta\cos\Psi) =$$

$$= \omega_D \cos\Theta - \omega_C \sin\Theta;$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial \Psi} = - \omega_\xi (\cos\sigma\cos\lambda \sin\Theta \sin\Psi + \sin\sigma \sin\Theta\cos\Psi) -$$

$$- \omega_\eta (\sin\sigma\cos\lambda \sin\Theta \sin\Psi - \cos\sigma \sin\Theta\cos\Psi) +$$

$$+ \omega_\zeta \sin\lambda \sin\Theta \sin\Psi = \omega_B \sin\Theta.$$

Значения остальных частных производных от переносных угловых скоростей будут равны нулю. Из рис. 52 видно, что

$$\left.\begin{aligned} \omega_A &= \omega_D \cos\Theta - \omega_C \sin\Theta; \\ \omega_z &= \omega_D \sin\Theta + \omega_C \cos\Theta. \end{aligned}\right\} \quad (156)$$

Учитывая это, выражения (155) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial T_а}{\partial \Phi} = 0; \\
&\frac{\partial T_а}{\partial \Theta} = - J (\dot\Phi - \dot\Psi \sin\Theta + \omega_A) \dot\Psi \cos\Theta - J (\dot\Phi - \dot\Psi \sin\Theta) \times \\
&\qquad \times (\omega_D \sin\Theta + \omega_C \cos\Theta) - (J_э + J_{в\,z} - J_{в\,x}) \dot\Psi^2 \sin\Theta \times \\
&\qquad \times \cos\Theta + (J_э + J_{вz} - J_{вx}) \dot\Psi (\omega_D \cos 2\Theta - \omega_C \sin 2\Theta); \\
&\frac{\partial T_а}{\partial \Psi} = J (\dot\Phi - \dot\Psi \sin\Theta) \omega_B \cos\Theta - (J_э + J_{в\,y}) \dot\Theta \omega_D + \\
&\qquad + (J_э + J_{вz} - J_{вx}) \dot\Psi \omega_B \sin\Theta \cos\Theta; \\
&\frac{\partial T_а}{\partial \dot\Phi} = J (\dot\Phi - \dot\Psi \sin\Theta + \omega_A); \\
&\frac{\partial T_а}{\partial \dot\Theta} = (J_э + J_{вy}) (\dot\Theta + \omega_B); \\
&\frac{\partial T_а}{\partial \dot\Psi} = - J (\dot\Phi - \dot\Psi \sin\Theta + \omega_A) \sin\Theta + (J_э + J_{в\,z}) \times \\
&\qquad \times (\dot\Psi \cos^2\Theta + \omega_D \sin\Theta\cos\Theta + \omega_C \cos^2\Theta) + J_{вx} \times \\
&\qquad \times (\dot\Psi \sin^2\Theta - \omega_D \sin\Theta\cos\Theta + \omega_C \sin^2\Theta) + J_н (\dot\Psi + \omega_C).
\end{aligned}\right\} \quad (157)$$

Подставив значения (157) в уравнения Лагранжа (33), будем иметь

$$J\frac{d}{dt}(\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta+\omega_A)=M_A;$$

$$(J_э+J_{вy})\frac{d}{dt}(\dot{\Theta}+\omega_B)+J(\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta+\omega_A)\times$$

$$\times\dot{\Psi}\cos\Theta+J(\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta)(\omega_D\sin\Theta+\omega_C\cos\Theta)+$$
$$+(J_э+J_{вz}-J_{вx})\dot{\Psi}^2\sin\Theta\cos\Theta-(J_э+J_{вz}-J_{вx})\times$$
$$\times\dot{\Psi}(\omega_D\cos 2\Theta-\omega_C\sin 2\Theta)=M_B;$$

$$\frac{d}{dt}\{[J_н+(J_э+J_{вz})\cos^2\Theta+J_{вx}\sin^2\Theta](\dot{\Psi}+\omega_C)-J\times$$

$$\times(\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta+\omega_A)\sin\Theta+(J_э+J_{вz}-J_{вx})\omega_D\sin\Theta\cos\Theta\}-$$
$$-J(\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta)\omega_B\cos\Theta+(J_э+J_{вy})\dot{\Theta}\omega_D-$$
$$-(J_э+J_{вz}-J_{вx})\dot{\Psi}\omega_B\sin\Theta\cos\Theta=M_C.$$

Производя дальнейшие преобразования и учитывая принятые ранее обозначения (38), перепишем полученную систему уравнений в следующем виде:

$$J\frac{d}{dt}(\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta+\omega_A)=M_A;$$

$$J_B\frac{d}{dt}(\dot{\Theta}+\omega_B)+J(\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta+\omega_A)\dot{\Psi}\cos\Theta+$$

$$+J(\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta)(\omega_D\operatorname{tg}\Theta+\omega_C)\cos\Theta+J_D\dot{\Psi}^2\sin\Theta\cos\Theta-$$
$$-J_D\dot{\Psi}(\omega_D-\omega_C\operatorname{tg}2\Theta)\cos 2\Theta=M_B;$$
$$[J_н+(J_э+J_{вz})\cos^2\Theta+J_{вx}\sin^2\Theta]\frac{d}{dt}(\dot{\Psi}+\omega_C)-2J_D\times$$

$$\times(\dot{\Psi}+\omega_C)\dot{\Theta}\sin\Theta\cos\Theta-J(\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta+\omega_A)\dot{\Theta}\cos\Theta-$$
$$-J\sin\Theta\frac{d}{dt}(\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta+\omega_A)+J_D\omega_D\dot{\Theta}\cos 2\Theta+$$

$$+J_D\sin\Theta\cos\Theta\frac{d\omega_D}{dt}-J(\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta)\omega_B\cos\Theta+$$

$$+J_B\dot{\Theta}\omega_D-J_D\dot{\Psi}\omega_B\sin\Theta\cos\Theta=M_C.$$

Нетрудно заметить, что произведения

$$J(\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta)(\omega_D\operatorname{tg}\Theta+\omega_C)\cos\Theta \text{ и}$$
$$J(\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta)\omega_B\cos\Theta$$

соответственно отличаются от произведений

$$J\left(\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta+\omega_A\right)(\omega_D \operatorname{tg}\Theta+\omega_C)\cos\Theta \text{ и}$$

$$J\left(\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta+\omega_A\right)\omega_B\cos\Theta$$

на величины второго порядка малости $J\omega_A(\omega_D \operatorname{tg}\Theta+\omega_C)\cos\Theta$ и $J\omega_A\omega_B\cos\Theta$, которыми пренебрегали при выводе уравнений.

Поэтому, полагая

$$\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta+\omega_A\approx\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta$$

и учитывая в третьем уравнении системы члены, равные согласно ее первому уравнению моменту M_A внешних сил, действующему на гироскоп относительно его главной оси OA, находим:

$$\left.\begin{aligned}
&J\frac{d}{dt}\left(\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta+\omega_A\right)=M_A;\\
&J_B\frac{d}{dt}\left(\dot{\Theta}+\omega_B\right)+J\left(\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta+\omega_A\right)\left(\dot{\Psi}+\right.\\
&\left.+\omega_D\operatorname{tg}\Theta+\omega_C\right)\cos\Theta+J_D\dot{\Psi}^2\sin\Theta\cos\Theta-\\
&-J_D\dot{\Psi}(\omega_D-\omega_C\operatorname{tg}2\Theta)\cos2\Theta=M_B;\\
&[J_н+(J_э+J_{вz})\cos^2\Theta+J_{вx}\sin^2\Theta]\frac{d}{dt}\left(\dot{\Psi}+\omega_C\right)-\\
&-J\left(\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta+\omega_A\right)\left(\dot{\Theta}+\omega_B\right)\cos\Theta-2J_D\times\\
&\times\left(\dot{\Psi}+\omega_C\right)\dot{\Theta}\sin\Theta\cos\Theta-M_A\sin\Theta+J_D\dot{\Theta}\omega_D\cos2\Theta+\\
&+J_D\sin\Theta\cos\Theta\frac{d\omega_D}{dt}+J_B\dot{\Theta}\omega_D-\\
&-J_D\dot{\Psi}\omega_B\sin\Theta\cos\Theta=M_C.
\end{aligned}\right\}\quad(158)$$

Таковы дифференциальные уравнения, описывающие движение гироскопа в кардановом подвесе относительно системы координат, вращающейся в инерциальном пространстве.

§ 25. УПРОЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА В ПОДВИЖНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В § 19 было показано, что при установившемся режиме работы гиромотора угловая скорость собственного вращения ротора гироскопа остается постоянной:

$$\dot{\Phi}-\dot{\Psi}\sin\Theta+\omega_A=\Omega=\text{const},$$

в соответствии с чем момент M_A практически будет равен нулю.

Поэтому представляется возможным выделить из общей системы (158) первое уравнение и описать рассматриваемое движение

гироскопа двумя дифференциальными уравнениями

$$\left.\begin{aligned}
&J_B \frac{d}{dt}\left(\dot\Theta + \omega_B\right) + J\Omega\left(\dot\Psi + \omega_D \operatorname{tg}\Theta + \omega_C\right)\cos\Theta + \\
&+ J_D\dot\Psi^2 \sin\Theta\cos\Theta - J_D\dot\Psi\left(\omega_D - \omega_C \operatorname{tg} 2\Theta\right)\cos 2\Theta = M_B; \\
&[J_{\text{н}} + (J_{\text{э}} + J_{\text{в}z})\cos^2\Theta + J_{\text{в}x}\sin^2\Theta]\frac{d}{dt}\left(\dot\Psi + \omega_C\right) - J\Omega\times \\
&\times\left(\dot\Theta + \omega_B\right)\cos\Theta - 2J_D\left(\dot\Psi + \omega_C\right)\dot\Theta\sin\Theta\cos\Theta + \\
&+ J_D\dot\Theta\omega_D\cos 2\Theta + J_D\sin\Theta\cos\Theta\frac{d\omega_D}{dt} + \\
&+ J_B\dot\Theta\omega_D - J_D\dot\Psi\omega_B\sin\Theta\cos\Theta = M_C.
\end{aligned}\right\} \quad (159)$$

Согласно зависимостям (37) углы Θ и Ψ поворотов гироскопа вокруг осей OB и OC подвеса состоят из постоянных величин ϑ_0 и ψ_0 и малых приращений ϑ и ψ. Подставляя зависимости (37) в уравнения (159) и опуская в них члены, содержащие квадраты малой величины ϑ, можем записать

$$\begin{aligned}
&J_B\frac{d}{dt}\left(\dot\vartheta + \omega_B\right) + J\Omega\left(\dot\psi + \omega_C\right)\cos\vartheta_0 - J\Omega\vartheta\left(\dot\psi + \omega_D\right)\times \\
&\times \sin\vartheta_0 + J\Omega\omega_D(\sin\vartheta_0 + \vartheta\cos\vartheta_0) + J_D\dot\psi^2(\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 + \vartheta\cos 2\vartheta) + \\
&+ J_D\dot\psi\left(\omega_C + 2\vartheta\omega_D\right)\sin 2\vartheta_0 - J_D\dot\psi\left(\omega_D - \vartheta\omega_C\right)\cos 2\vartheta_0 = M_B; \\
&[J_{\text{н}} + (J_{\text{э}} + J_{\text{в}z})\cos^2\vartheta_0 + J_{\text{в}x}\sin^2\vartheta_0]\frac{d}{dt}\left(\dot\psi + \omega_C\right) - \\
&- 2\left(J_{\text{э}} + J_{\text{в}z} - J_{\text{в}x}\right)\vartheta\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0\frac{d}{dt}\left(\dot\psi + \omega_C\right) - J\Omega\times \\
&\times\left(\dot\vartheta + \omega_B\right)\cos\vartheta_0 + J\Omega\vartheta\left(\dot\vartheta + \omega_B\right)\sin\vartheta_0 - 2J_D\left(\dot\psi + \omega_C\right)\times \\
&\times\dot\vartheta\left(\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 + \vartheta\cos 2\vartheta_0\right) + J_D\omega_B\left(\dot\vartheta - \vartheta\dot\psi\right)\cos 2\vartheta_0 - J_D\omega_B\times \\
&\times\left(2\vartheta\dot\vartheta + \dot\psi\right)\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 + J_D\left(\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 + \vartheta\cos 2\vartheta_0\right)\times \\
&\times\frac{d\omega_D}{dt} + J_B\dot\vartheta\omega_B = M_C.
\end{aligned}$$

Учитывая принятые ранее обозначения (38) и пренебрегая величинами $\vartheta\omega_D$, $\vartheta\omega_C$, $\vartheta\dot\psi$ и $\vartheta\dot\vartheta$, малыми по сравнению с угловыми скоростями ω_D, ω_C, $\dot\psi$ и $\dot\vartheta$, выделим, как и выше (§ 11), в полученной системе ее главные члены, сгруппировав их в левых

частях уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&J_B \frac{d}{dt}\left(\dot{\vartheta} + \omega_B\right) + J\Omega\left(\dot{\psi} + \omega_C\right)\cos\vartheta_0 + J\Omega\omega_D \times \\
&\times(\sin\vartheta_0 + \vartheta\cos\vartheta_0) - M_B = J\Omega\vartheta\left(\dot{\psi} + \omega_C\right) \times \\
&\times \sin\vartheta_0 - J_D\dot{\psi}^2(\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 + \vartheta\cos 2\vartheta_0) - J_D\dot{\psi} \times \\
&\times(\omega_C \sin 2\vartheta_0 - \omega_D\cos 2\vartheta_0); \\
&J_C \frac{d}{dt}\left(\dot{\psi} + \omega_C\right) - J\Omega\left(\dot{\vartheta} + \omega_B\right)\cos\vartheta_0 + J_D \times \\
&\times \sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 \frac{d\omega_D}{dt} - M_C = -J\Omega\vartheta\left(\dot{\vartheta} + \omega_B\right) \times \\
&\times \sin\vartheta_0 + 2J_D\vartheta\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 \frac{d}{dt}\left(\dot{\psi} + \omega_C\right) - J_D\vartheta \times \\
&\times \cos 2\vartheta_0 \frac{d\omega_D}{dt} + 2J_D\left(\dot{\psi} + \omega_C\right)\dot{\vartheta} \times \\
&\times(\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 + \vartheta\cos 2\vartheta_0) - J_D\omega_B \times \\
&\times\left(\dot{\vartheta}\cos 2\vartheta_0 - \dot{\psi}\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0\right) - J_B\dot{\vartheta}\omega_B.
\end{aligned}\right\} \quad (160)$$

Если в уравнениях (160), описывающих с принятой степенью точности движение гироскопа в кардановом подвесе относительно осей координат, вращающихся в пространстве, правые части, содержащие малые второстепенные члены, приравнять нулю, то получаемая система

$$\left.\begin{aligned}
&J_B \frac{d}{dt}\left(\dot{\vartheta} + \omega_B\right) + J\Omega\left(\dot{\psi} + \omega_C\right)\cos\vartheta_0 + J\Omega\omega_D \times \\
&\times(\sin\vartheta_0 + \vartheta\cos\vartheta_0) = M_B; \\
&J_C \frac{d}{dt}\left(\dot{\psi} + \omega_C\right) - J\Omega\left(\dot{\vartheta} + \omega_B\right)\cos\vartheta_0 + \\
&+ J_D\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 \frac{d\omega_D}{dt} = M_C
\end{aligned}\right\} \quad (161)$$

будет описывать рассматриваемое движение гироскопа с точностью до первого приближения. Во многих практических случаях угловые скорости ω_D, ω_B и ω_C изменяются столь медленно, что их производные по времени мало отличаются от нуля, поэтому система (161) может быть переписана в еще более упрощенном виде:

$$\left.\begin{aligned}
&J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\left(\dot{\psi} + \omega_C\right)\cos\vartheta_0 + J\Omega\omega_D(\sin\vartheta_0 + \vartheta\cos\vartheta_0) = M_B; \\
&J_C\ddot{\psi} - J\Omega\left(\dot{\vartheta} + \omega_B\right)\cos\vartheta_0 = M_C.
\end{aligned}\right\} \quad (162)$$

Исследовав уравнения (161) или (162), представляется возможным выяснить основной характер движения гироскопа в подвижной системе координат при различных возмущениях. Необходимо

иметь в виду, что при $\vartheta_0 \neq 0$, когда $\sin\vartheta_0 \gg \vartheta\cos\vartheta_0$, третий член первого уравнения систем (161) и (162) будет определяться величиной $J\Omega\omega_D\sin\vartheta_0$. При $\vartheta_0 = 0$ это слагаемое будет характеризоваться величиной $J\Omega\omega_D\vartheta$.

§ 26. ИССЛЕДОВАНИЕ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА В ПОДВИЖНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Представим, что гироскоп установлен в подвижной системе координат таким образом, что его главная ось составляет с перпендикуляром OD угол ϑ_0, отличный от нуля и $\frac{\pi}{2}$. При этом условии входящее в уравнения (162) слагаемое $\vartheta\cos\vartheta_0$ будет величиной второго порядка малости по сравнению с $\sin\vartheta_0$. Опуская на этом основании величину $\vartheta\cos\vartheta_0$ и предполагая, что внешние силы не создают моментов относительно осей подвеса гироскопа ($M_B = M_C = 0$), перепишем систему уравнений (162) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\psi}\cos\vartheta_0 &= -J\Omega(\omega_C\cos\vartheta_0 + \omega_D\sin\vartheta_0); \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\dot{\vartheta}\cos\vartheta_0 &= J\Omega\omega_B\cos\vartheta_0. \end{aligned}\right\} \quad (163)$$

Полученная система неоднородных дифференциальных уравнений (163) имеет частные решения

$$\dot{\vartheta}_r = -\omega_B; \quad \dot{\psi}_r = -\omega_C - \omega_D\,\mathrm{tg}\,\vartheta_0, \quad (164)$$

из которых следует

$$\vartheta_r = -\int\omega_B\,dt; \quad \psi_r = -\int(\omega_C + \omega_D\,\mathrm{tg}\,\vartheta_0)\,dt. \quad (165)$$

Нетрудно убедиться, что система соответствующих однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\psi}\cos\vartheta_0 &= 0, \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\dot{\vartheta}\cos\vartheta_0 &= 0 \end{aligned}$$

ничем не отличается от рассмотренной выше системы (50), решение которой определялось выражениями (57).

Таким образом, общее решение системы уравнений (163) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \vartheta &= C_1\cos nt + C_2\sin nt + C_3 - \int\omega_B\,dt; \\ \psi &= \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}(C_1\sin nt - C_2\cos nt) + C_4 - \int(\omega_C + \omega_D\,\mathrm{tg}\,\vartheta_0)\,dt. \end{aligned} \quad (166)$$

Первые три члена каждого полученного выражения характеризуют нутационные колебания гироскопа (см. § 14). Последние члены выражений (166) определяют систематические уходы гироскопа в подвижной системе координат $O\xi\eta\zeta$. Необходимо отметить,

что угловые скорости этих уходов, определяемые по формулам (164), обусловливаются двумя принципиально различными причинами. Представим, что $\vartheta_0 = 0$. При этом условии угловые скорости гироскопа в системе координат $O\xi\eta\zeta$, как это следует из выражений (164), будут равны

$$\dot{\vartheta} = -\omega_B; \quad \dot{\psi} = -\omega_C. \tag{167}$$

В данном случае скорости $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\psi}$ поворота гироскопа вокруг осей подвеса OB и OC относительно системы $O\xi\eta\zeta$ (рис. 52) будут равны по величине, но противоположны по направлению угловым скоростям ω_B и ω_C поворота в пространстве вокруг тех же осей OB и OC самой координатной системы $O\xi\eta\zeta$. Пусть, например, в начальный момент времени при $t = 0$ (рис. 53, *а*) главная ось OA гироскопа была совмещена с осью $O\xi$ и направлена на неподвижную в мировом пространстве звезду L. Через некоторое время $t=\tau$ вследствие вращения в пространстве вокруг наружной оси подвеса гироскопа с угловой скоростью ω_C координатные оси $O\xi\eta\zeta$ займут новое положение, показанное на рис. 53, *б*. При этом ось $O\xi$ отклонится от направления OL на угол $\int_0^\tau \omega_C\,dt$. Главная ось OA гироскопа, сохраняя неизменным свое положение в пространстве, совмещенное с направлением OL, к моменту времени $t = \tau$ составит с осью $O\xi$ угол ψ, равный согласно формулам (167)

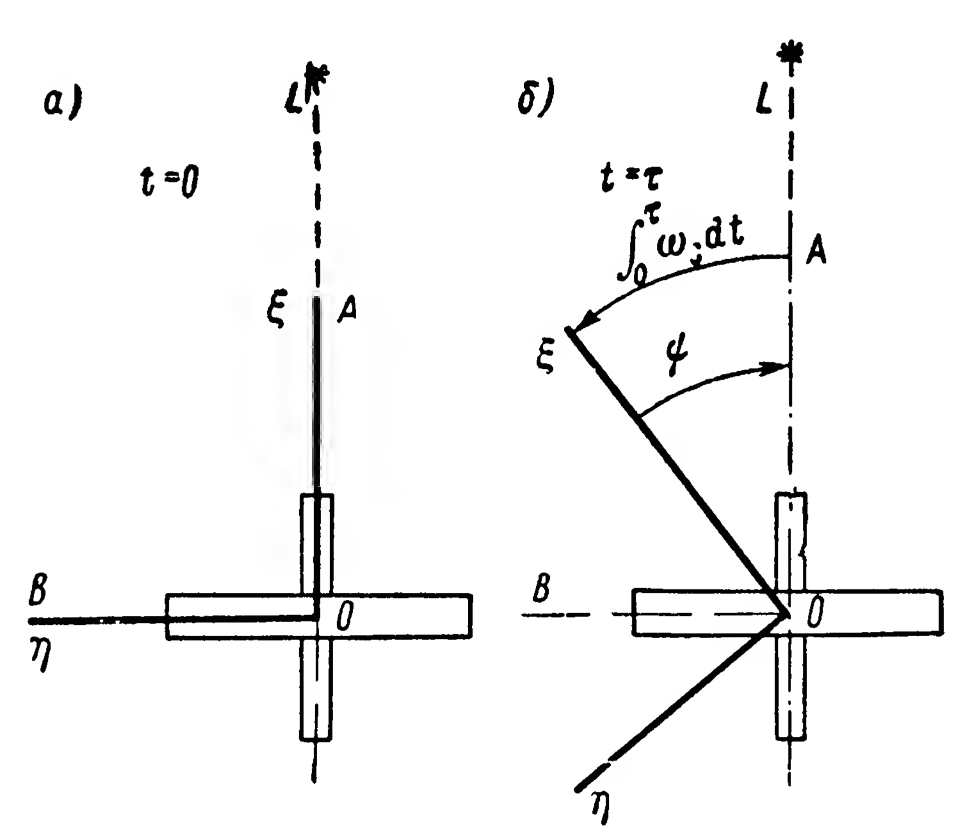


Рис. 53. К объяснению видимого ухода гироскопа.

$$\psi = -\int_0^\tau \omega_C\,dt.$$

Таким образом, при отсутствии сил трения в опорах вращение координатных осей $O\xi\eta\zeta$ вокруг осей подвеса OB и OC не будет влиять на положение гироскопа в пространстве. Поворачиваясь вокруг осей подвеса, координатная система изменяет лишь свое положение по отношению к гироскопу. Вот почему скорости $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\psi}$ перемещения гироскопа относительно подвижной системы координат, определяемые по выражениям (167), принято называть угловыми скоростями видимого ухода гироскопа.

Необходимо отметить, что для гироскопических приборов, которые не имеют специальных устройств, удерживающих кольца карданова подвеса во взаимно-перпендикулярном положении, формулы (167) справедливы лишь для весьма непродолжительных отрезков времени. Как только перпендикулярность колец карданова подвеса будет нарушена и угол ϑ_0 станет отличным от нуля, гироскоп начнет перемещаться относительно подвижной координатной системы с угловыми скоростями, определяемыми по выражениям (164).

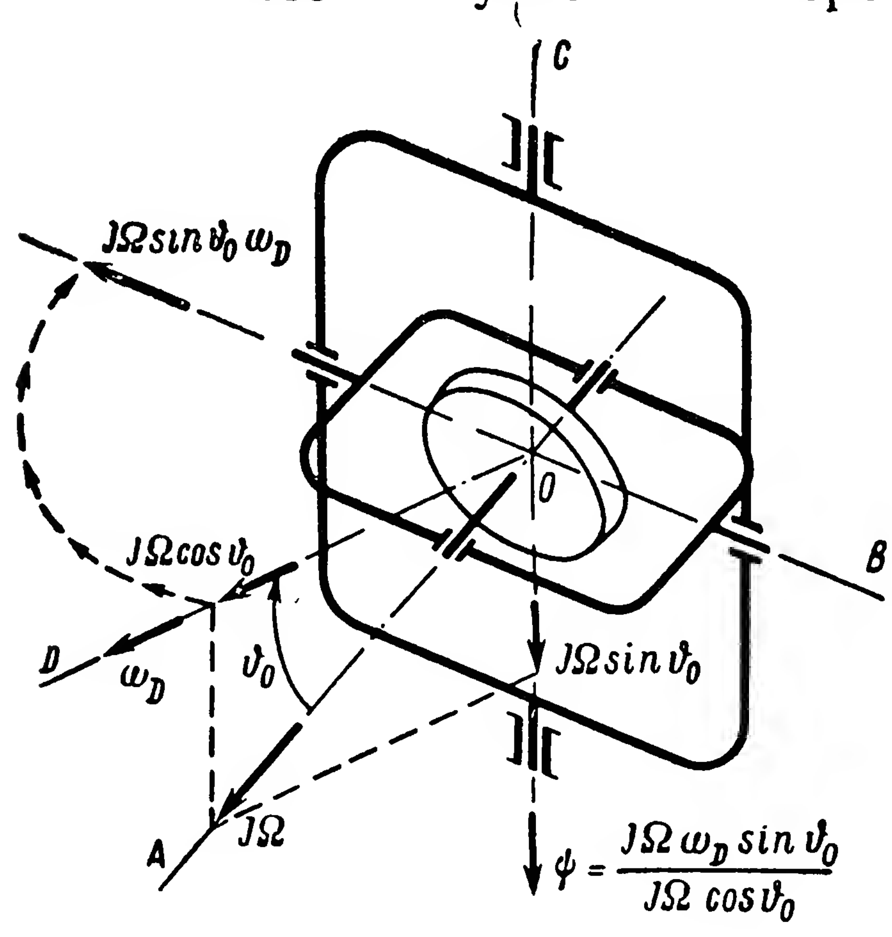


Рис. 54. Прецессия гироскопа, порождаемая его вынужденным поворотом вокруг оси OD.

Из выражений (164) следует, что угловая скорость относительного поворота гироскопа вокруг оси OC изменится на величину $-\omega_D \operatorname{tg}\vartheta_0$. Движение гироскопа с угловой скоростью $-\omega_D \operatorname{tg}\vartheta_0$ порождается его вынужденным поворотом совместно с координатной системой $O\xi\eta\zeta$ вокруг оси OD с угловой скоростью ω_D.

Вектор кинетического момента $J\Omega$ гироскопа, совмещенный с его главной осью OA, составляет с перпендикуляром OD угол ϑ_0 (рис. 54). При сообщении ротору вращения со скоростью ω_D гироскоп будет вынужден поворачиваться вокруг двух осей одновременно: вокруг оси OA с угловой скоростью Ω и вокруг оси OD с угловой скоростью ω_D. В результате такого сложного движения возникает момент гироскопической реакции (см. § 7), вектор которого равен $J\Omega\omega_D \sin\vartheta_0$ и совмещен с отрицательным направлением оси OB. Взаимодействие гироскопического момента и составляющей $J\Omega \cos\vartheta_0$ кинетического момента $J\Omega$ и вызывает прецессионное движение гироскопа в пространстве вокруг его наружной оси OC с угловой скоростью, равной согласно (32)

$$|\dot\psi| = \frac{J\Omega\omega_D \sin\vartheta_0}{J\Omega \cos\vartheta_0} = \omega_D \operatorname{tg}\vartheta_0$$

и направленной в сторону отрицательных значений угла ψ.

Как видим, при вращении корпуса гироскопа в пространстве его ротору в общем случае сообщается вынужденный поворот вокруг оси, не совпадающей с главной. В результате этого гироскоп начинает вращаться вокруг наружной оси OC с угловой скоростью $\dot\psi = -\omega_D \operatorname{tg}\vartheta_0$, что обусловливает его отклонение от первоначального положения в пространстве.

§ 27. ДВИЖЕНИЕ ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ, ОСНОВАНИЕ КОТОРОГО ЗАКРЕПЛЕНО НЕПОДВИЖНО НА ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОСКОСТЕЙ ГОРИЗОНТА И МЕРИДИАНА

Во многих практических случаях необходимо иметь ясное представление о характере движения гироскопа по отношению к ориентирам, сохраняющим неизменное положение на земной поверхности. Земной шар непрерывно вращается вокруг своей оси, и земные ориентиры, участвуя в этом вращении, также непрерывно изменяют свое положение в мировом пространстве. Поэтому для выяснения законов движения гироскопа относительно земных ориентиров необходимо (см. § 26) составить суждение о характере движения в мировом пространстве самих ориентиров.

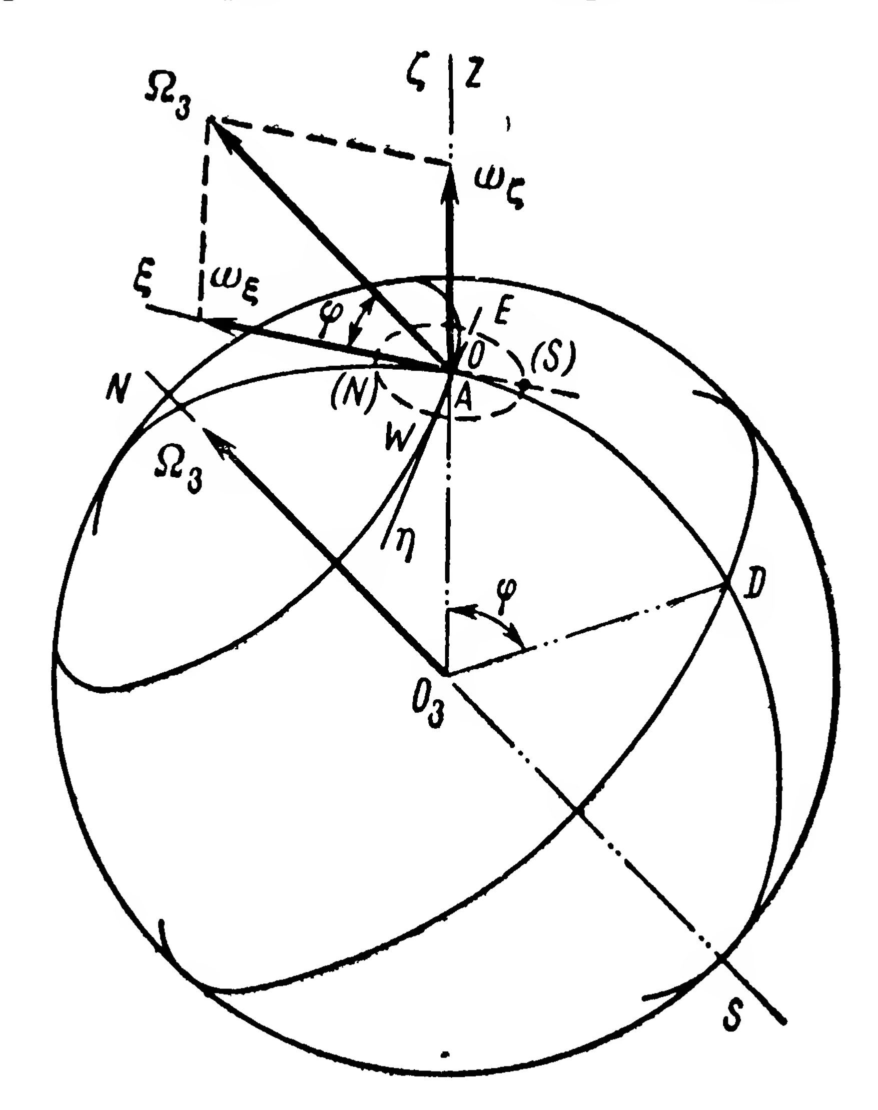


Рис. 55. К определению вращения в пространстве плоскостей горизонта и меридиана.

Представим себя наблюдателем, находящимся на Земле в какой-либо точке A (рис. 55). Вокруг себя мы будем видеть некоторую поверхность, называемую обычно видимым горизонтом. Эта поверхность ограничивается линией горизонта $(N)W(S)E$, по которой видимый горизонт как бы сливается с кажущимся нам шарообразным небесным сводом. По сравнению с радиусом Земли размеры видимого горизонта ничтожно малы, поэтому его поверхность отождествляют с плоскостью, касательной к земной поверхности в данной точке A. Эту плоскость называют плоскостью горизонта.

Восточная и западная стороны горизонта разделяются полуденной линией $(N)(S)$, проходящей через точку наблюдения A и точки севера (N) и юга (S). Точка Z, находящаяся вертикально над наблюдателем, называется зенитом, а линия AZ, соединяющая точку зенита Z с местом наблюдения A, — вертикалью данного места. Если не учитывать, что Земля несколько сплюснута у полюсов, и полагать ее идеальным шаром, то вертикаль AZ можно считать совмещенной с радиусом Земли O_3A. Вертикальная плоскость $(N)AZ$, проходящая через точку наблюдения A, ее зенит Z и точки севера (N) и юга (S), является плоскостью меридиана данного места.

Неподвижные на земной поверхности ориентиры сохраняют неизменным свое положение относительно плоскостей горизонта и меридиана. Поэтому неподвижную на земной поверхности координатную систему $O\xi\eta\zeta$ будем ориентировать таким образом, чтобы ось $O\xi$ была направлена по полуденной линии (N) (S) на север (N), ось $O\eta$ — в плоскости горизонта на запад W, а ось $O\zeta$ совмещена с вертикалью AZ.

Оставаясь неподвижной относительно земных ориентиров, координатная система $O\xi\eta\zeta$ будет участвовать во вращении Земли, которая совершает поворот вокруг своей оси NS за 24 часа, а точнее, за 23 часа 56 минут и 4,1 секунды, непрерывно вращаясь с постоянной угловой скоростью

$$\Omega_з = \frac{2\pi}{86164,1} = 0,729 \cdot 10^{-4} \text{ сек.}^{-1}. \tag{168}$$

Это так называемое суточное вращение Земли будет обусловливать непрерывное изменение положения плоскостей горизонта и меридиана в пространстве.

В общем случае координатная система $O\xi\eta\zeta$ будет вращаться в пространстве одновременно вокруг полуденной линии (N) (S) и вертикали AZ. Действительно, вектор угловой скорости $\overline{\Omega}_з$ суточного вращения Земли всегда совмещен с плоскостью меридиана и составляет с полуденной линией (N) (S) угол, равный широте места φ. Это обусловлено (рис. 55) перпендикулярностью осей NS и $O_зD$, $O\xi$ и $O\zeta$. Следовательно, проекции вектора $\overline{\Omega}_з$ на оси координатной системы $O\xi\eta\zeta$ определятся выражениями

$$\omega_\xi = \Omega_з \cos\varphi; \quad \omega_\eta = 0; \quad \omega_\zeta = \Omega_з \sin\varphi. \tag{169}$$

Равенства (169) подтверждают, что при расположении точки A под любой географической широтой φ, плоскости горизонта и меридиана данного пункта земной поверхности одновременно вращаются вокруг полуденной линии (N) (S) с угловой скоростью ω_ξ и вертикали AZ с угловой скоростью ω_ζ. При расположении точки A на экваторе, где $\varphi = 0$, система координат $O\xi\eta\zeta$ вращается только вокруг полуденной линии (N) (S) с угловой скоростью $\omega_\xi = \Omega_з$. Если же точка A будет находиться на полюсе, где $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то оси $O\xi\eta\zeta$ будут вращаться лишь вокруг вертикали AZ с угловой скоростью ω_ζ, равной в данном случае также угловой скорости $\Omega_з$ суточного вращения Земли. Заметим, что ω_ξ и ω_ζ часто называют горизонтальной и вертикальной составляющими угловой скорости суточного вращения Земли.

Выясним, с какими скоростями гироскоп в кардановом подвесе, свободный от воздействия моментов внешних сил, будет перемещаться относительно плоскостей горизонта и меридиана. Установим его неподвижно на земной поверхности так, чтобы наружная ось OC (рис. 52) совместилась с вертикалью $O\zeta$. В этом случае

$\lambda = \sigma = 0$ и, следовательно, угловые скорости ω_B, ω_C и ω_D вращения в пространстве системы $O\xi\eta\zeta$ вокруг осей OB, OC и OD будут согласно (153) определяться выражениями

$$\omega_B = -\omega_\xi \sin \Psi + \omega_\eta \cos \Psi;$$
$$\omega_C = \omega_\zeta;$$
$$\omega_D = \omega_\xi \cos \Psi + \omega_\eta \sin \Psi.$$

Учитывая условие (37), перепишем последние равенства, пренебрегая в них величинами высших порядков малости:

$$\left.\begin{aligned} \omega_B &= -\omega_\xi \sin \psi_0 + \omega_\eta \cos \psi_0; \\ \omega_C &= \omega_\zeta; \\ \omega_D &= \omega_\xi \cos \psi_0 + \omega_\eta \sin \psi_0. \end{aligned}\right\} \quad (170)$$

Подставив в равенства (170) значения (169) угловых скоростей вращения в пространстве координатной системы $O\xi\eta\zeta$, ориентированной по плоскостям горизонта и меридиана (рис. 55), получим

$$\left.\begin{aligned} \omega_B &= -\Omega_з \cos \varphi \sin \psi_0; \\ \omega_C &= \Omega_з \sin \varphi; \\ \omega_D &= \Omega_з \cos \varphi \cos \psi_0. \end{aligned}\right\} \quad (171)$$

Подставив (171) в (164), найдем угловые скорости систематического отклонения гироскопа от плоскостей горизонта и меридиана

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= -\omega_B = \Omega_з \cos \varphi \sin \psi_0; \\ \dot{\psi} &= -\omega_C - \omega_D \operatorname{tg} \vartheta_0 = -\Omega_з \sin \varphi - \Omega_з \cos \varphi \cos \psi_0 \operatorname{tg} \vartheta_0, \end{aligned}\right\} \quad (172)$$

вызываемые суточным вращением Земли.

Уравнения (172) дают возможность в каждом конкретном случае выяснить характер отклонения гироскопа, установленного неподвижно на земной поверхности, от плоскостей горизонта и меридиана. Известно, что углы Θ и Ψ (рис. 52), определяющие эти отклонения, состоят согласно равенствам (37) из двух слагаемых: $\Theta = \vartheta_0 + \vartheta$; $\Psi = \psi_0 + \psi$.

Для вычисления их изменений с течением времени приближенными методами численного интегрирования [1] разобьем период времени t, в течение которого необходимо определить отклонение гироскопа, на k равных промежутков Δt. Полагаем, что в каждый промежуток Δt_1, Δt_2, Δt_3, . . ., Δt_k углы Θ и Ψ постоянны и равны соответствующим начальным значениям ϑ_{01}, ϑ_{02}, ϑ_{03}, . . ., ϑ_{0k} и ψ_{01}, ψ_{02}, ψ_{03}, . . ., ψ_{0k}. При этом условии в каждом промежутке времени приращения углов ϑ и ψ будут происходить с постоянными

[1] См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Т. I, Гостехиздат, 1948, стр. 259.

угловыми скоростями $\dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2, \dot{\vartheta}_3, \ldots, \dot{\vartheta}_k$ и $\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dot{\psi}_3, \ldots, \dot{\psi}_k$. Поэтому каждые последующие начальные значения углов ϑ_0 и ψ_0 будут определяться зависимостями

$$\left.\begin{array}{ll}\vartheta_{02} = \vartheta_{01} + \dot{\vartheta}_1 \Delta t; & \psi_{02} = \psi_{01} + \dot{\psi}_1 \Delta t; \\ \vartheta_{03} = \vartheta_{02} + \dot{\vartheta}_2 \Delta t; & \psi_{03} = \psi_{02} + \dot{\psi}_2 \Delta t; \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (173)$$

Чем меньшими будут значения Δt, тем точнее определится рассматриваемое отклонение гироскопа от плоскостей горизонта и меридиана при численном интегрировании.

Пример 13. Определить изменения во времени углов отклонения главной оси гироскопа в кардановом подвесе от плоскостей горизонта и меридиана. Гироскоп установлен неподвижно на земной поверхности под широтой $\varphi = 50°$; его наружная ось OC совмещена с вертикалью $O\zeta$ (рис. 52), а главная ось OA в начальный момент времени совмещена с полуденной линией $O\xi$.

Угловые скорости (172) отклонения главной оси гироскопа от плоскостей горизонта и меридиана, учитывая значение угловой скорости Ω_3 суточного вращения Земли (168), будут определяться выражениями

$$\dot{\vartheta} = \Omega_3 \cos\varphi \sin\psi_0 = 0{,}729\cdot 10^{-4} \cos 50° \sin\psi_0 = 0{,}469\cdot 10^{-4} \sin\psi_0 \text{ сек.}^{-1};$$

$$\dot{\psi} = -\Omega_3 \sin\varphi - \Omega_3 \cos\varphi \cos\psi_0 \operatorname{tg}\vartheta_0 = -0{,}729\cdot 10^{-4} (\sin 50° + \cos 50° \cos\psi_0 \operatorname{tg}\vartheta_0) = -0{,}558\cdot 10^{-4} - 0{,}469\cdot 10^{-4} \cos\psi_0 \operatorname{tg}\vartheta_0 \text{ сек.}^{-1},$$

или соответственно

$$\dot{\vartheta} = 0{,}469\cdot 10^{-4}\cdot 57{,}3\cdot 60\cdot \sin\psi_0 = 0{,}16 \sin\psi_0 \text{ град./мин.};$$

$$\dot{\psi} = -10^{-4} (0{,}558 + 0{,}469 \cos\psi_0 \operatorname{tg}\vartheta_0)\, 57{,}3\cdot 60 = -0{,}19 - 0{,}16 \cos\psi_0 \operatorname{tg}\vartheta_0 \text{ град./мин.}$$

Выбрав $\Delta t = 15$ мин., численно проинтегрируем полученные выражения угловых скоростей в пределах каждого промежутка времени и определим по формулам (173) изменения углов отклонения гироскопа. Результаты вычислений для рассматриваемого случая приведены в табл. 1.

Таблица 1

Углы отклонения главной оси гироскопа от плоскостей горизонта и меридиана при вертикальном расположении его наружной оси подвеса и неподвижном положении его корпуса на земной поверхности

Время мин.	Промежуток времени, мин.	Углы отклонения гироскопа, град.		Угловые скорости отклонения гироскопа, град/мин.	
t	Δt	ϑ_0	ψ_0	$\dot{\vartheta}$	$\dot{\psi}$
0	0	0	0	0	—0,19
15	15	0	— 2,25	0,007	—0,19
30	15	0,11	— 4,50	0,013	—0,191
45	15	0,31	— 7,37	0,021	—0,1914
60	15	0,63	—10,23	. . .	. . .

По данным таблицы могут быть построены графики изменений во времени углов отклонения главной оси гироскопа в кардановом подвесе от плоскостей горизонта и меридиана.

Аналогично могут быть построены графики углов отклонения главной оси гироскопа, оси которого в начальный момент расположены произвольно по отношению к плоскостям горизонта и меридиана.

§ 28. ОТКЛОНЕНИЕ ОТ ЗЕМНЫХ ОРИЕНТИРОВ ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ, ОСНОВАНИЕ КОТОРОГО НЕПОДВИЖНО НА ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ, А ОСИ ПОДВЕСА ЗАНИМАЮТ ПРОИЗВОЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим отклонение главной оси гироскопа от земных ориентиров в более общем случае, когда его наружная ось подвеса OC (рис. 52) составляет с вертикалью $O\zeta$ произвольный угол λ, а ее проекция OD на плоскость горизонта $\xi O\eta$ в начальный момент времени расположена под углом σ к полуденной линии $O\xi$. При таком расположении гироскопа угловые скорости ω_B, ω_C и ω_D вращения в пространстве системы координат $O\xi\eta\zeta$ будут определяться по выражениям (153). Учитывая зависимости (37) и пренебрегая в них величинами высших порядков малости, будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
\omega_B &= -\omega_\xi(\sin\sigma\cos\psi_0 + \cos\sigma\cos\lambda\sin\psi_0) + \\
&\quad + \omega_\eta(\cos\sigma\cos\psi_0 - \sin\sigma\cos\lambda\sin\psi_0) + \omega_\zeta\sin\lambda\sin\psi_0; \\
\omega_C &= \omega_\xi\cos\sigma\sin\lambda + \omega_\eta\sin\sigma\sin\lambda + \omega_\zeta\cos\lambda; \\
\omega_D &= \omega_\xi(\cos\sigma\cos\lambda\cos\psi_0 - \sin\sigma\sin\psi_0) + \\
&\quad + \omega_\eta(\sin\sigma\cos\lambda\cos\psi_0 + \cos\sigma\sin\psi_0) - \omega_\zeta\sin\lambda\cos\psi_0.
\end{aligned}\right\} \quad (174)$$

Подставив в (174) значения угловых скоростей ω_ξ, ω_η и ω_ζ из (169), для случая совмещения подвижной координатной системы $O\xi\eta\zeta$ (рис. 55) с плоскостями горизонта и меридиана будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
\omega_B &= -\Omega_з\cos\varphi(\sin\sigma\cos\psi_0 + \cos\sigma\cos\lambda\sin\psi_0) + \\
&\quad + \Omega_з\sin\varphi\sin\lambda\sin\psi_0; \\
\omega_C &= \Omega_з\cos\varphi\cos\sigma\sin\lambda + \Omega_з\sin\varphi\cos\lambda; \\
\omega_D &= \Omega_з\cos\varphi(\cos\sigma\cos\lambda\cos\psi_0 - \sin\sigma\sin\psi_0) - \\
&\quad - \Omega_з\sin\varphi\sin\lambda\cos\psi_0.
\end{aligned}\right\} \quad (175)$$

Для определения угловых скоростей отклонения оси гироскопа относительно земных ориентиров воспользуемся формулами (164).

Подставив в них значения угловых скоростей (175), найдем

$$\left.\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= \Omega_з \cos\varphi\,(\sin\sigma\cos\psi_0 + \cos\sigma\cos\lambda\sin\psi_0) - \\ &\quad - \Omega_з \sin\varphi\sin\lambda\sin\psi_0; \\ \dot{\psi} &= -\Omega_з\cos\varphi\cos\sigma\sin\lambda - \Omega_з\sin\varphi\cos\lambda - \\ &\quad - \Omega_з\cos\varphi\,(\cos\sigma\cos\lambda\cos\psi_0 - \sin\sigma\sin\psi_0)\,\mathrm{tg}\,\vartheta_0 + \\ &\quad + \Omega_з\sin\varphi\sin\lambda\cos\psi_0\,\mathrm{tg}\,\vartheta_0.\end{aligned}\right\} \qquad (176)$$

Численно проинтегрировав выражения (176), определим изменения углов отклонения главной оси от земных ориентиров.

§ 29. ДВИЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ЗЕМНЫХ ОРИЕНТИРОВ ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ ПРИ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ЕГО ОСНОВАНИЯ У ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПО ЛОКСОДРОМИИ

При установке гироскопа на подвижном объекте точка его подвеса уже не будет оставаться неподвижной относительно земной поверхности. Перемещаясь вместе с подвижным объектом, гироскоп будет отклоняться от земных ориентиров с угловыми скоростями, отличными от скоростей, определяемых по выражениям (176).

Представим, что гироскоп в кардановом подвесе установлен на летательном аппарате, движущемся относительно земной поверхности со скоростью V (рис. 56). В общем случае вектор $\bar{V}$, характеризующий скорость и направление движения центра тяжести летательного аппарата, может составлять с плоскостью горизонта $\xi O\eta$ угол тангажа β и с плоскостью меридиана $\xi O\zeta$ курс α. Такое движение состоит из трех перемещений: вдоль вертикали $O\zeta$ к зениту Z со скоростью $V_Z = V\sin\beta$, вдоль полуденной линии $O\xi$ к северу N со скоростью $|V_N = V_г\cos\alpha = V\cos\beta\cos\alpha$ и по параллели вдоль оси $O\eta$ к западу W со скоростью $V_W = V_г\sin\alpha = V\cos\beta\sin\alpha$.

Вертикальная составляющая V_Z характеризует скорость изменения высоты h центра тяжести летательного аппарата над точкой A земной поверхности, расположенной на уровне моря под широтой φ. Если в точке старта высота места равна h_0, то дальнейшее изменение высоты полета h будет происходить по закону

$$h = h_0 + \int V_Z dt = h_0 + \int V\sin\beta\,dt \qquad (177)$$

и, следовательно, удаление центра тяжести объекта от центра $O_з$ Земли, характеризуемое радиусом-вектором R, согласно (1) определится выражением

$$R = R_з + h_0 + \int V\sin\beta\,dt. \qquad (178)$$

Меридиональная составляющая V_N характеризует скорость перемещения подвижного объекта в плоскости меридиана $\xi O \zeta$. Такое перемещение представляет собой вращение центра тяжести объекта вокруг центра Земли $O_з$ с угловой скоростью

$$\omega_м = \frac{V \cos \beta \cos \alpha}{R}. \quad (179)$$

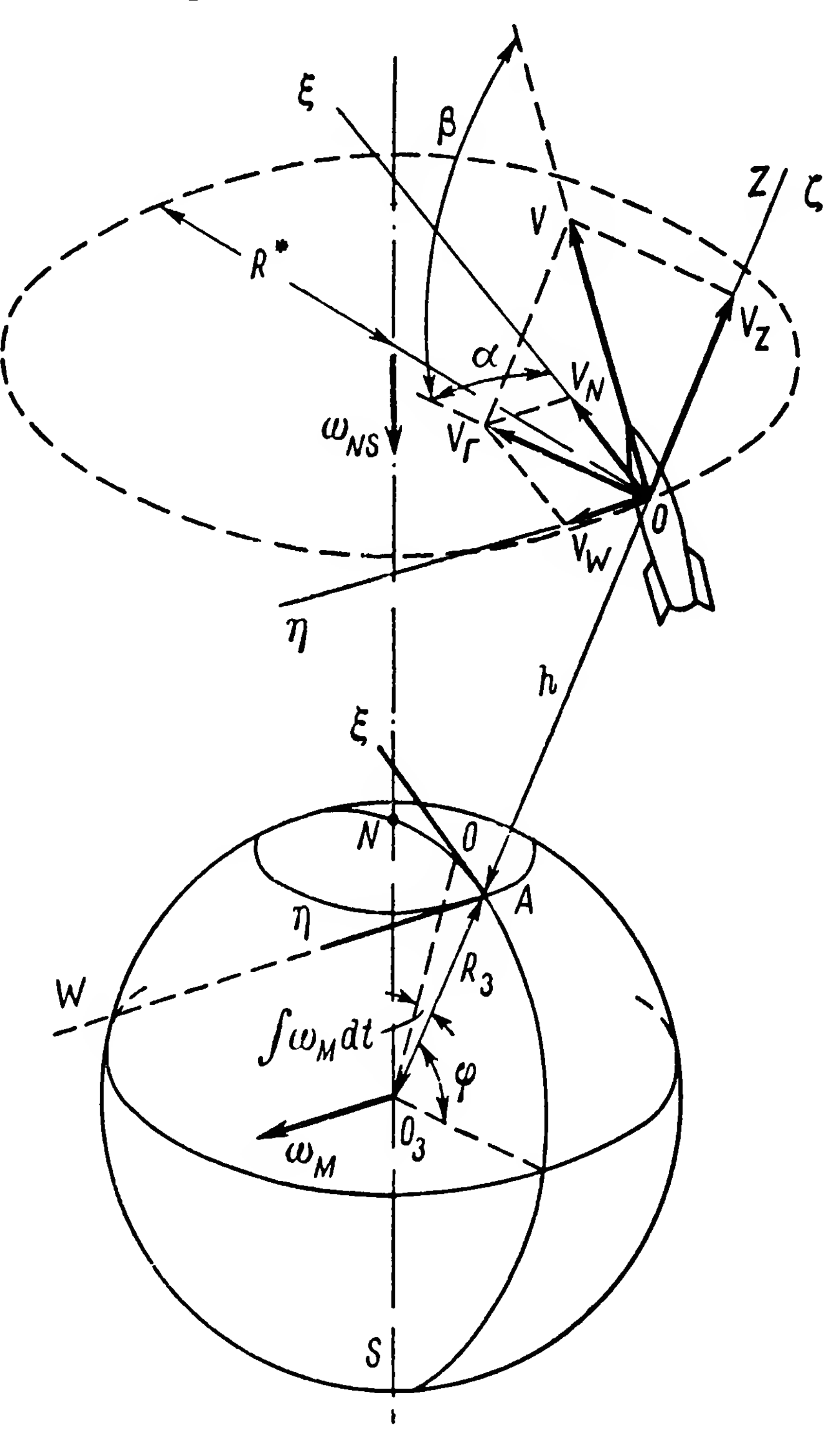


Рис. 56. К определению вращения центра тяжести объекта вокруг земного шара.

Вращение объекта в плоскости меридиана $\xi O \zeta$ (рис. 56) вызывает непрерывное изменение географической широты φ того пункта земной поверхности, над которым в данный момент находится объект. Если в точке старта широта места была равна φ_0, то дальнейшее ее изменение будет подчиняться зависимости

$$\varphi = \varphi_0 + \int \omega_м dt,$$

или, учитывая равенство (179),

$$\varphi = \varphi_0 + \int \frac{V \cos \beta \cos \alpha}{R} dt. \quad (180)$$

Наконец, составляющая V_W характеризует скорость движения центра тяжести объекта при перемещении его по параллели. Такое движение представляет собой вращение центра тяжести объекта вокруг земной оси NS по дуге окружности радиуса

$$R^* = R \cos \varphi$$

с угловой скоростью

$$\omega_{NS} = -\frac{V_W}{R^*} = -\frac{V \cos \beta \sin \alpha}{R \cos \varphi}. \quad (181)$$

Спроектируем угловые скорости $\overline{\omega}_м$ и $\overline{\omega}_{NS}$ на координатные оси $O\xi\eta\zeta$, ориентированные по плоскостям горизонта и меридиана, и учтем, что направление вектора $\overline{\omega}_м$ перпендикулярно плоскости меридиана $\xi O \zeta$; в результате будем иметь

$$\omega_\xi = -\omega_{NS} \cos \varphi; \quad \omega_\eta = \omega_м; \quad \omega_\zeta = -\omega_{NS} \sin \varphi,$$

или, подставляя значения входящих в полученные равенства величин из выражений (179) и (181),

$$\left.\begin{aligned} \omega_\xi &= -\frac{V\cos\beta\sin\alpha}{R};\\ \omega_\eta &= \frac{V\cos\beta\cos\alpha}{R};\\ \omega_\zeta &= -\frac{V\cos\beta\sin\alpha}{R}\operatorname{tg}\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (182)$$

Сумма проекций (182) и (169) определяет угловые скорости

$$\left.\begin{aligned} \omega_\xi &= \Omega_з\cos\varphi - \frac{V\cos\beta\sin\alpha}{R};\\ \omega_\eta &= \frac{V\cos\beta\cos\alpha}{R};\\ \omega_\zeta &= \Omega_з\sin\varphi - \frac{V\cos\beta\sin\alpha}{R}\operatorname{tg}\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (183)$$

с которыми координатная система $O\xi\eta\zeta$ будет поворачиваться в пространстве вокруг своего начала O, совмещенного с точкой подвеса гироскопа.

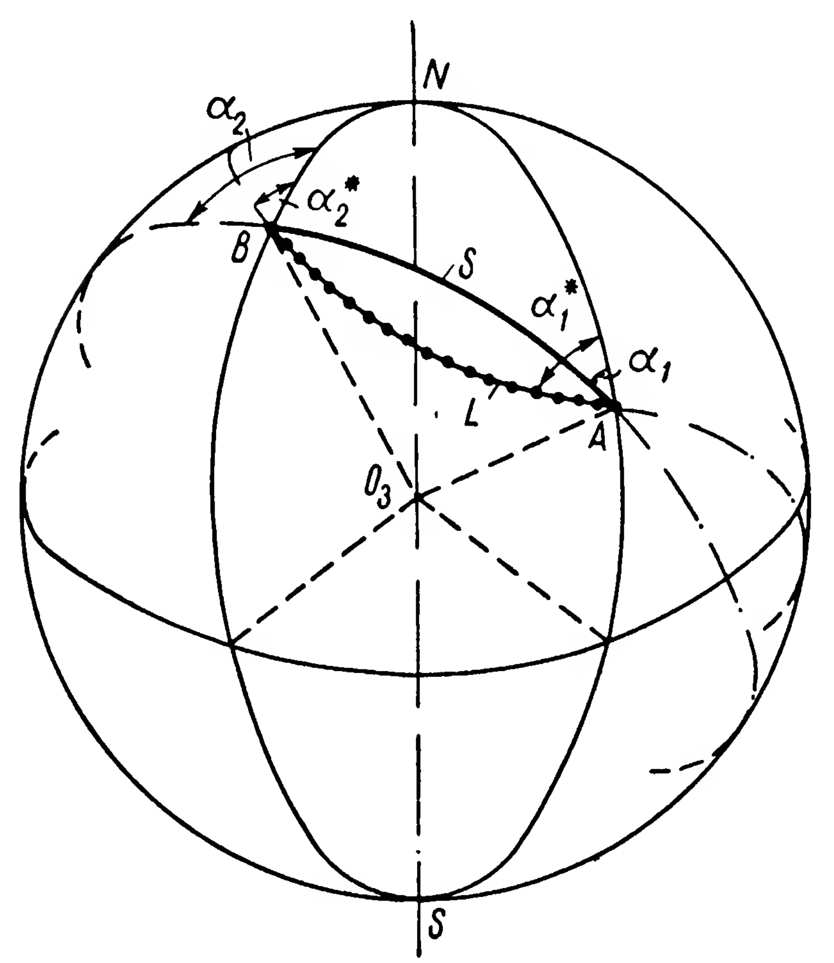


Рис. 57. Перемещения по ортодромии и локсодромии.

Между двумя пунктами A и B на земной поверхности (рис. 57) объект может перемещаться по двум принципиально различным траекториям. Первая траектория, называемая ортодромией, является кратчайшим расстоянием между пунктами A и B. Она представляет собой дугу окружности S, расположенную в плоскости большого круга, которая проходит через точки $O_з$, A и B. Центр окружности S совмещен с центром Земли $O_з$. При перемещении по ортодромии курс объекта непрерывно изменяется, так как $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Вторая траектория, называемая локсодромией, представляет более длинный путь L между пунктами A и B. При перемещении по локсодромии объект движется с постоянным курсом, так как $\alpha_1^* = \alpha_2^* = \alpha^* = \text{const}$.

Рассмотрим характер изменения углов отклонения гироскопа от земных ориентиров при движении его основания относительно земной поверхности по локсодромии. Представим, что гироскоп

установлен на корабле (рис. 58), движущемся с постоянным курсом α к плоскости меридиана $\xi O \zeta$ и постоянной скоростью V. В этом случае угловые скорости (183) вращения в пространстве координатных осей, совмещенных с плоскостями горизонта и меридиана, будут равны

$$\omega_\xi = \Omega_з \cos\varphi - \frac{V \sin\alpha}{R_з};$$

$$\omega_\eta = \frac{V \cos\alpha}{R_з};$$

$$\omega_\zeta = \Omega_з \sin\varphi - \frac{V \sin\alpha}{R_з} \operatorname{tg}\varphi.$$

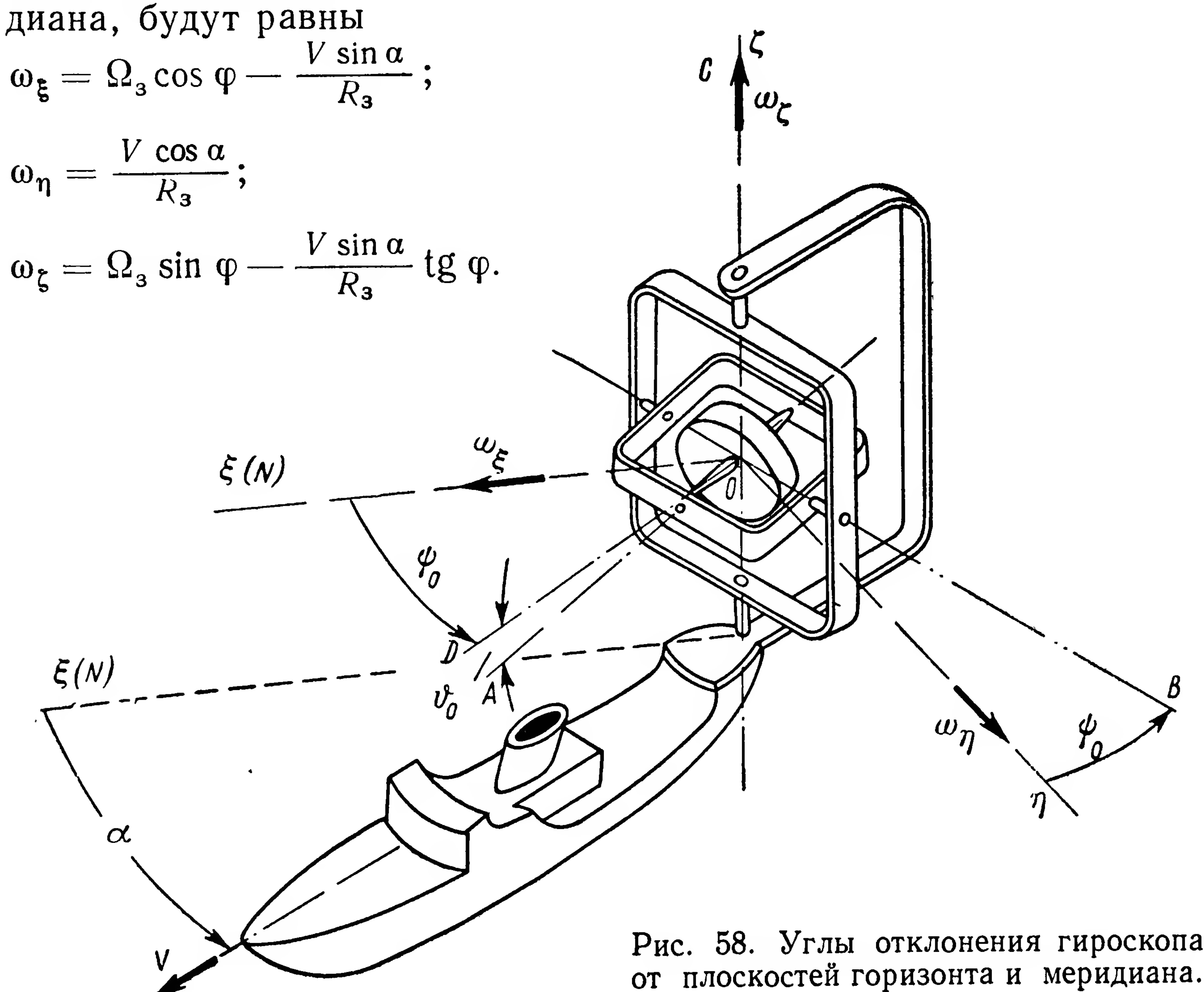


Рис. 58. Углы отклонения гироскопа от плоскостей горизонта и меридиана.

Следовательно, угловые скорости системы отсчета $O\xi\eta\zeta$ при ее вращении в пространстве вокруг осей OB, OC и OD в соответствии с равенствами (170) определятся выражениями

$$\omega_B = -\Omega_з \cos\varphi \sin\psi_0 + \frac{V}{R_з} \cos(\alpha - \psi_0);$$

$$\omega_C = \Omega_з \sin\varphi - \frac{V \sin\alpha}{R_з} \operatorname{tg}\varphi;$$

$$\omega_D = \Omega_з \cos\varphi \cos\psi_0 - \frac{V}{R_з} \sin(\alpha - \psi_0).$$

Таким образом, угловые скорости отклонения оси гироскопа от плоскостей горизонта и меридиана согласно формулам (164)

будут равны

$$\left.\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= \Omega_з \cos\varphi \sin\psi_0 - \frac{V}{R_з}\cos(\alpha - \psi_0);\\ \dot{\psi} &= -\Omega_з \sin\varphi + \frac{V \sin\alpha}{R_з}\operatorname{tg}\varphi -\\ &- \left[\Omega_з \cos\varphi\cos\psi_0 - \frac{V}{R_з}\sin(\alpha - \psi_0)\right]\operatorname{tg}\varphi.\end{aligned}\right\} \quad (184)$$

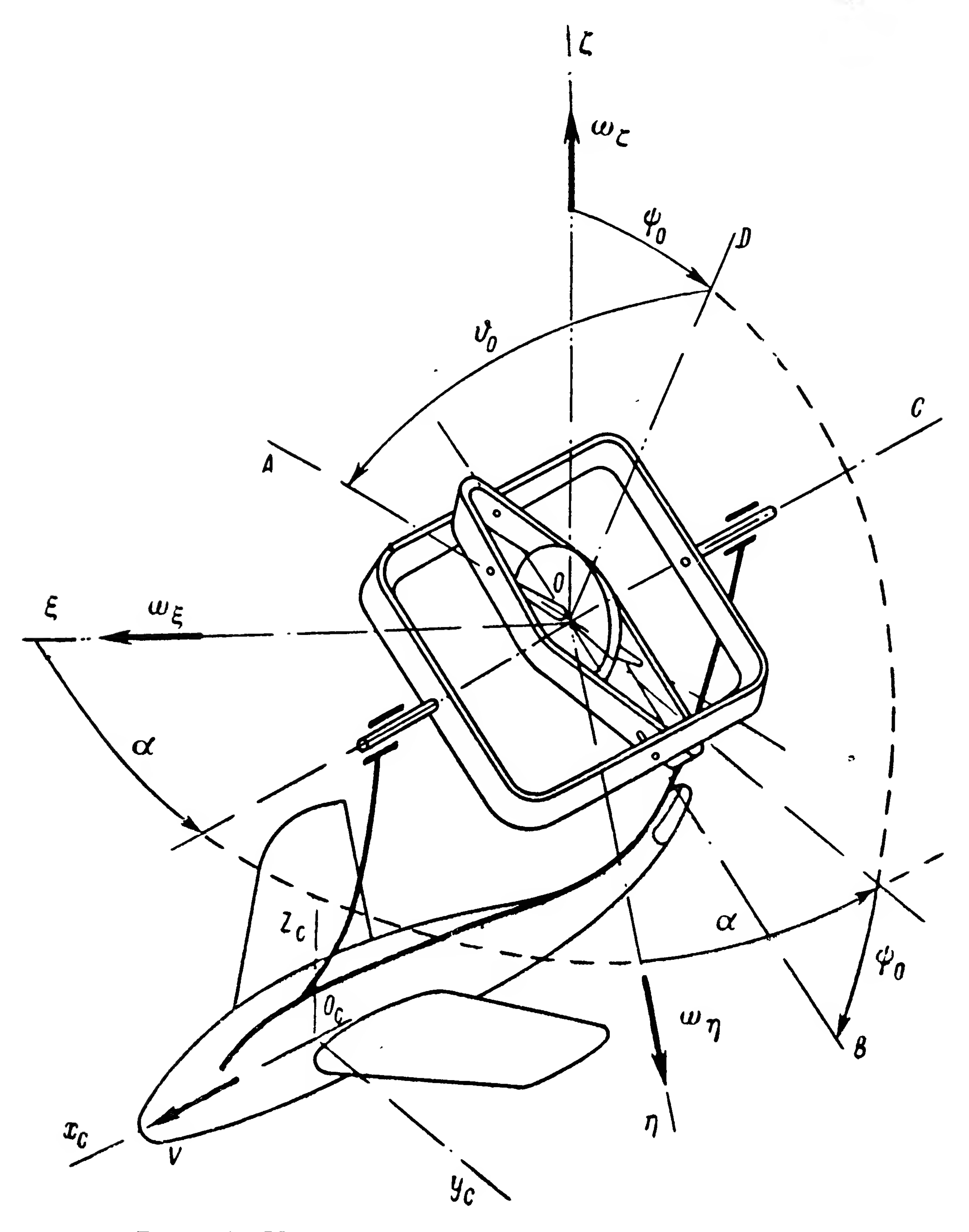


Рис. 59. Углы отклонения гироскопа от вертикали.

Численное интегрирование угловых скоростей (184) в пределах малых промежутков времени, как это было показано в § 27, позволяет найти с заданной степенью точности изменения углов отклонения гироскопа от плоскостей горизонта и меридиана. Подоб-

ная схема расположения гироскопа не является единственно возможной. Его наружной оси OC можно придать любое положение на объекте, что будет оказывать непосредственное влияние на характер отклонения гироскопа от земных ориентиров. Так, например, при установке гироскопа на летательных аппаратах его наружную ось OC часто совмещают с продольной осью $O_c x_c$ объекта (рис. 59). В этом случае отклонение гироскопа от земных ориентиров будет зависеть от положения его главной оси OA относительно вертикали $O\zeta$. Чтобы определить угловые скорости отклонений гироскопа от горизонта и меридиана, ориентируем оси OA, OB и OC так, чтобы ось OC была совмещена с отрицательным направлением оси $O_c x_c$, ось OB направлена в сторону левого борта объекта, а ось OA — в сторону зенита.

Выбранная ориентация осей подвеса гироскопа позволяет определить отклонение его главной оси OA по значениям двух углов ϑ_0 и ψ_0. Для определения угловых скоростей $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\psi}$ приращения углов ϑ и ψ со временем необходимо найти проекции угловых скоростей ω_ξ, ω_η и ω_ζ на оси OB, OC и OD. Воспользуемся для этого выражениями (174). Учтем, что в рассматриваемом случае угол λ между осями $O\zeta$ и OC (см. рис. 52) равен $-\frac{\pi}{2}$, а угол σ — углу α (рис. 59). В результате получим:

$$\omega_B = -\omega_\xi \sin\alpha\cos\psi_0 + \omega_\eta \cos\alpha\cos\psi_0 - \omega_\zeta \sin\psi_0;$$

$$\omega_C = -\omega_\xi \cos\alpha - \omega_\eta \sin\alpha;$$

$$\omega_D = -\omega_\xi \sin\alpha\sin\psi_0 + \omega_\eta \cos\alpha\sin\psi_0 + \omega_\zeta \cos\psi_0.$$

Подставив в полученные выражения значения угловых скоростей ω_ξ, ω_η и ω_ζ из (183), найдем:

$$\left.\begin{aligned} \omega_B &= -\Omega_з(\cos\varphi\sin\alpha\cos\psi_0 + \sin\varphi\sin\psi_0) + \\ &+ \frac{V\cos\beta}{R}(\cos\psi_0 + \sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi\sin\psi_0); \\ \omega_C &= -\Omega_з\cos\varphi\cos\alpha; \\ \omega_D &= -\Omega_з(\cos\varphi\sin\alpha\sin\psi_0 - \sin\varphi\cos\psi_0) + \\ &+ \frac{V\cos\beta}{R}(\sin\psi_0 - \sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi\cos\psi_0). \end{aligned}\right\} \quad (185)$$

Заменив в (164) величины угловых скоростей ω_B, ω_C и ω_D их значениями (185), найдем угловые скорости отклонения главной

оси гироскопа относительно земных ориентиров:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= \Omega_з (\cos\varphi \sin\alpha \cos\psi_0 + \sin\varphi \sin\psi_0) - \\ &- \frac{V\cos\beta}{R}(\cos\psi_0 + \sin\alpha \operatorname{tg}\varphi \sin\psi_0); \\ \dot{\psi} &= \Omega_з \cos\varphi \cos\alpha + \Omega_з (\cos\varphi \sin\alpha \sin\psi_0 - \\ &- \sin\varphi \cos\psi_0) \operatorname{tg}\vartheta_0 - \frac{V\cos\beta}{R} \times \\ &\times (\sin\psi_0 - \sin\alpha \operatorname{tg}\varphi \cos\psi_0) \operatorname{tg}\vartheta_0. \end{aligned}\right\} \qquad (186)$$

В результате интегрирования выражений (184) и (186) можно в каждом конкретном случае определить характер изменения во времени углов отклонения главной оси гироскопа от земных ориентиров, сохраняющих неизменным свое положение по отношению к плоскостям горизонта и меридиана.

Пример 14. Определить характер изменения во времени углов отклонения от вертикали главной оси гироскопа, установленного на летательном аппарате (рис. 59), совершающем горизонтальный полет ($\beta = 0$) на постоянной высоте $h = 4000$ *м* над уровнем моря со скоростью $V = 1200$ *км/час* и курсом $\alpha = 0$ к плоскости меридиана. Начальные значения углов $\varphi_0 = 60°$, $\vartheta_0 = 0$ и $\psi_0 = 0$.

Так как средний радиус Земли $R_з = 6371$ *км*, то текущее значение широты φ при постоянных значениях скорости V и курса α будет в нашем случае определяться согласно формуле (180) выражением

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{Vt}{R} = 60 + \frac{1200 \cdot t}{6371 + 4} \cdot \frac{57{,}3}{60} = 60 + 0{,}18t \text{ град.}$$

Угловая скорость суточного вращения Земли (168), измеренная в градусах в минуту,

$$\Omega_з = 0{,}729 \cdot 10^{-4} \cdot 57{,}3 \cdot 60 = 0{,}25 \text{ град./мин.}$$

Таким образом, угловые скорости отклонения главной оси гироскопа от вертикали, определяемые выражениями (186), в рассматриваемом случае будут равны

$$\dot{\vartheta} = 0{,}25 \sin(60 + 0{,}18t) \sin\psi_0 - 0{,}18 \cos\psi_0;$$

$$\dot{\psi} = 0{,}25 \cos(60 + 0{,}18t) - 0{,}25 \sin(60 + 0{,}18t) \cos\psi_0 \operatorname{tg}\vartheta_0 -$$

$$- 0{,}18 \sin\psi_0 \operatorname{tg}\vartheta_0.$$

Промежуток времени Δt, в течение которого угловые скорости $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\psi}$ считаем постоянными, примем равными 15 мин. Для каждого такого промежутка времени вычислим угловые скорости $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\psi}$ и по (173) определим отклонения гироскопа от вертикали. Результаты вычислений сведены в табл. 2.

Таблица 2

Углы отклонения от вертикали главной оси гироскопа, установленного на подвижном объекте

Время, мин.	Промежуток времени, мин.	Углы отклонения гироскопа, град.		Широта, град.	Угловые скорости, град/мин.	
t	Δt	ϑ_0	ψ_0	φ	$\dot{\vartheta}$	$\dot{\psi}$
0	0	0	0	60	—0,18	0,125
15	15	— 2,7	1,88	62,7	—0,17	0,126
30	15	— 5,3	3,77	65,4	—0,165	0,126
45	15	— 7,8	5,66	68,1	—0,156	0,127
60	15	—10,1	7,53	. . .	. . .	. . .

§ 30. ДВИЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ЗЕМНЫХ ОРИЕНТИРОВ ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ ПРИ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ЕГО ОСНОВАНИЯ У ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПО ОРТОДРОМИИ

Рассматривая перемещение объекта по ортодромии, будем полагать, что объект движется по дуге большого круга между пунктами A и B (рис. 60). Выберем на траектории движения два близлежащих пункта C и D и определим приращение угла α за время Δt перемещения объекта между ними. Обозначим курс объекта и широту его местоположения в точке C через α и φ. При достижении объектом пункта D курс и широта станут равными $\alpha+\Delta\alpha$ и $\varphi+\Delta\varphi$. На основании теоремы синусов для сферического треугольника NCD можем записать

$$\frac{\sin(N, C)}{\sin\angle NDC}=\frac{\sin(N, D)}{\sin\angle NCD},$$

Рис. 60. К определению изменения курса объекта при его перемещении по дуге большого круга.

или, подставив в последнее равенство значения входящих в него величин,

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}{\sin(\pi-\alpha-\Delta\alpha)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi-\Delta\varphi\right)}{\sin\alpha}.$$

Произведя в полученной зависимости простейшие тригонометрические преобразования, будем иметь

$$\frac{\cos\varphi}{\sin(\alpha+\Delta\alpha)}=\frac{\cos(\varphi+\Delta\varphi)}{\sin\alpha},$$

откуда следует

$$\sin\alpha\cos\varphi=\sin(\alpha+\Delta\alpha)\cos(\varphi+\Delta\varphi),$$

или

$$\sin\alpha\cos\varphi=(\sin\alpha\cos\Delta\alpha+\cos\alpha\sin\Delta\alpha)(\cos\varphi\cos\Delta\varphi-\\ -\sin\varphi\sin\Delta\varphi).$$

За малое время Δt приращения $\Delta\alpha$ и $\Delta\varphi$ будут малы. Приравняв на этом основании косинусы малых углов единице, а их синусы величинам самих углов, перепишем найденное равенство в следующем виде:

$$\sin\alpha\cos\varphi=\sin\alpha\cos\varphi+\Delta\alpha\cos\alpha\cos\varphi-\Delta\varphi\sin\alpha\sin\varphi-\\ -\Delta\alpha\Delta\varphi\cos\alpha\sin\varphi$$

или после сокращений

$$\Delta\alpha=\frac{\Delta\varphi\operatorname{tg}\alpha\sin\varphi}{\cos\varphi-\Delta\varphi\sin\varphi}. \qquad (187)$$

Для определения приращения $\Delta\varphi$ угла φ обратимся к сферическому треугольнику CDE. При расположении точек C и D в непосредственной близости этот треугольник можно рассматривать как плоский прямоугольный. При таком допущении можем записать

$$ED=CD\cos(\alpha+\Delta\alpha),$$

Отрезок CD (рис. 60) равен пути, пройденному за время Δt объектом, движущимся со скоростью V, поэтому

$$ED=V\Delta t\cos(\alpha+\Delta\alpha).$$

Деля найденную величину отрезка ED на расстояние R от точки D до центра Земли $O_з$, определим искомую величину угла $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi=\frac{ED}{R}=\frac{V\Delta t}{R}\cos(\alpha+\Delta\alpha),$$

при малом значении угла $\Delta\alpha$

$$\Delta\varphi=\frac{V\Delta t}{R}(\cos\alpha-\Delta\alpha\sin\alpha).$$

Подставив полученное значение $\Delta\varphi$ в выражение (187), находим

$$\Delta\alpha=\frac{V\Delta t}{R}\cdot\frac{\cos\alpha-\Delta\alpha\sin\alpha}{\cos\varphi-\Delta\varphi\sin\varphi}\operatorname{tg}\alpha\sin\varphi,$$

откуда

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}=\frac{V}{R}\cdot\frac{\cos\alpha-\Delta\alpha\sin\alpha}{\cos\varphi-\Delta\varphi\sin\varphi}\operatorname{tg}\alpha\sin\varphi.$$

При Δt, стремящемся к нулю,

$$\left|\frac{\cos\alpha-\Delta\alpha\sin\alpha}{\cos\varphi-\Delta\varphi\sin\varphi}\right|_{\Delta t\to 0}=\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}$$

и поэтому в пределе скорость приращения курсового угла

$$\dot{\alpha}=\frac{d\alpha}{dt}=\frac{V}{R}\sin\alpha\operatorname{tg}\varphi. \quad (188)$$

Сравнив (188) с формулами (182), нетрудно заметить, что при горизонтальном полете угловая скорость $\dot{\alpha}$ равна по величине, но противоположна по направлению угловой скорости ω_ζ вращения в пространстве вокруг вертикали $O\zeta$ координатной системы $O\xi\eta\zeta$, ориентированной по плоскостям горизонта и меридиана. Поэтому при движении объекта по ортодромии скорость V этого движения не будет порождать дополнительного вращения в пространстве плоскости меридиана $\xi O\zeta$, как это имело место при движении объекта по локсодромии (см. § 29). Действительно, при движении объекта по дуге большого круга со скоростью V его центр тяжести поворачивается вокруг центра Земли $O_з$ с угловой скоростью

$$\omega=\frac{V}{R}. \quad (189)$$

Вектор $\bar{\omega}$ направлен по оси $O_зP$, перпендикулярной плоскости $O_зLACDFB$ большого круга. Поэтому, спроектировав $\bar{\omega}$ на координатные оси $O\xi\eta\zeta$, ориентированные по плоскостям горизонта и меридиана пункта C земной поверхности, будем иметь

$$\omega_\xi=\omega\cos(\omega,\xi);\quad \omega_\eta=\omega\cos(\omega,\eta);\quad \omega_\zeta=\omega\cos(\omega,\zeta). \quad (190)$$

Для определения косинусов углов воспользуемся схемой рис. 60. Вектор $\bar{\omega}$ расположен перпендикулярно плоскости большого круга, поэтому

$$\cos(\omega,\zeta)=\cos\frac{\pi}{2}. \quad (191)$$

При перемещении по дуге большого круга объект может удалиться от экватора только до вполне определенного значения φ_m угла широты, вследствие этого

$$\cos(\omega,K)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_m\right)=\sin\varphi_m.$$

Оси O_3U и $O\eta$ (рис. 60) параллельны, так как каждая из них перпендикулярна к плоскости меридиана O_3NCWS. Поэтому, обозначив угол, составляемый линиями O_3L и O_3W пересечения плоскости экватора соответственно плоскостями большого круга $O_3LACDFB$ и меридиана O_3NCWS, через σ, на основании формулы (30) можем записать

$$\cos(\overline{\omega}, \eta) = \cos(\overline{\omega}, U) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_m\right)\cos\sigma +$$

$$+ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_m\right)\sin\sigma\cos\frac{\pi}{2},$$

или

$$\cos(\overline{\omega}, \eta) = \sin\varphi_m\cos\sigma. \quad (192)$$

Рис. 61. К определению параметров движения объекта, перемещающегося по дуге большого круга.

Для определения косинуса угла между $\overline{\omega}$ и осью $O\xi$ воспользуемся вспомогательной схемой рис. 61. Учитывая, что ось $O\xi$ лежит в плоскости меридиана, проведем в этой плоскости прямую O_3Q, параллельную оси $O\xi$. Прямая O_3Q составляет с земной осью NS угол, равный φ. Для сферического треугольника PNQ, образованного прямыми O_3P, O_3N и O_3Q, в соответствии с формулой (30) следует, что

$$\cos(P, Q) = \cos(\overline{\omega}, \xi) = \cos\left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_m\right)\right]\cos\varphi +$$

$$+ \sin\left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_m\right)\right]\sin\varphi\cos\left(\frac{\pi}{2} + \sigma\right),$$

или после тригонометрических преобразований

$$\cos(\overline{\omega}, \xi) = -\cos\varphi_m\cos\varphi - \sin\varphi_m\sin\varphi\sin\sigma. \quad (193)$$

Подставив значения косинусов углов из (191), (192) и (193) в выражения (190), будем иметь

$$\omega_\xi = -\omega(\cos\varphi_m\cos\varphi + \sin\varphi_m\sin\varphi\sin\sigma);$$

$$\omega_\eta = \omega\sin\varphi_m\cos\sigma;$$

$$\omega_\zeta = \omega\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Просуммировав полученные угловые скорости с проекциями вектора $\overline{\Omega}_з$ на оси $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ (169) и учтя равенство (189), найдем

$$\left.\begin{aligned} \omega_\xi &= \Omega_з \cos\varphi - \frac{V}{R}(\cos\varphi_m \cos\varphi + \sin\varphi_m \sin\varphi \sin\sigma); \\ \omega_\eta &= \frac{V}{R}\sin\varphi_m \cos\sigma; \\ \omega_\zeta &= \Omega_з \sin\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (194)$$

С угловыми скоростями (194) координатная система $O\xi\eta\zeta$, ориентированная по плоскостям горизонта и меридиана, будет вращаться в пространстве при движении объекта по дуге большого круга. Так как скорости ω_ξ, ω_η и ω_ζ известны, то по формулам (174) можно определить угловые скорости вращения координатной системы $O\xi\eta\zeta$ вокруг осей OB и OC подвеса гироскопа и перпендикулярной им оси OD, а тем самым и угловые скорости отклонения оси гироскопа от плоскостей горизонта и меридиана для рассматриваемого случая движения объекта.

Представим, что гироскоп установлен на объекте таким образом, что его наружная ось подвеса OC расположена вертикально (рис. 58). В этом случае углы λ и σ равны нулю, в связи с чем выражения (174) принимают вид (170). Подставив в (170) значения угловых скоростей ω_ξ, ω_η и ω_ζ из (194), будем иметь

$$\omega_B = -\left(\Omega_з \cos\varphi - \frac{V}{R}\cos\varphi_m \cos\varphi - \frac{V}{R}\sin\varphi_m \sin\varphi \sin\sigma\right)\sin\psi_0 + \frac{V}{R}\sin\varphi_m \cos\sigma \cos\psi_0;$$

$$\omega_C = \Omega_з \sin\varphi;$$

$$\omega_D = \left(\Omega_з \cos\varphi - \frac{V}{R}\cos\varphi_m \cos\varphi - \frac{V}{R}\sin\varphi_m \sin\varphi \sin\sigma\right)\cos\psi_0 + \frac{V}{R}\sin\varphi_m \cos\sigma \sin\psi_0.$$

Подставив найденные значения ω_B, ω_C и ω_D в (164), получим выражения, характеризующие угловые скорости отклонения оси

гироскопа от плоскостей горизонта и меридиана:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\vartheta} = \Big(\Omega_з \cos\varphi - \frac{V}{R}\cos\varphi_m \cos\varphi - \frac{V}{R}\sin\varphi_m \sin\varphi \sin\sigma\Big) \times \\ \times \sin\psi_0 - \frac{V}{R}\sin\varphi_m \cos\sigma \cos\psi_0; \\ \dot{\psi} = -\Omega_з \sin\varphi - \Big(\Omega_з \cos\varphi - \frac{V}{R}\cos\varphi_m \cos\varphi - \\ - \frac{V}{R}\sin\varphi_m \sin\varphi \sin\sigma\Big)\cos\psi_0 \operatorname{tg}\vartheta_0 - \\ - \frac{V}{R}\sin\varphi_m \cos\sigma \sin\psi_0 \operatorname{tg}\vartheta_0.\end{aligned}\right\} \quad (195)$$

Угол σ зависит от положения центра тяжести подвижного объекта на дуге окружности большого круга. Обозначив угол, составляемый прямыми $O_зC$ и $O_зL$, через ϱ, для сферического треугольника CWL в соответствии с формулой (30) можем записать:

$$\cos(W, L) = \cos(C, W)\cos(C, L) + \sin(C, W)\sin(C, L)\cos\angle LCW$$

или, учитывая принятые обозначения углов,

$$\cos\sigma = \cos\varphi\cos\varrho + \sin\varphi\sin\varrho\cos\alpha. \quad (196)$$

Значение угла φ может быть найдено из того же сферического треугольника CWL. В соответствии с теоремой синусов имеем

$$\frac{\sin(C, W)}{\sin\angle CLW} = \frac{\sin(C, L)}{\sin\angle CWL}$$

или

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_m} = \frac{\sin\varrho}{\sin\frac{\pi}{2}},$$

откуда находим

$$\sin\varphi = \sin\varphi_m \sin\varrho. \quad (197)$$

В свою очередь угол α будет определяться из сферического треугольника NCF, для которого на основании формулы (30) имеем

$$\cos(F, N) = \cos(N, C)\cos(C, F) + \sin(N, C)\sin(C, F)\cos\angle NCF$$

или

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_m\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varrho\right) + \\ + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varrho\right)\cos\alpha.$$

После элементарных преобразований последнее равенство принимает вид

$$\sin \varphi_m = \sin \varphi \sin \varrho + \cos \varphi \cos \varrho \cos \alpha,$$

откуда находим

$$\cos \alpha = \frac{\sin \varphi_m - \sin \varphi \sin \varrho}{\cos \varphi \cos \varrho}. \quad (198)$$

По формулам (196)—(198) можно вычислить начальные значения углов α_0, ϱ_0 и σ. Дальнейшее изменение углов α и ϱ будет зависеть от скорости V подвижного объекта. Эти изменения, учитывая выражения (188) и (189), подчиняются зависимостям

$$\alpha = \alpha_0 + \int \dot{\alpha}\, dt = \alpha_0 + \int \frac{V}{R} \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi \, dt; \quad (199)$$

$$\varrho = \varrho_0 + \int \omega \, dt = \varrho_0 + \int \frac{V}{R} dt. \quad (200)$$

Численное интегрирование выражения (195) с помощью вспомогательных формул (196)—(200) дает возможность выяснить характер изменения углов ϑ и ψ отклонения оси гироскопа от плоскостей горизонта и меридиана при перемещении его точки подвеса относительно земной поверхности по дуге большого круга.

Пример 15. Определить изменения углов отклонения оси гироскопа, установленного на летательном аппарате таким образом, что его наружная ось подвеса OC совмещена с осью $O_C z_C$ летательного аппарата (см. рис. 59). Летательный аппарат совершает горизонтальный полет по дуге большого круга с постоянной скоростью $V = 1500$ *км/час* на высоте $h = 12\,000$ *м* над уровнем моря. Плоскость большого круга, по которому совершается полет летательного аппарата, наклонена к плоскости экватора под углом $\varphi_m = 40°$. Точка старта летательного аппарата расположена на широте $\varphi = 30°$. В начальный момент времени $\vartheta_0 = 0$ и $\psi_0 = 0$.

Для определения скоростей $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\psi}$ изменения во времени углов ϑ и ψ вычислим по формуле (189) значение угловой скорости вращения центра тяжести объекта вокруг центра Земли:

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{V}{R_з + h} = \frac{1500}{6371 + 12} = 0{,}236 \text{ рад./час.},$$

или соответственно

$$\omega = 0{,}236 \frac{57{,}3}{60} = 0{,}225 \text{ град./мин.}$$

По формуле (197) находим начальное значение угла ϱ_0:

$$\sin \varrho_0 = \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_m} = \frac{\sin 30°}{\sin 40°} = 0{,}777,$$

откуда

$$\varrho_0 = 51°.$$

Дальнейшее изменение угла ϱ будет определяться зависимостью (200), которая в данном случае принимает вид

$$\varrho = \varrho_0 + \frac{V}{R} t = \varrho_0 + 0{,}225t.$$

Разделим время работы прибора на равные промежутки Δt. Полагая в течение каждого такого промежутка времени параметры движения объекта неизменными, вычислим значения ϱ для каждого промежутка Δt. Затем по формуле (197) определим величину угла φ также для каждого промежутка Δt:

$$\sin \varphi = \sin \varphi_m \sin \varrho,$$

а по формуле (198) — соответствующую величину курса α:

$$\cos \alpha = \frac{\sin \varphi_m - \sin \varphi \sin \varrho}{\cos \varphi \cos \varrho}.$$

Ее начальное значение в нашем случае будет равно

$$\cos \alpha_0 = \frac{\sin \varphi_m - \sin \varphi_0 \cdot \sin \varrho_0}{\cos \varphi_0 \cos \varrho_0} = \frac{\sin 40° - \sin 30° \sin 51}{\cos 30° \cos 51°} = 0{,}486$$

откуда $\alpha_0 = 60° \, 50' = 60°83.$

Определив для каждого выбранного промежутка времени Δt величины ϱ, φ и α, вычислим по формуле (196) соответствующие значения угла σ (см. рис. 61). Начальное значение угла σ определится в этом случае равенством

$$\cos \sigma_0 = \cos \varphi_0 \cos \varrho_0 + \sin \varphi_0 \sin \varrho_0 \cos \alpha_0 =$$
$$= \cos 30° \cos 51° + \sin 30° \sin 51° \cos 60°83 = 0{,}734,$$

откуда $\sigma_0 = 42° \, 50' = 42°83.$

Подставив в (195) численные значения ϱ, α, σ, а также значение (168) Ω_3, выраженное в градусах в минуту времени (см. пример 14), будем иметь

$$\dot{\vartheta} = \left(\Omega_3 \cos \varphi - \frac{V}{R} \cos \varphi_m \cos \varphi - \frac{V}{R} \sin \varphi_m \sin \varphi \sin \sigma \right) \sin \psi_0 -$$
$$- \frac{V}{R} \sin \varphi_m \cos \sigma \cos \psi_0 = (0{,}25 \cos \varphi - 0{,}225 \cos 40° \cos \varphi -$$
$$- 0{,}225 \sin 40° \sin \varphi \sin \sigma) \sin \psi_0 - 0{,}225 \sin 40° \cos \sigma \cos \psi_0;$$

$$\dot{\psi} = - \Omega_3 \sin \varphi - \left(\Omega_3 \cos \varphi - \frac{V}{R} \cos \varphi_m \cos \varphi - \right.$$
$$\left. - \frac{V}{R} \sin \varphi_m \sin \varphi \sin \sigma \right) \cos \psi_0 \operatorname{tg} \vartheta_0 -$$
$$- \frac{V}{R} \sin \varphi_m \cos \sigma \sin \psi_0 \operatorname{tg} \vartheta_0 = - 0{,}25 \sin \varphi -$$
$$- (0{,}25 \cos \varphi - 0{,}225 \cos 40° \cos \varphi - 0{,}225 \sin 40° \sin \varphi \sin \sigma) \cos \psi_0 \operatorname{tg} \vartheta_0 -$$
$$- 0{,}225 \sin 40° \cos \sigma \sin \psi_0 \operatorname{tg} \vartheta_0,$$

или

$$\dot{\vartheta} = (0{,}078 \cos \varphi - 0{,}145 \sin \varphi \sin \sigma) \sin \psi_0 - 0{,}145 \cos \sigma \cos \psi_0;$$

$$\dot{\psi} = -0{,}25 \sin \varphi - (0{,}078 \cos \varphi - 0{,}145 \sin \varphi \sin \sigma) \cos \psi_0 \operatorname{tg} \vartheta_0 -$$
$$- 0{,}145 \cos \sigma \sin \psi_0 \operatorname{tg} \vartheta_0.$$

Время Δt, в течение которого $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\psi}$ полагаем постоянными, выберем равным 15 мин. Для каждого такого промежутка вычислим значения $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\psi}$ и определим по формулам (173) изменения углов ϑ_0 и ψ_0. Результаты вычислений сведем в табл. 3.

Таблица 3

Углы отклонения главной оси гироскопа от плоскостей горизонта и меридиана при перемещении его точки подвеса по дуге большого круга

Время t, мин.	Углы, характеризующие положение подвижного объекта, град.				Угол отклонения главной оси гироскопа от плоскостей, град.		Угловая скорость отклонения гироскопа от плоскостей, град./мин.	
	ρ — отклонения от экватора	φ — географической широты	α — курса	σ — между плоскостями меридиана и дуги большого круга	горизонта ϑ_0	меридиана ψ_0	горизонта $\dot{\vartheta}$	меридиана $\dot{\psi}$
0	51	30	60,83	42,83	0	0	—0,106	—0,125
15	54,38	31,5	64,08	46,58	—1,59	—1,87	—0,098	—0,130
30	57,75	32,9	66,92	51,01	—3,06	—3,62	—0,090	—0,135
45	61,13	34,3	68,08	54,42	—4,41	—5,65	—0,082	—0,140
60	64,50	35,5	70,18	58,00	—5,64	—7,75	. . .	. . .

По данным таблицы могут быть построены графики изменения углов ϑ_0 и ψ_0 во времени, наглядно характеризующие отклонение главной оси гироскопа от плоскостей горизонта и меридиана.

§ 31. СИСТЕМАТИЧЕСКИЙ ДРЕЙФ ГИРОСКОПА, ОБУСЛОВЛИВАЕМЫЙ ВРАЩЕНИЕМ ОСНОВАНИЯ ПРИБОРА

Исследование системы уравнений (160) в первом приближении показало, что гироскоп, корпус которого вращается в пространстве, систематически отклоняется от своего первоначального положения с угловой скоростью $-\omega_D \operatorname{tg} \vartheta_0$. Это отклонение происходит вокруг наружной оси подвеса и сопровождается нутационными колебаниями, которые в свою очередь (см. § 20—22) порождают дополнительное отклонение с угловой скоростью, определяемой по выражению (108). Для вычисления амплитуды изменения угловой скорости колебаний гироскопа вокруг его наружной оси подвеса вновь обратимся к выражениям (163). Будем полагать, что в начальный момент времени

$$\vartheta(0) = 0;\ \psi(0) = 0;\ \dot{\vartheta}(0) = 0;\ \dot{\psi}(0) = 0.$$

При этих условиях постоянные интегрирования, входящие в выражения (166), определяются зависимостями

$$C_1 = \sqrt{\frac{J_C}{J_B}} \cdot \frac{\omega_C + \omega_D \operatorname{tg} \vartheta_0}{n}; \quad C_2 = \frac{\omega_B}{n};$$

$$C_3 = -\sqrt{\frac{J_C}{J_B}} \cdot \frac{\omega_C + \omega_D \operatorname{tg} \vartheta_0}{n}; \quad C_4 = \sqrt{\frac{J_B}{J_C}} \cdot \frac{\omega_B}{n}$$

или с учетом обозначения

$$\omega_C + \omega_D \operatorname{tg} \vartheta_0 = \omega_{\text{н}} \tag{201}$$

и равенства (53)

$$C_1 = \frac{J_C \omega_{\text{н}}}{J\Omega \cos \vartheta_0}; \quad C_2 = \frac{\sqrt{J_B J_C}\, \omega_B}{J\Omega \cos \vartheta_0}.$$

$$C_3 = -\frac{J_C \omega_{\text{н}}}{J\Omega \cos \vartheta_0}; \quad C_4 = \frac{J_B \omega_B}{J\Omega \cos \vartheta_0}.$$

Подставив вычисленные значения постоянных интегрирования в выражения (166), найдем:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= \frac{J_C \omega_{\text{н}}}{J\Omega \cos \vartheta_0} \cos nt + \frac{\sqrt{J_B J_C}\, \omega_B}{J\Omega \cos \vartheta_0} \sin nt - \\ &\quad - \frac{J_C \omega_{\text{н}}}{J\Omega \cos \vartheta_0} - \int \omega_B \, dt; \\ \psi &= \frac{\sqrt{J_B J_C}\, \omega_{\text{н}}}{J\Omega \cos \vartheta_0} \sin nt - \frac{J_B \omega_B}{J\Omega \cos \vartheta_0} \cos nt + \\ &\quad + \frac{J_B \omega_B}{J\Omega \cos \vartheta_0} - \int \omega_{\text{н}} \, dt. \end{aligned}\right\} \tag{202}$$

Для определения угловых скоростей систематического отклонения гироскопа от заданного в подвижной системе координат направления продифференцируем выражения (202) по времени:

$$\dot{\vartheta} = -\sqrt{\frac{J_C}{J_B}}\, \omega_{\text{н}} \sin nt - \omega_B \cos nt - \omega_B;$$

$$\dot{\psi} = \omega_{\text{н}} \cos nt + \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\, \omega_B \sin nt - \omega_{\text{н}}.$$

Нетрудно заметить, что два первых члена каждого полученного выражения характеризуют гармонические колебания угловых скоростей, а третьи члены — их постоянные составляющие. При этом амплитуда изменения угловой скорости колебаний гироскопа вокруг его наружной оси

$$\dot{\psi}_a = \sqrt{\omega_{\text{н}}^2 + \frac{J_B}{J_C}\, \omega_B^2} = \sqrt{\frac{J_C \omega_{\text{н}}^2 + J_B \omega_B^2}{J_C}}.$$

Следовательно, угловые скорости систематического отклонения главной оси гироскопа от заданного в подвижной системе координат направления будут с принятой выше степенью точности, учитывая (108) и (201), определяться значениями

$$
\left.
\begin{aligned}
\dot{\vartheta}_{\text{с. у}} &= \dot{\vartheta} = -\omega_B; \\
\dot{\psi}_{\text{с. у}} &= \dot{\psi} + \dot{\psi}_{\text{д}} = -\omega_C - \omega_D \operatorname{tg} \vartheta_0 + \\
&+ \frac{J_{\text{н}} + J_{\text{в}\,x}}{2J\Omega \cos \vartheta_0} \operatorname{tg} \vartheta_0 \frac{J_C \omega_{\text{н}}^2 + J_B \omega_B^2}{J_C}.
\end{aligned}
\right\} \quad (203)
$$

Как видим, даже при отсутствии вредных сопротивлений гироскоп в кардановом подвесе не остается стабильным в пространстве. Кроме угловых скоростей ω_B и ω_C видимого ухода относительно подвижной системы координат, гироскоп будет иметь еще и систематический дрейф в мировом пространстве вокруг наружной оси подвеса.

§ 32. ВЛИЯНИЕ ВРАЩЕНИЯ ОСНОВАНИЯ ПРИБОРА НА ХАРАКТЕР ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Рассмотрим характер движения гироскопа с двумя степенями свободы (см. рис. 41) при вращении корпуса прибора в пространстве. Совместим с корпусом *КП* гироскопа подвижную систему координат $O\xi\eta\zeta$ (рис. 62) таким образом, чтобы ее оси $O\xi$ и $O\eta$ были соответственно параллельны осям OD и OB прибора, а оси $O\zeta$ и OC совмещены между собой. Будем полагать, что корпус *КП* вращается в пространстве одновременно вокруг всех трех осей $O\xi$, $O\eta$ и $O\zeta$ с угловыми скоростями, соответственно равными ω_D, ω_B и ω_C.

Для выяснения характера движения гироскопа воспользуемся уравнениями (163). Учитывая, что при устранении одной степени свободы угол ψ поворота гироскопа вокруг оси OC по отношению к его корпусу *КП* будет неизменно равен нулю, перепишем уравнения (163) в следующем виде:

$$
\left.
\begin{aligned}
J_B \ddot{\vartheta} &= -J\Omega(\omega_C \cos \vartheta_0 + \omega_D \sin \vartheta_0); \\
\dot{\vartheta} &= -\omega_B.
\end{aligned}
\right\} \quad (204)
$$

Второе уравнение (204) показывает, что при вращении основания *КП* прибора вокруг оси OB с угловой скоростью ω_B гироскоп, сохраняя свое положение неизменным в пространстве, будет перемещаться относительно корпуса с угловой скоростью $\dot{\vartheta}$, равной по величине, но обратной по направлению ω_B. В этом случае гироскоп будет видимым образом отклоняться от своего первоначального положения относительно корпуса *КП*. Если корпус *КП* будет

поворачиваться вокруг осей OD и OC, то гироскоп начнет поворачиваться вокруг оси OB, изменяя свое положение уже в мировом пространстве. Этот поворот будет происходить с ускорением, величина которого определяется из первого уравнения (204):

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{J\Omega}{J_B}(\omega_C \cos\vartheta_0 + \omega_D \sin\vartheta_0). \qquad (205)$$

Так как ускорение $\ddot{\vartheta}$ отрицательно, то угол ϑ_0 отклонения главной оси OA гироскопа от оси OD, перпендикулярной осям OB и OC, начнет уменьшаться. Однако и при $\vartheta_0 = 0$ гироскоп будет продолжать поворачиваться с ускорением

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{J\Omega}{J_B}\omega_C.$$

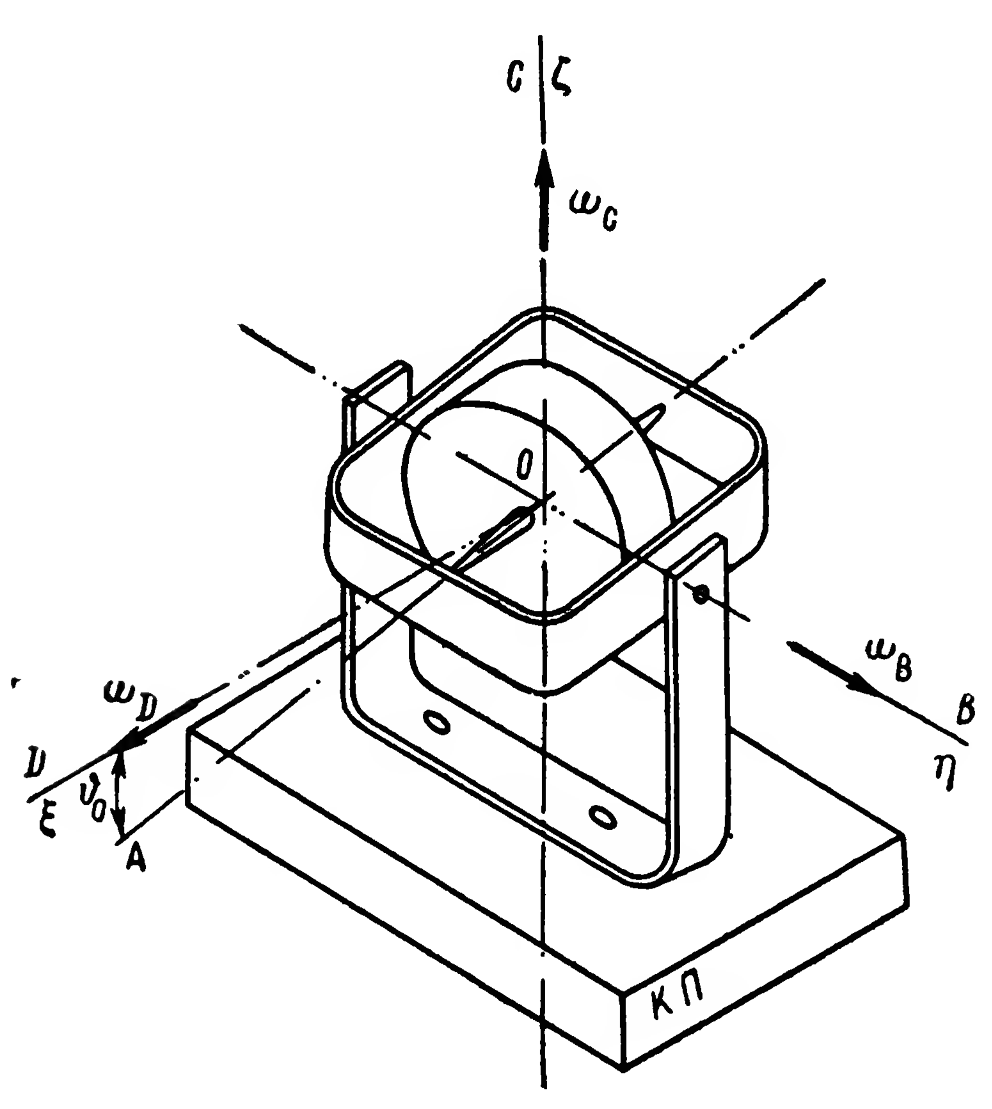


Рис. 62. Гироскоп с двумя степенями свободы на вращающемся основании.

Лишь в тот момент, когда главная ось OA гироскопа совместится с равнодействующей двух векторов $\bar{\omega}_C$ и $\bar{\omega}_D$, ускорение $\ddot{\vartheta}$ станет равным нулю. Действительно, при совмещении главной оси гироскопа с суммарным вектором $\bar{\omega}_C + \bar{\omega}_D$ (рис. 63) она составит с осью OD угол $-\vartheta_0^*$. При этом значения косинуса и синуса угла ϑ_0^* будут определяться выражениями

$$\cos\vartheta_0^* = \frac{\omega_D}{\sqrt{\omega_C^2 + \omega_D^2}}; \quad \sin\vartheta_0^* = \frac{\omega_C}{\sqrt{\omega_C^2 + \omega_D^2}}.$$

Подставляя значения найденных тригонометрических величин в формулу (205) и учитывая, что $\cos(-\vartheta_0^*) = \cos\vartheta_0^*$; $\sin(-\vartheta_0^*) = -\sin\vartheta_0^*$, убеждаемся в том, что в данный момент ускорение действительно равно нулю:

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{J\Omega}{J_B}\left(\omega_C \frac{\omega_D}{\sqrt{\omega_C^2 + \omega_D^2}} - \omega_D \frac{\omega_C}{\sqrt{\omega_C^2 + \omega_D^2}}\right) = 0.$$

Указанное положение и будет являться положением равновесия гироскопа с двумя степенями свободы.

Проинтегрировав выражение (205), найдем угловую скорость поворота гироскопа вокруг оси OB, вызываемую вращением его

основания вокруг осей OD и OC:

$$\dot{\vartheta} = -\frac{J\Omega}{J_B}\int(\omega_C \cos\vartheta_0 + \omega_D \sin\vartheta_0)\,dt.$$

Суммируя найденное значение с угловой скоростью (204) видимого поворота гироскопа вокруг той же оси OB при вращении основания прибора с угловой скоростью ω_B, находим суммарную угловую скорость вращения гироскопа вокруг оси OB:

$$\dot{\vartheta} = -\frac{J\Omega}{J_B}\int(\omega_C \cos\vartheta_0 + \omega_D \sin\vartheta_0)\,dt - \omega_B. \tag{206}$$

При первоначальном угле отклонения главной оси OA гироскопа от направления суммарного вектора $\overline{\omega}_C + \overline{\omega}_D$, равном γ, время t^*, в течение которого ось OA гироскопа совместится с вектором $\overline{\omega}_C + \overline{\omega}_D$, будет определяться выражением

$$t^* = \frac{\gamma}{\dot{\vartheta}} = \frac{J_B\gamma}{J\Omega\int\limits_0^{t^*}(\omega_C \cos\vartheta_0 + \omega_D \sin\vartheta_0)\,dt + J_B\omega_B}. \tag{207}$$

Полученная зависимость не интегрируется в конечном виде. Поэтому для определения t^* приходится пользоваться одним из известных методов численного интегрирования. Из выражения (207) следует, что время t^* прихода гироскопа к положению равновесия, при прочих равных условиях, будет тем продолжительнее, чем больше момент инерции J_B гироскопа относительно оси подвеса OB (рис. 62) и чем меньше угловые скорости ω_B, ω_C и ω_D вращения в пространстве его корпуса $КП$.

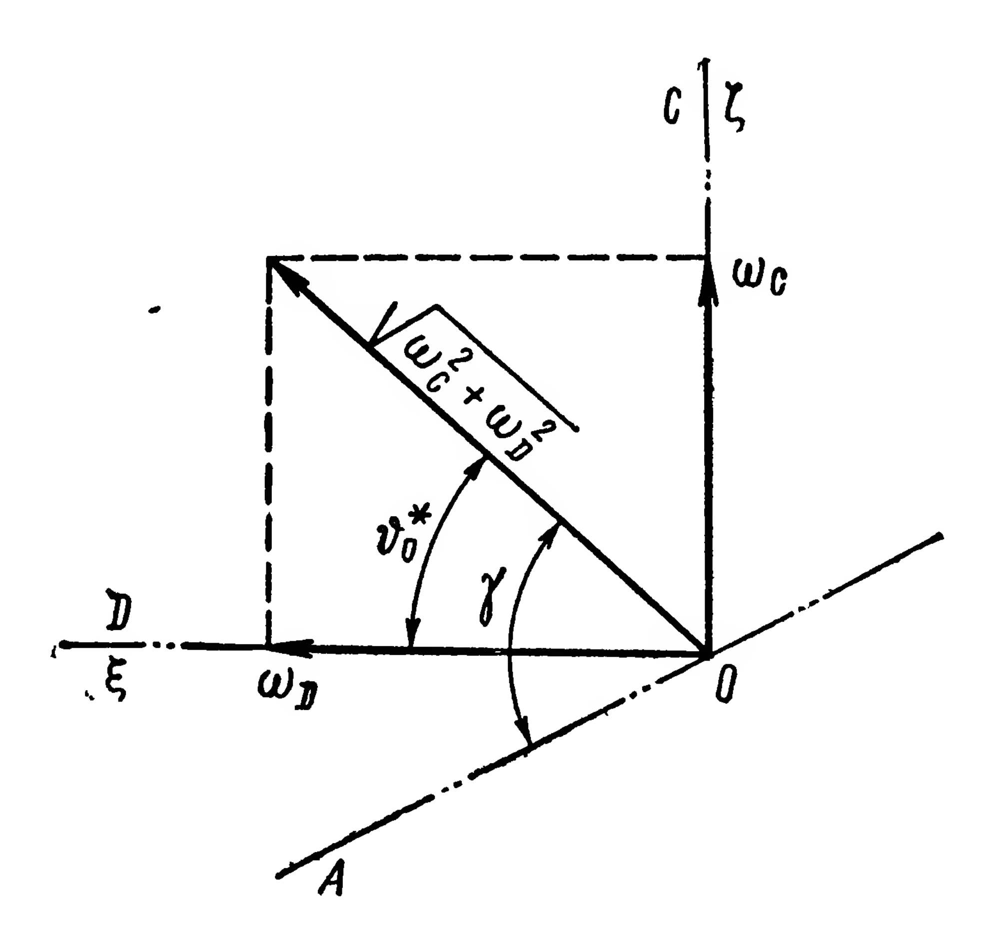


Рис. 63. К определению равновесного положения гироскопа с двумя степенями свободы на вращающемся основании.

Для подтверждения сказанного на рис. 64 приведен график экспериментально снятых зависимостей времени t^* от момента инерции J_B гироскопа и угловой скорости ω_C вращения корпуса прибора. Для проведения опыта главная ось OA гироскопа совмещалась с осью OD корпуса $КП$, которому сообщалось вращение вокруг оси OC с угловой скоростью ω_C. В процессе опыта изменялись значения как ω_C, так и J_B.

П р и м е р 16. Определить время прихода в положение равновесия гироскопа с двумя степенями свободы (рис. 62), корпус которого вращается в про-

странстве вокруг оси OC с угловой скоростью $\omega_C = 0{,}02$ сек.$^{-1}$. Гироскоп обладает кинетическим моментом $J\Omega = 2020$ *Гсмсек* и моментом инерции относительно оси OB подвеса $J_B = 0{,}85$ *Гсмсек*^{2}. В начальный момент ось OA совмещена с осью OD корпуса прибора; следовательно, угол $\gamma = 90°$.

При равенстве угловых скоростей ω_B и ω_D нулю выражение (207) принимает вид

$$t^* = \frac{J_B\gamma}{J\Omega\int\limits_0^{t^*}\omega_C\cos\vartheta_0\,dt}.$$

Разбивая угол γ на шесть одинаковых частей и считая, что за время поворота гироскопа на угол $\gamma_i = \frac{\gamma}{6} = 15°$ значение $\cos\vartheta_{0i}$ остается неизменным,

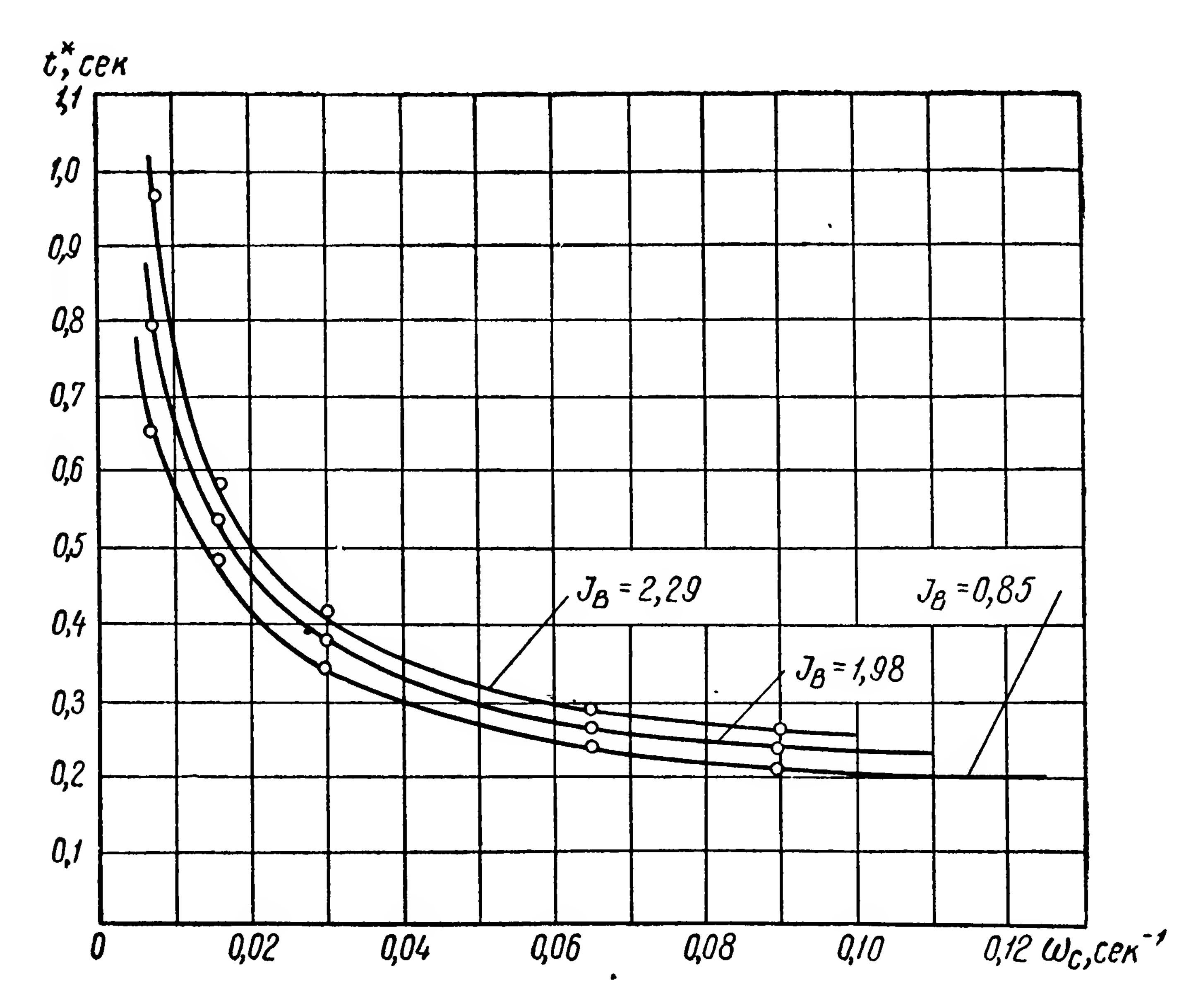


Рис. 64. Зависимость t^* от ω_C и J_B. $J\Omega = 2020$ *Гсмсек* (J_B в *Гсмсек*^{2}).

находим время t_i^*, потребное для поворота гироскопа на одну шестую часть угла γ:

$$t_i^* = \frac{J_B\gamma_i}{J\Omega\omega_C\cos\vartheta_{0i}t_i^* + C_i}$$

или, учитывая численные значения входящих в полученное равенство величин и выражая угловую скорость в градусах в секунду,

$$\omega_C = 0{,}02\cdot 57{,}3 = 1{,}146\ \text{град./сек}^{-1},$$

можем записать

$$t_i^* = \frac{0{,}85\cdot 15}{2020\cdot 1{,}146\cdot\cos\vartheta_{0i}\cdot t_i^* + C_i} = \frac{12{,}75}{2315\cos\vartheta_{0i}t_i^* + C_i},$$

где C_i — постоянная интегрирования.

Значение C_i для каждого этапа исследуемого движения будет определяться величиной угловой скорости ω_{Bi} в начале данного этапа. Так как угловая скорость вращения гироскопа вокруг оси OB в начале последующего этапа равна его угловой скорости в конце предыдущего, то значение постоянной интегрирования C_i для любого этапа может быть записано выражением

$$C_i = J\Omega\omega_C \cos\vartheta_{0i} t^*_{i-1} + C_{i-1},$$

или, учитывая численное значение коэффициента $J\Omega\omega_C = 2020 \cdot 1{,}146 = 2315$ *Гсм*,

$$C_i = 2315 \cos\vartheta_{0i} \cdot t^*_{i-1} + C_{i-1}.$$

Подставляя значение C_i в выражение для t^*_i, приходим к квадратному уравнению

$$t_i^{*2} + \frac{C_i}{2315\cos\vartheta_{0i}} t^*_i - \frac{12.75}{2315\cos\vartheta_{0i}} = 0,$$

из которого, учитывая только значение его положительного корня, находим

$$t^*_i = -\frac{C_i}{4630\cos\vartheta_{0i}} + \sqrt{\left(\frac{C_i}{4630\cos\vartheta_{0i}}\right)^2 + \frac{12{,}75}{2315\cos\vartheta_{0i}}}.$$

Сведем результаты вычисления значений C_i и t^*_i в табл. 4.

Таблица 4

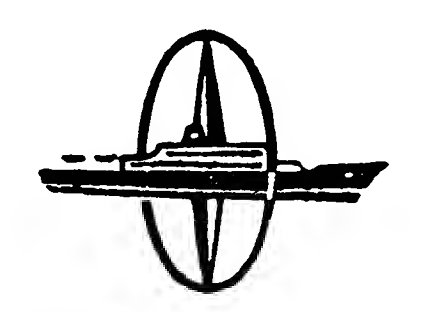
Время поворота гироскопа с двумя степенями свободы до положения равновесия при вращении основания прибора

Этапы	Участок угла γ, проходимый гироскопом в течение этапа, град.	Угол γ_i поворота гироскопа, град.	$\cos\vartheta_{0\,i}$	C_i, *Гсмсек*	t^*_i, сек.
1	0—15	15	1,0000	0,0	0,074
2	15—30	15	0,9659	165,5	0,047
3	30—45	15	0,8660	259,8	0,038
4	45—60	15	0,7071	322,0	0,032
5	60—75	15	0,5000	362,8	0,032
6	75—90	15	0,2588	381,4	0,032

Таким образом, полное время поворота гироскопа вокруг оси OB будет равно:

$$t^* = \sum_{i=1}^{6} t^*_i = 0{,}074 + 0{,}047 + 0{,}038 + 0{,}032 + 0{,}032 + 0{,}032 = 0{,}255 \text{ сек.}$$

Полученный результат несколько меньше времени t^*, найденного экспериментально (рис. 64), что объясняется влиянием момента сил трения, действующего по оси подвеса гироскопа, не учтенном нами в данном примере.



Глава V

ВЛИЯНИЕ СИЛ ТРЕНИЯ В ОПОРАХ ПОДВЕСА НА ДВИЖЕНИЕ ГИРОСКОПА

§ 33. СИЛЫ ТРЕНИЯ И ХАРАКТЕРИСТИКИ СОЗДАВАЕМЫХ ИМИ МОМЕНТОВ

До сих пор при исследовании движения гироскопа мы не учитывали сил трения, неизбежно существующих в опорах его подвеса. Между тем среди различных факторов, порождающих дрейф гироскопа, силы трения занимают одно из основных мест. Они создают переменные моменты относительно осей подвеса и тем самым оказывают непосредственное влияние на точность гироскопических приборов. Вот почему возникает необходимость всестороннего изучения воздействия сил трения в опорах подвеса на поведение гироскопа.

Исследованием влияния сил трения в опорах подвеса на движение гироскопической системы занимались А. Н. Крылов [17], Б. В. Булгаков [4], Б. И. Кудревич [18], Е. Б. Левенталь [20], Р. Граммель [47], А. Ю. Ишлинский [14], А. М. Летов [21], Н. В. Бутенин [5] и др. Наиболее подробно этот вопрос был разработан Е. Л. Николаи [24].

В зависимости от конструкции подвеса гироскопа в корпусе прибора на гироскопическую систему относительно осей ее подвеса будут действовать моменты сил либо сухого, либо вязкого трения. Так, при использовании карданова подвеса с механическими опорами (см. рис. 30) и шарового подвеса (см. рис. 28) на гироскоп будут действовать преимущественно моменты сил сухого трения, средние значения которых зависят от качества изготовления опор и от действующих на них нагрузок. При использовании гидравлических (см. рис. 27) и воздушных (см. рис. 29) опор на гироскоп будут действовать моменты сил вязкого трения, величины которых зависят от качества опор и от угловой скорости ω взаимного поворота деталей опоры. В обоих случаях направления действия моментов сил трения противоположны направлению угловой скорости.

Моменты сил трения можно представить графиками (рис. 65). При действии сил сухого трения создаваемые ими моменты с некоторым приближением можно полагать постоянными по модулю,

но изменяющими свое направление при перемене знака угловой скорости ω (рис. 65, *а*). Эту зависимость можно записать в виде равенства

$$M_т = -M_{0т} \operatorname{sign} \omega, \qquad (208)$$

где $M_{0т}$ — модуль момента сил трения;

$$\operatorname{sign} \omega = \begin{cases} +1 \text{ при } \omega > 0, \\ -1 \text{ при } \omega < 0. \end{cases}$$

В случае действия сил вязкого трения, создаваемые ими моменты будут пропорциональны угловой скорости ω, но противоположны ей по знаку (рис. 65, *б*). Такую зависимость можно представить равенством

$$M_т = -\mu\omega, \qquad (209)$$

где μ — коэффициент пропорциональности.

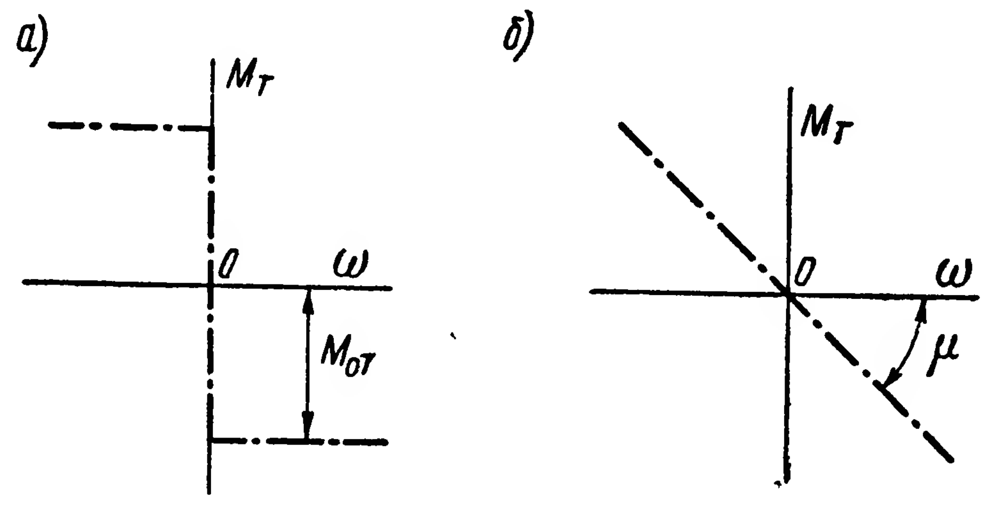


Рис. 65. Усредненные характеристики моментов сил сухого (*а*) и вязкого (*б*) трения.

Трение в опорах — весьма сложное явление, которое до настоящего времени еще не получило достаточно полного физического объяснения.[1] Силы трения зависят от большого числа трудно учитываемых случайных факторов, таких как чистота обработки трущихся поверхностей, загрязнение этих поверхностей, упругость материалов опор и т. п. Несмотря на это, приведенные зависимости (208) и (209) позволяют в первом приближении учитывать влияние моментов сил трения на движение гироскопа.

§ 34. ОСНОВНОЕ ТРЕБОВАНИЕ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМОЕ К МОМЕНТАМ СИЛ ТРЕНИЯ В ОПОРАХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ

Для исследования влияния сил трения в опорах подвеса на поведение гироскопа обратимся к системе уравнений (162), описывающих его движение в подвижной системе координат. Будем полагать, что на гироскоп относительно его внутренней *ОВ* и наружной *ОС* осей подвеса действуют только моменты сил трения $M_{тB}$ и $M_{тC}$, которые согласно выражениям (208) и (209) являются функциями угловых скоростей взаимного поворота подвижных элементов опоры. В рассматриваемом случае такими угловыми скоростями будут скорости $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\psi}$ поворота гироскопа вокруг осей *ОВ* и *ОС* по отношению к корпусу *КП* прибора (см. рис. 30).

[1] См.: И. В. Крагельский и В. С. Щедров. Развитие науки о трении. Изд. АН СССР, 1956.

Поэтому, учитывая в уравнениях (162) действие на гироскоп моментов сил трения и пренебрегая опять величиной $\dot{\vartheta}\cos\vartheta_0$ по сравнению с $\sin\vartheta_0$, можем записать:

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\left(\dot{\psi} + \omega_C\right)\cos\vartheta_0 + J\Omega\omega_D\sin\vartheta_0 = M_{\text{т}B}(\dot{\vartheta}); \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\left(\dot{\vartheta} + \omega_B\right)\cos\vartheta_0 = M_{\text{т}C}(\dot{\psi}). \end{aligned}\right\} \quad (210)$$

Из (210) вытекает указанное еще А. Н. Крыловым [17, стр. 163] весьма важное требование, предъявляемое к моментам сил трения $M_{\text{т}B}$ и $M_{\text{т}C}$. Предположим, что гироскоп, обладающий собственной угловой скоростью вращения $\Omega \neq 0$, установлен в подвижной системе координат так, что

$$\dot{\vartheta}(0) = \dot{\psi}(0) = 0. \quad (211)$$

В этом случае при анализе возможности движения гироскопа в начальный момент времени относительно подвижной системы координат приходится считаться уже не с моментами сил трения движения $M_{\text{т}B}(\dot{\vartheta})$ и $M_{\text{т}C}(\dot{\psi})$, а с моментами сил трения покоя $M_{\text{т. п}B}$ и $M_{\text{т. п}C}$. Направления действия этих моментов будут противоположны направлениям действия моментов гироскопических реакций $J\Omega\omega_C\cos\vartheta_0$ и $J\Omega\omega_B\cos\vartheta_0$, возникающих в результате переносного вращения гироскопа (см. § 8, рис. 22) вместе с подвижной системой координат в пространстве. Поэтому для начального момента времени при $t = 0$ система уравнений (210), учитывая условия (211), принимает вид

$$J_B\ddot{\vartheta}(0) + J\Omega\omega_C\cos\vartheta_0 + J\Omega\omega_D\sin\vartheta_0 = M_{\text{т. п}B};$$

$$J_C\ddot{\psi}(0) - J\Omega\omega_B\cos\vartheta_0 = -M_{\text{т. п}C},$$

откуда следует, что начальные ускорения гироскопа

$$\ddot{\vartheta}(0) = \frac{M_{\text{т. п}B} - J\Omega(\omega_C\cos\vartheta_0 + \omega_D\sin\vartheta_0)}{J_B},$$

$$\ddot{\psi}(0) = -\frac{M_{\text{т. п}C} - J\Omega\omega_B\cos\vartheta_0}{J_C}$$

относительно подвижной системы координат будут существовать лишь только при соблюдении условия

$$\left.\begin{aligned} |M_{\text{т. п}B}| < |J\Omega(\omega_C\cos\vartheta_0 + \omega_D\sin\vartheta_0)|; \\ |M_{\text{т. п}C}| < |J\Omega\omega_B\cos\vartheta_0|. \end{aligned}\right\} \quad (212)$$

При невыполнении условия (212) ускорения $\ddot{\vartheta}(0)$ и $\ddot{\psi}(0)$ будут равны нулю. Следовательно, положение гироскопа в подвижной системе координат будет неизменным. Так, если корпус гироскопа, обладающего собственным вращением $\Omega \neq 0$, установить неподвижно на земной поверхности (аналогично тому, как это было описано в § 27) и если при этом трение в опорах не будет удовлетворять

условию (212), то положение такого гироскопа относительно земных ориентиров будет оставаться неизменным. Иными словами, гироскоп в этом случае не будет фиксировать вращения Земли, как и любое другое тело, неподвижно расположенное на земной поверхности.

Таким образом, чем меньше угловые скорости подвижной системы координат, перемещения которой должны быть зафиксированы гироскопом, тем меньше должны быть моменты сил трения в опорах подвеса. Поэтому на практике принимают специальные меры для снижения этих моментов до возможного минимума. В идеальном случае их значение должно быть равно нулю, однако достичь этого практически пока еще не удается. Поэтому при определении точности гироскопической системы всегда приходится считаться с наличием сил трения в опорах подвеса и их влиянием на характер ее движения.

Пример 17. Гироскоп, обладающий кинетическим моментом $J\Omega = 14\,000$ *Гсмсек*, установлен неподвижно на земной поверхности на широте $\varphi = 60^\circ$; его главная ось в начальный момент времени горизонтальна и направлена с запада на восток. Определить допустимые значения моментов сил трения покоя в опорах подвеса, при которых гироскоп будет следить за суточным вращением Земли.

В рассматриваемом случае главная ось гироскопа в начальный момент времени составляет (см. рис. 55) с плоскостью горизонта угол $\vartheta_0 = 0^\circ$ и с плоскостью меридиана угол $\psi_0 = 90^\circ$. По формулам (171) определим модули скоростей вращения координатной системы, связанной с земными ориентирами, вокруг осей подвеса гироскопа. Учитывая (168), находим

$$\omega_B = \Omega_з \cos\varphi \sin\psi_0 = 7{,}3\cdot 10^{-5} \cos 60^\circ \sin 90^\circ = 3{,}65\cdot 10^{-5}\ \text{сек.}^{-1};$$

$$\omega_C = \Omega_з \sin\varphi = 7{,}3\cdot 10^{-5} \sin 60^\circ = 6{,}32\cdot 10^{-5}\ \text{сек.}^{-1};$$

$$\omega_D = \Omega_з \cos\varphi \cos\psi_0 = 7{,}3\cdot 10^{-5} \cos 60^\circ \cos 90^\circ = 0.$$

Подставив значения ω_B, ω_C и ω_D в (212), определим допустимые величины моментов сил трения покоя в опорах подвеса гироскопа:

$$M_{\text{т. п}B} < J\Omega\,(\omega_C \cos\vartheta_0 + \omega_D \sin\vartheta_0) = 14\,000\cdot 6{,}32\cdot 10^{-5} = 0{,}88\ \textit{Гсм};$$

$$M_{\text{т. п}C} < J\Omega\omega_B \cos\vartheta_0 = 14\,000\cdot 3{,}65\cdot 10^{-5} = 0{,}51\ \textit{Гсм}.$$

§ 35. ВЛИЯНИЕ СИЛ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ НА ДВИЖЕНИЕ ГИРОСКОПА

При действии в опорах подвеса сил вязкого трения система уравнений (210) согласно (209) принимает вид

$$J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\,(\dot{\psi} + \omega_C)\cos\vartheta_0 + J\Omega\omega_D \sin\vartheta_0 = -\mu\dot{\vartheta};$$

$$J_C\ddot{\psi} - J\Omega\,(\dot{\vartheta} + \omega_B)\cos\vartheta_0 = -\mu\dot{\psi}.$$

Учтем в приведенной системе обозначение (201) и сгруппируем переменные величины в левых частях уравнений:

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\psi}\cos\vartheta_0 + \mu\dot{\vartheta} &= -J\Omega\omega_н \cos\vartheta_0; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\dot{\vartheta}\cos\vartheta_0 + \mu\dot{\psi} &= J\Omega\omega_B \cos\vartheta_0. \end{aligned}\right\} \qquad (213)$$

Переписав систему уравнений (213) в символической форме

$$(J_B p^2 + \mu p)\vartheta + J\Omega\cos\vartheta_0 p\psi = -J\Omega\omega_н\cos\vartheta_0,$$
$$(J_C p^2 + \mu p)\psi - J\Omega\cos\vartheta_0 p\vartheta = J\Omega\omega_B\cos\vartheta_0$$

и введя обозначения

$$J_B p^2 + \mu p = N; \quad J_C p^2 + \mu p = L; \quad J\Omega\cos\vartheta_0 p = Q, \tag{214}$$

будем иметь

$$\left.\begin{aligned} N\vartheta + Q\psi &= -J\Omega\omega_н\cos\vartheta_0; \\ L\psi - Q\vartheta &= J\Omega\omega_B\cos\vartheta_0. \end{aligned}\right\} \tag{215}$$

Из первого уравнения системы (215) определим

$$\psi = -\frac{J\Omega\omega_н\cos\vartheta_0 + N\vartheta}{Q}. \tag{216}$$

Подставив значение (216) во второе уравнение системы (215), получим

$$\frac{Q^2 - LN}{Q}\vartheta = -J\Omega\omega_B\cos\vartheta_0 - L\frac{J\Omega\omega_н\cos\vartheta_0}{Q},$$

откуда

$$\vartheta = -\frac{QJ\Omega\omega_B\cos\vartheta_0 + LJ\Omega\omega_н\cos\vartheta_0}{Q^2 + LN}. \tag{217}$$

Подставляя значение (217) величины ϑ в выражение (216)

$$\psi = -\frac{J\Omega\omega_н\cos\vartheta_0}{Q} + \frac{N}{Q}\cdot\frac{QJ\Omega\omega_B\cos\vartheta_0 + LJ\Omega\omega_н\cos\vartheta_0}{Q^2 + LN}$$

и приводя к общему знаменателю

$$\psi = \frac{-Q^2J\Omega\omega_н\cos\vartheta_0 - LNJ\Omega\omega_н\cos\vartheta_0 + QNJ\Omega\omega_B\cos\vartheta_0 + LNJ\Omega\omega_н\cos\vartheta_0}{Q(Q^2 + LN)},$$

находим

$$\psi = -\frac{QJ\Omega\omega_н\cos\vartheta_0 - NJ\Omega\omega_B\cos\vartheta_0}{Q^2 + LN}. \tag{218}$$

Выражения (217) и (218) характеризуют искомое решение системы уравнений (213). Действительно, учитывая в (217) и (218) значения (214), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} &[J_BJ_Cp^3 + \mu(J_B + J_C)p^2 + J^2\Omega^2\cos^2\vartheta_0 p + \mu^2 p]\vartheta = \\ &= -J^2\Omega^2\omega_B\cos^2\vartheta_0 - J_CJ\Omega\cos\vartheta_0 p\omega_н - \mu J\Omega\omega_н\cos\vartheta_0; \\ &[J_BJ_Cp^3 + \mu(J_B + J_C)p^2 + J^2\Omega^2\cos^2\vartheta_0 p + \mu^2 p]\psi = \\ &= -J^2\Omega^2\omega_н\cos^2\vartheta_0 + J_BJ\Omega\cos\vartheta_0 p\omega_B + \mu J\Omega\omega_B\cos\vartheta_0. \end{aligned}\right\} \tag{219}$$

При анализе уравнений (219) следует учитывать, что по сравнению с частотой нутационных колебаний угловые скорости ω_B и $\omega_н$ изменяют свои значения крайне медленно. В самом деле, ча-

стота нутационных колебаний гироскопа измеряется тысячами радиан в секунду (см. § 14), в то время как угловая скорость суточного вращения Земли (см. § 27) определяется десятитысячными долями радиана в секунду. Если объект будет вращаться в пространстве с угловыми скоростями, в сотни раз превышающими угловую скорость суточного вращения Земли, то и в этом случае его угловая скорость будет несоизмеримо мала по сравнению с круговой частотой нутационных колебаний гироскопа. Таким образом, в пределах нескольких периодов нутационных колебаний гироскопа изменения ω_B и $\omega_н$ столь медленны, что их производные по времени практически не отличаются от нуля. Поэтому в дальнейшем будем полагать

$$\dot{\omega}_B = \frac{d\omega_B}{dt} = p\omega_B = 0;$$

$$\dot{\omega}_н = \frac{d\omega_н}{dt} = p\omega_н = 0.$$

Коэффициент μ, характеризующий значение момента сил трения в опорах подвеса, всегда стремятся свести к минимуму, поэтому практически

$$J^2\Omega^2 \cos^2 \vartheta_0 \gg \mu^2. \tag{220}$$

Пренебрегая в уравнениях (219) величиной μ^2 по сравнению с $J^2\Omega^2 \cos^2 \vartheta_0$, а также ускорениями $\dot{\omega}_B$ и $\dot{\omega}_н$ и переходя к обычной форме записи, получим два дифференциальных уравнения

$$\left.\begin{aligned} &J_B J_C \dddot{\vartheta} + \mu (J_B + J_C) \ddot{\vartheta} + J^2\Omega^2 \dot{\vartheta} \cos^2 \vartheta_0 = \\ &= -J^2\Omega^2 \omega_B \cos^2 \vartheta_0 - \mu J \Omega \omega_н \cos \vartheta_0, \\ &J_B J_C \dddot{\psi} + \mu (J_B + J_C) \ddot{\psi} + J^2\Omega^2 \dot{\psi} \cos^2 \vartheta_0 = \\ &= -J^2\Omega^2 \omega_н \cos^2 \vartheta_0 + \mu J \Omega \omega_B \cos \vartheta_0, \end{aligned}\right\} \tag{221}$$

частными решениями которых будут

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vartheta}_r &= -\omega_B - \frac{\mu\omega_н}{J\Omega \cos \vartheta_0}, \\ \dot{\psi}_r &= -\omega_н + \frac{\mu\omega_B}{J\Omega \cos \vartheta_0}, \end{aligned}\right\} \tag{222}$$

откуда следует

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_r &= -\int \left(\omega_B + \frac{\mu\omega_н}{J\Omega \cos \vartheta_0}\right) dt; \\ \psi_r &= -\int \left(\omega_н - \frac{\mu\omega_B}{J\Omega \cos \vartheta_0}\right) dt. \end{aligned}\right\} \tag{223}$$

Решения однородных дифференциальных уравнений

$$J_B J_C \dddot{\vartheta} + \mu (J_B + J_C) \ddot{\vartheta} + J^2\Omega^2 \dot{\vartheta} \cos^2 \vartheta_0 = 0,$$

$$J_B J_C \dddot{\psi} + \mu (J_B + J_C) \ddot{\psi} + J^2\Omega^2 \dot{\psi} \cos^2 \vartheta_0 = 0$$

будут определяться значениями корней характеристического уравнения

$$p^3 + ap^2 + bp = 0,$$

где

$$a = \mu \frac{J_B + J_C}{J_B J_C}; \quad b = \frac{J^2\Omega^2 \cos^2 \vartheta_0}{J_B J_C}. \tag{224}$$

Решив характеристическое уравнение, находим его корни:

$$p_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}; \quad p_3 = 0.$$

В соответствии с (220) в рассматриваемом случае будет иметь место неравенство

$$b = \frac{J^2\Omega^2 \cos^2 \vartheta_0}{J_B J_C} \gg \left(\mu \frac{J_B + J_C}{2J_B J_C}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

вследствие чего корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm i \sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2}; \quad p_3 = 0.$$

Таким образом, согласно изложенному в § 13, решение системы уравнений (213), с учетом (223), будет определяться выражениями

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= e^{-\frac{a}{2}t} (C_1 \cos nt + C_2 \sin nt) + C_3 - \int \left(\omega_B + \frac{\mu\omega_н}{J\Omega \cos \vartheta_0}\right) dt; \\ \psi &= e^{-\frac{a}{2}t} (C_5 \cos nt + C_6 \sin nt) + C_4 - \int \left(\omega_н - \frac{\mu\omega_B}{J\Omega \cos \vartheta_0}\right) dt. \end{aligned}\right\} \tag{225}$$

Сравнив (225) с (166), убеждаемся, что силы вязкого трения в опорах подвеса вызывают затухание нутационных колебаний гироскопа и порождают дополнительные угловые скорости его систематического отклонения от первоначального положения. Введем в (225) следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= N \cos \varphi; \quad C_2 = N \sin \varphi; \\ C_5 &= L \cos \lambda; \quad C_6 = L \sin \lambda. \end{aligned}\right\} \tag{226}$$

Выделив при этих обозначениях из равенств (225) члены, характеризующие лишь нутационные колебания, можем записать:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= Ne^{-\frac{a}{2}t} \cos (nt - \varphi) + C_3; \\ \psi &= Le^{-\frac{a}{2}t} \cos (nt - \lambda) + C_4, \end{aligned}\right\} \tag{227}$$

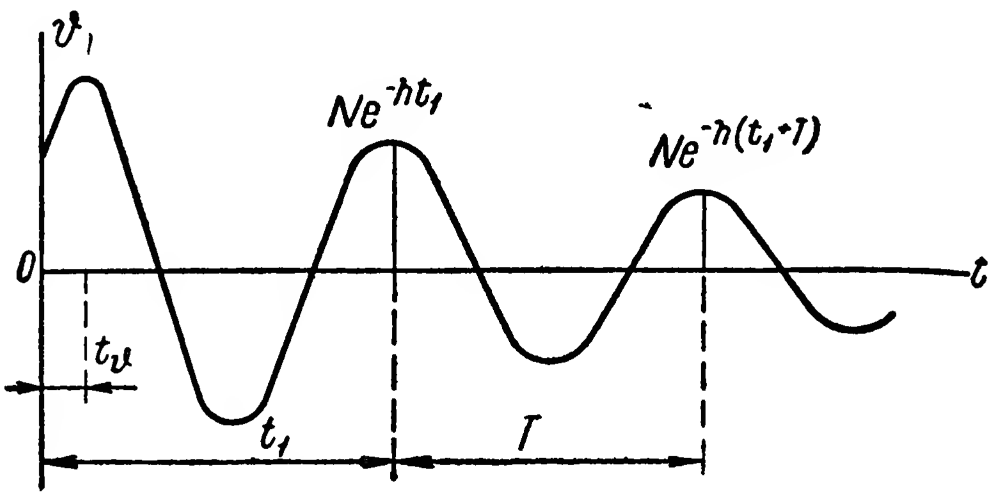
где φ и λ — углы, характеризующие начальные фазы исследуемых колебаний и зависящие от начальных условий движения. Согласно (226)

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{C_2}{C_1}; \quad \lambda = \operatorname{arc\,tg} \frac{C_6}{C_5}.$$

Из выражений (227) следует, что амплитуды $Ne^{-\frac{a}{2}t}$ и $Le^{-\frac{a}{2}t}$ непрерывно уменьшаются. Сказанное иллюстрируется графиком (рис. 66) изменения углов ϑ и ψ, на котором величины $\frac{\varphi}{n} = t_\vartheta$ и $\frac{\lambda}{n} = t_\psi$ характеризуют смещение во времени первых максимальных значений ϑ и ψ относительно начального момента $t = 0$.

Интенсивность уменьшения амплитуд нутационных колебаний зависит от коэффициента затухания $h = \frac{a}{2}$, величина которого согласно (224) определяется коэффициентом μ момента сил вязкого трения и параметрами гироскопа:

$$h = \frac{a}{2} = \mu \frac{J_B + J_C}{2J_B J_C}. \quad (228)$$



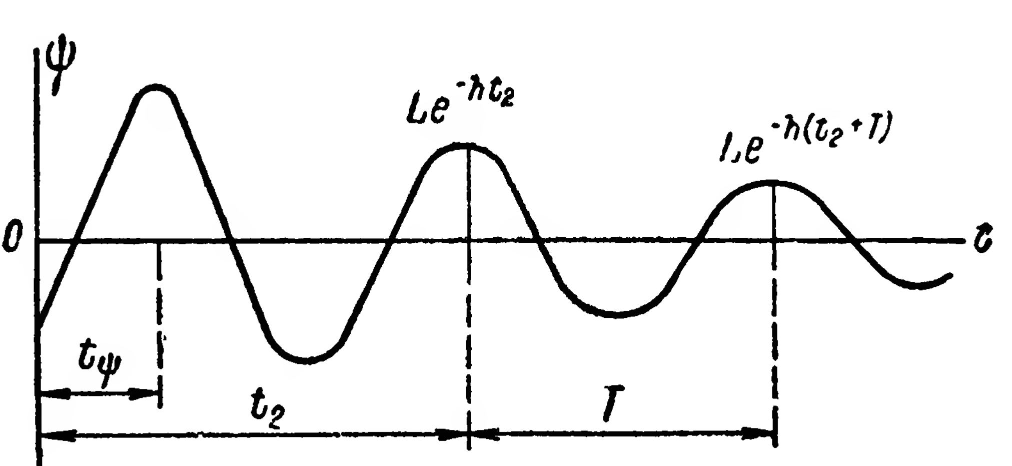


Рис. 66. Графики затухания нутационных колебаний гироскопа, вызываемого силами вязкого трения.

Коэффициент затухания h позволяет найти отношение двух последовательных максимальных отклонений исследуемой величины в одном направлении. Так, если в моменты времени t_1 и t_2 отклонения углов ϑ и ψ соответственно

$$\vartheta(t_1) = Ne^{-ht_1} = N_1; \quad \psi(t_2) = Le^{-ht_2} = L_1,$$

то по прошествии времени T одного периода нутационных колебаний отклонения указанных углов будут

$$\vartheta(t_1 + T) = Ne^{-h(t_1+T)} = N_2; \quad \psi(t_2 + T) = Le^{-h(t_2+T)} = L_2.$$

Разделив последующие отклонения на предыдущие, найдем отношение двух последовательных отклонений в одном

направлений:

$$\frac{\vartheta(t_1+T)}{\vartheta(t_1)}=\frac{Ne^{-h(t_1+T)}}{Ne^{-ht_1}}=\frac{N_2}{N_1}=e^{-hT};$$

$$\frac{\psi(t_2+T)}{\psi(t_2)}=\frac{Le^{-h(t_2+T)}}{Le^{-ht_2}}=\frac{L_2}{L_1}=e^{-hT}.$$

Произведение

$$hT=\mu\frac{J_B+J_C}{2J_BJ_C}T=\ln\left(\frac{N_2}{N_1}\right)=\ln\left(\frac{L_2}{L_1}\right)$$

называется декрементом затухания; оно характеризует убывание амплитуды колебаний.

Величина, обратная декременту затухания,

$$\frac{1}{hT}=\frac{2J_BJ_C}{\mu(J_B+J_C)T}$$

определяет число колебаний, по прошествии которых их амплитуда уменьшится в e раз, т. е. в 2,718, или примерно в 3 раза.

Отношение двух последовательных размахов исследуемых колебаний может быть вычислено и непосредственно, если учесть, что разложение величины e^{-hT} в ряд дает [1]

$$e^{-hT}=1-\frac{hT}{1!}+\frac{(hT)^2}{2!}-\frac{(hT)^3}{3!}+\cdots$$

Ограничиваясь первыми двумя членами приведенного ряда, приближенно можем записать

$$\frac{N_2}{N_1}=\frac{L_2}{L_1}=e^{-hT}\approx 1-hT. \qquad (229)$$

Полученные выражения показывают, что чем больше коэффициент момента сил трения, а тем самым и коэффициент затухания h, тем интенсивнее уменьшаются амплитуды нутационных колебаний. Однако и после прекращения нутационных колебаний гироскоп продолжает вращаться вокруг осей подвеса с угловыми скоростями (222). Наличие сил вязкого трения, как это следует из (225), изменяет угловые скорости видимого ухода гироскопа соответственно на величины

$$\Delta\dot{\vartheta}=-\frac{\mu\omega_{н}}{J\Omega\cos\vartheta_0};\quad \Delta\dot{\psi}=\frac{\mu\omega_B}{J\Omega\cos\vartheta_0}. \qquad (230)$$

Различие в характере движения гироскопа в подвижной системе координат при отсутствии и наличии в опорах подвеса сил вяз-

[1] См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Т. I, Гостехиздат, 1948, стр. 310.

кого трения можно продемонстрировать по перемещениям его полюса на картинной плоскости (рис. 67). Если гироскоп свободен от сил вязкого трения ($\mu = 0$), то его полюс, как это следует из выражений (166), будет непрерывно отклоняться от начала координат O^* как вдоль оси $O^*\psi$, так и вдоль оси $O^*\vartheta$, совершая при этом незатухающие нутационные колебания. Угловые скорости такого отклонения при принятом обозначении (201) будут равны $-\omega_B$ и $-\omega_н$. Следовательно, если ω_B и $\omega_н$ постоянны, то в любой

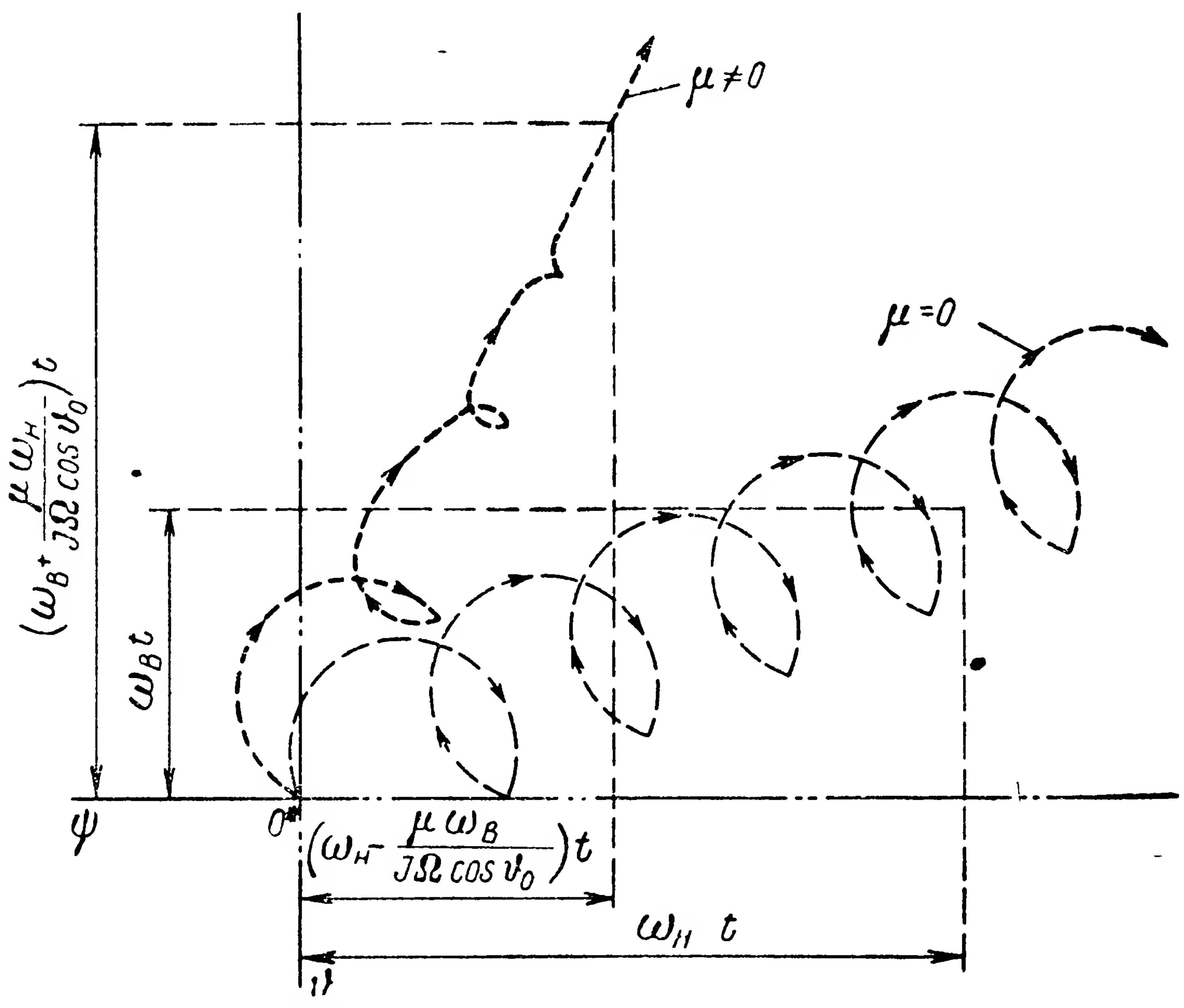


Рис. 67. Траектория движения полюса гироскопа при наличии и отсутствии в опорах его подвеса сил вязкого трения.

момент времени t положение точки, вокруг которой полюс совершает колебания, будет определяться координатами

$$\vartheta = -\omega_B t; \quad \psi = -\omega_н t. \tag{231}$$

Если же в опорах подвеса гироскопа существуют силы вязкого трения ($\mu \neq 0$), то его полюс будет систематически отклоняться от начала координат O^*, как это следует из (225), с угловыми скоростями

$$\dot{\vartheta} = -\left(\omega_B + \frac{\mu\omega_н}{J\Omega\cos\vartheta_0}\right); \quad \dot{\psi} = -\left(\omega_н - \frac{\mu\omega_B}{J\Omega\cos\vartheta_0}\right)$$

и положение центра, вокруг которого происходят колебания полюса, в момент времени t будет определяться координатами

$$\vartheta = -\left(\omega_B + \frac{\mu\omega_н}{J\Omega\cos\vartheta_0}\right)t; \quad \psi = -\left(\omega_н - \frac{\mu\omega_B}{J\Omega\cos\vartheta_0}\right)t,$$

отличными от (231).

Как видим, силы вязкого трения вызывают изменение скоростей отклонения полюса гироскопа от начального положения и обусловливают затухание его нутационных колебаний. При постоянных значениях ω_B и $\omega_н$ полюс гироскопа после прекращения нутационных колебаний будет перемещаться на картинной плоскости (рис. 67) по прямой линии.

Пример 18. Определить угловые скорости отклонения гироскопа с тремя степенями свободы от первоначально заданного ему положения в подвижной системе координат, вращающейся в пространстве вокруг осей подвеса гироскопа *OB* и *OC* и перпендикулярной им оси *OD* с угловыми скоростями $\omega_B = 0{,}15$ град./мин., $\omega_C = 0{,}20$ град./мин., $\omega_D = 0{,}08$ град./мин. Определить также интенсивность затухания нутационных колебаний гироскопа, учитывая, что в опорах подвеса существуют силы вязкого трения. Параметры гироскопа: $J\Omega = 2000$ *Гсмсек*, $J_B = 1{,}1$ *Гсмсек*^{2}, $J_C = 1{,}6$ *Гсмсек*^{2}, $\mu = 2{,}0$ *Гсмсек*. В начальный момент главная ось гироскопа составляет с перпендикуляром *OD* угол $\vartheta_0 = 12°$.

Вычислим по формуле (201) значение угловой скорости:

$$\omega_н = \omega_C + \omega_D \operatorname{tg} \vartheta_0 = 0{,}20 + 0{,}08 \operatorname{tg} 12° = 0{,}217 \text{ град./мин.}$$

Переводя значения угловых скоростей ω_B и $\omega_н$ в радианы в секунду, будем иметь

$$\omega_B = \frac{0{,}15}{57{,}3 \cdot 60} = 4{,}38 \cdot 10^{-5} \text{ сек.}^{-1};$$

$$\omega_н = \frac{0{,}217}{57{,}3 \cdot 60} = 6{,}32 \cdot 10^{-5} \text{ сек.}^{-1}.$$

Согласно выражениям (230) находим модули угловых скоростей гироскопа, вызываемых силами вязкого трения:

$$\Delta\dot{\vartheta} = \mu \frac{\omega_н}{J\Omega \cos \vartheta_0} = 2{,}0 \frac{6{,}32 \cdot 10^{-5}}{2000 \cos 12°} = 6{,}46 \cdot 10^{-8} \text{ сек.}^{-1};$$

$$\Delta\dot{\psi} = \mu \frac{\omega_B}{J\Omega \cos \vartheta_0} = 2{,}0 \frac{4{,}38 \cdot 10^{-5}}{2000 \cos 12°} = 4{,}48 \cdot 10^{-8} \text{ сек.}^{-1}$$

Суммируя найденные значения $\Delta\dot{\vartheta}$ и $\Delta\dot{\psi}$ с угловыми скоростями ω_B и $\omega_н$, находим в соответствии с (222) угловые скорости систематического отклонения гироскопа относительно подвижной координатной системы:

$$\dot{\vartheta} = -\omega_B - \Delta\dot{\vartheta} = -4{,}38 \cdot 10^{-5} - 6{,}46 \cdot 10^{-8} = -4{,}39 \cdot 10^{-5} \text{ сек.}^{-1};$$

$$\dot{\psi} = -\omega_н + \Delta\dot{\psi} = -6{,}32 \cdot 10^{-5} + 4{,}48 \cdot 10^{-8} = -6{,}32 \cdot 10^{-5} \text{ сек.}^{-1},$$

или соответственно

$$\dot{\vartheta} = -4{,}39 \cdot 10^{-5} \cdot 57{,}3 \cdot 60 = -0{,}15 \text{ град./мин.};$$

$$\dot{\psi} = -6{,}32 \cdot 10^{-5} \cdot 57{,}3 \cdot 60 = -0{,}22 \text{ град./мин.}$$

Для выяснения интенсивности затухания нутационных колебаний гироскопа определим по (228) коэффициент затухания:

$$h = \mu \frac{J_B + J_C}{2 J_B J_C} = 2{,}0 \frac{1{,}1 + 1{,}6}{2 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}6} = 1{,}53 \text{ сек.}^{-1};$$

по (53) частоту нутационных колебаний:

$$n = \frac{J\Omega \cos \vartheta_0}{\sqrt{J_B J_C}} = \frac{2000 \cdot \cos 12^\circ}{\sqrt{1,1 \cdot 1,6}} = 1473 \text{ сек.}^{-1}$$

и по (15) их период:

$$T = \frac{2\pi}{n} = \frac{2 \cdot 3,14}{1473} = 4,26 \cdot 10^{-3} \text{ сек.}$$

Подставив вычисленные значения коэффициента затухания и периода нутационных колебаний в формулу (229), найдем значение коэффициента, характеризующего уменьшение их амплитуд:

$$e^{-hT} \approx 1 - hT = 1 - 1,53 \cdot 4,26 \cdot 10^{-3} = 0,004.$$

Таким образом, каждая последующая амплитуда нутационных колебаний будет уменьшаться примерно на 0,5%.

§ 36. ВЛИЯНИЕ СИЛ СУХОГО ТРЕНИЯ НА ХАРАКТЕР ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА

Силы сухого трения в опорах подвеса оказывают на движение гироскопа влияние, отличное от воздействия сил вязкого трения. Рассмотрим систему (210), которая в данном случае, учитывая (201) и (208), принимает вид

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega(\dot{\psi} + \omega_{\text{н}})\cos\vartheta_0 &= -M_{0\,\text{т}B}\,\text{sign}\,\dot{\vartheta};\\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega(\dot{\vartheta} + \omega_B)\cos\vartheta_0 &= -M_{0\,\text{т}C}\,\text{sign}\,\dot{\psi}. \end{aligned}\right\} \qquad (232)$$

Для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (232) вновь обратимся к методу последовательных приближений (см. § 11). Моменты сил трения в осях подвеса гироскопа, в соответствии с условием (212), обычно малы, поэтому они лишь незначительно искажают основной характер движения гироскопа, но оказывают существенное влияние на его точность.

Для определения изменений знака моментов сил сухого трения воспользуемся законами изменения угловых скоростей $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\psi}$, найденными без учета сил трения. Как было показано выше (§ 26), характер изменения углов ϑ и ψ с течением времени по отношению к подвижной системе координат при этих условиях определяется из выражений (166). Дифференцируя (166) и учитывая (201), найдем

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= -nC_1 \sin nt + nC_2 \cos nt - \omega_B;\\ \dot{\psi} &= \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\,(nC_1 \cos nt + nC_2 \sin nt) - \omega_{\text{н}}. \end{aligned}\right\} \qquad (233)$$

Если положить, что

$$nC_1 = D \sin \varphi; \quad nC_2 = D \cos \varphi, \qquad (234)$$

то выражения (233) могут быть переписаны в более удобном виде

$$\dot{\vartheta} = D\cos(nt + \varphi) - \omega_B;$$

$$\dot{\psi} = \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\, D\sin(nt + \varphi) - \omega_н,$$

где φ — угол, характеризующий начальную фазу исследуемых колебаний и равный, согласно (234),

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{C_1}{C_2}.$$

Изменение направления моментов сил трения обусловлено переменой знака угловых скоростей движения. Нетрудно заметить, что изменение направлений $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\psi}$ в рассматриваемом случае будет зависеть от частоты n нутационных колебаний гироскопа, которая, как известно,[1] зависит не от начальных условий, а от его конструктивных параметров. Поэтому, считая $\varphi = 0$, будем полагать, что

$$\dot{\vartheta} = D\cos nt - \omega_B; \quad \dot{\psi} = D\sin nt - \omega_н. \tag{235}$$

Вводя (235) в правые части уравнений (232), можем записать:

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega(\dot{\psi} + \omega_н)\cos\vartheta_0 &= -M_{0тB}\operatorname{sign}(D\cos nt - \omega_B); \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega(\dot{\vartheta} + \omega_B)\cos\vartheta_0 &= -M_{0тC}\operatorname{sing}(D\sin nt - \omega_н). \end{aligned}\right\} \tag{236}$$

Из (236) следует, что изменение знака моментов сил сухого трения зависит от соотношения между угловыми скоростями нутационных колебаний гироскопа и перемещений в пространстве его корпуса. В тех случаях, когда амплитуда D значительно превышает угловые скорости ω_B и $\omega_н$ (рис. 68, *а*), основное влияние на изменение знака моментов сил трения будут оказывать угловые скорости нутационных колебаний. Если же значения ω_B и $\omega_н$ будут превосходить величину амплитуды D (рис. 68, *б*), знак момента сил трения будет зависеть лишь от направления угловой скорости вращения корпуса прибора.

Исследуем влияние моментов сил сухого трения в опорах подвеса гироскопа на характер его движения в том случае, когда амплитуда D нутационных колебаний значительно превосходит угловые скорости вращения корпуса прибора. Пренебрежем в правых частях уравнений (236) значениями ω_B и $\omega_н$ и опустим из рассмотрения уходы гироскопа, обусловливаемые вращением в пространстве его корпуса; тогда исходная система уравнений примет вид

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\psi}\cos\vartheta_0 &= -M_{0тB}\operatorname{sign} D\cos nt; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\dot{\vartheta}\cos\vartheta_0 &= -M_{0тC}\operatorname{sign} D\sin nt. \end{aligned}\right\} \tag{237}$$

---

[1] См.: С. П. Стрелков. Введение в теорию колебаний. ГИТТЛ, 1950, стр. 24.

Решение соответствующей однородной системы уравнений (50) (см. § 14) при начальных условиях

$$\vartheta(0) = 0; \quad \psi(0) = 0; \quad \dot{\vartheta}(0) = \dot{\vartheta}_{н}; \quad \dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_{н}$$

определяется по выражениям (59).

Для упрощения будем полагать, что $\dot{\psi}_{н} = 0$ и моменты инерции гироскопа относительно осей подвеса равны друг другу:

$$J_B = J_C = J_{п}. \quad (238)$$

При этих допущениях выражения (59) примут уже знакомый нам вид

$$\vartheta = \frac{J_{п}\dot{\vartheta}_{н}}{J\Omega \cos\vartheta_0} \sin nt;$$

$$\psi = -\frac{J_{п}\dot{\vartheta}_{н}}{J\Omega \cos\vartheta_0} \cos nt + \frac{J_{п}\dot{\vartheta}_{н}}{J\Omega \cos\vartheta_0}.$$

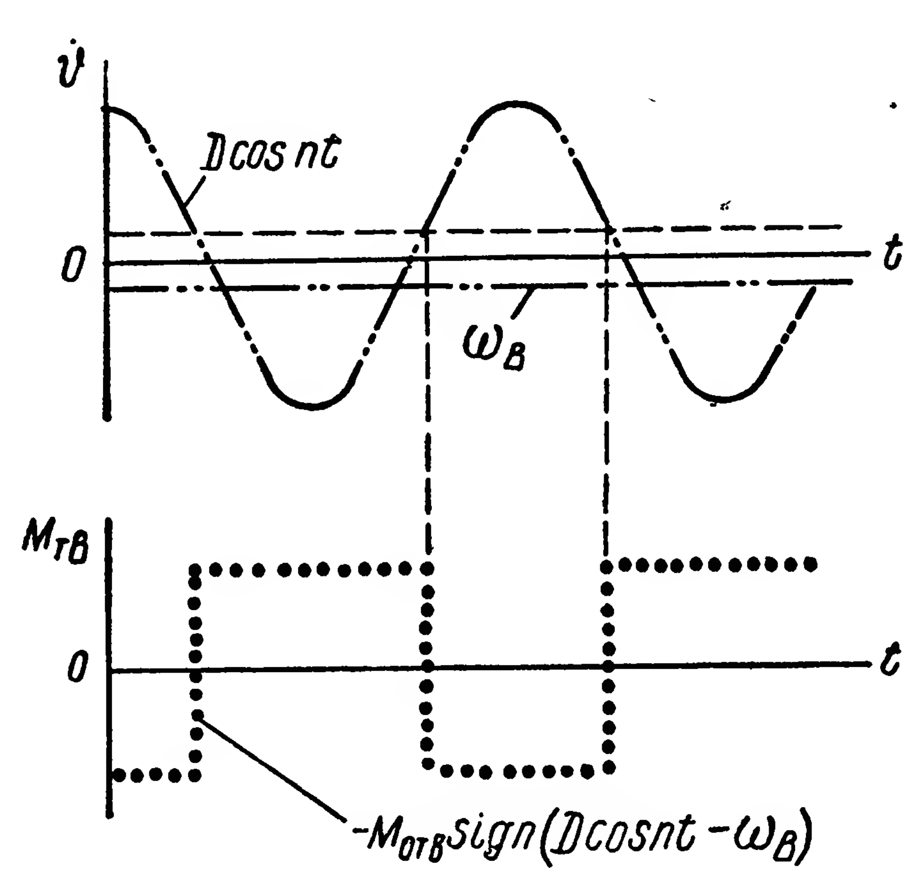
Вводя обозначение

$$\frac{J_{п}\dot{\vartheta}_{н}}{J\Omega \cos\vartheta_0} = \vartheta_m, \quad (239)$$

возводя каждое из полученных выражений в квадрат и складывая их между собой, найдем уравнение траектории

$$\vartheta^2 + (\psi - \vartheta_m)^2 = \vartheta_m^2,$$

которую, как нам уже известно (см. рис. 36), проекция полюса гироскопа описывает на картинной плоскости.



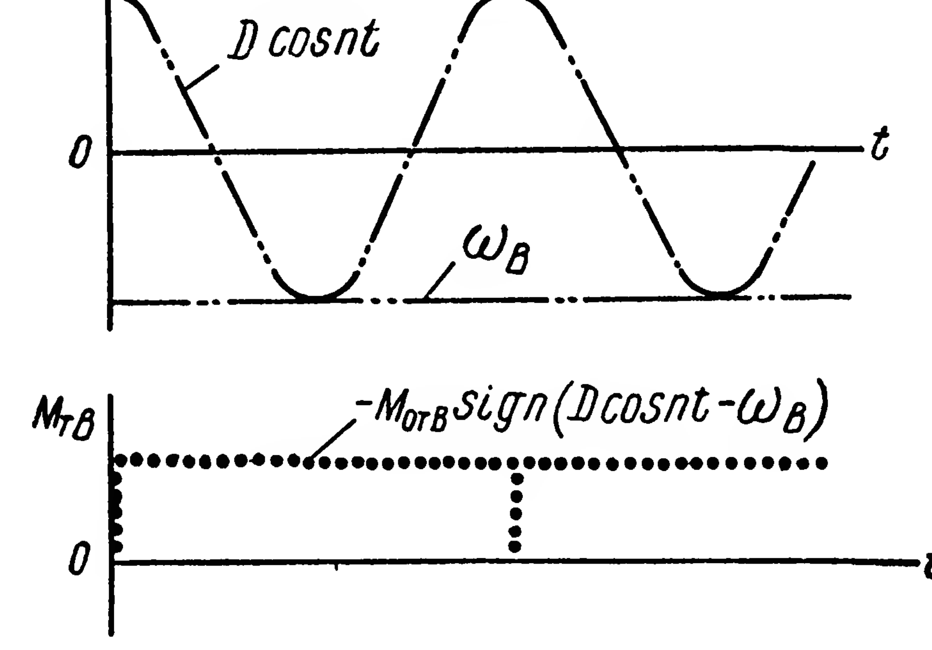


Рис. 68. Графики изменения момента сил трения: *а* — при $D > \omega_B$; *б* — при $D \leqslant \omega_B$.

В нашем частном случае траектория полюса будет представлять собой окружность (рис. 69) радиуса ϑ_m, центр которой расположен на оси $O^*\psi$ и удален от начала координат на расстояние ϑ_m. Полученный вид траектории полюса гироскопа на картинной плоскости еще раз (см. § 14) подтверждает, что при отсутствии в опорах подвеса сил трения ($M_{0тB} = M_{0тC} = 0$) гироскоп совершает незатухающие гармонические нутационные колебания.

Чтобы выяснить, как силы сухого трения влияют на характер движения гироскопа, рассмотрим перемещения его полюса за один

период T нутационных колебаний при наличии указанных сил в опорах подвеса. Эти перемещения будем исследовать для каждой четверти периода T отдельно.

При движении полюса гироскопа в первой четверти периода, за время от 0 до $\frac{T}{4}$, моменты сил трения не меняют своего знака. В первой четверти периода T углы ϑ и ψ непрерывно растут (рис. 69) и, следовательно, угловые скорости $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\psi}$ положительны. Поэтому моменты сил трения в течение первой четверти периода T будут постоянны и притом отрицательны. Учитывая сказанное, перепишем систему уравнений (237) в следующем виде:

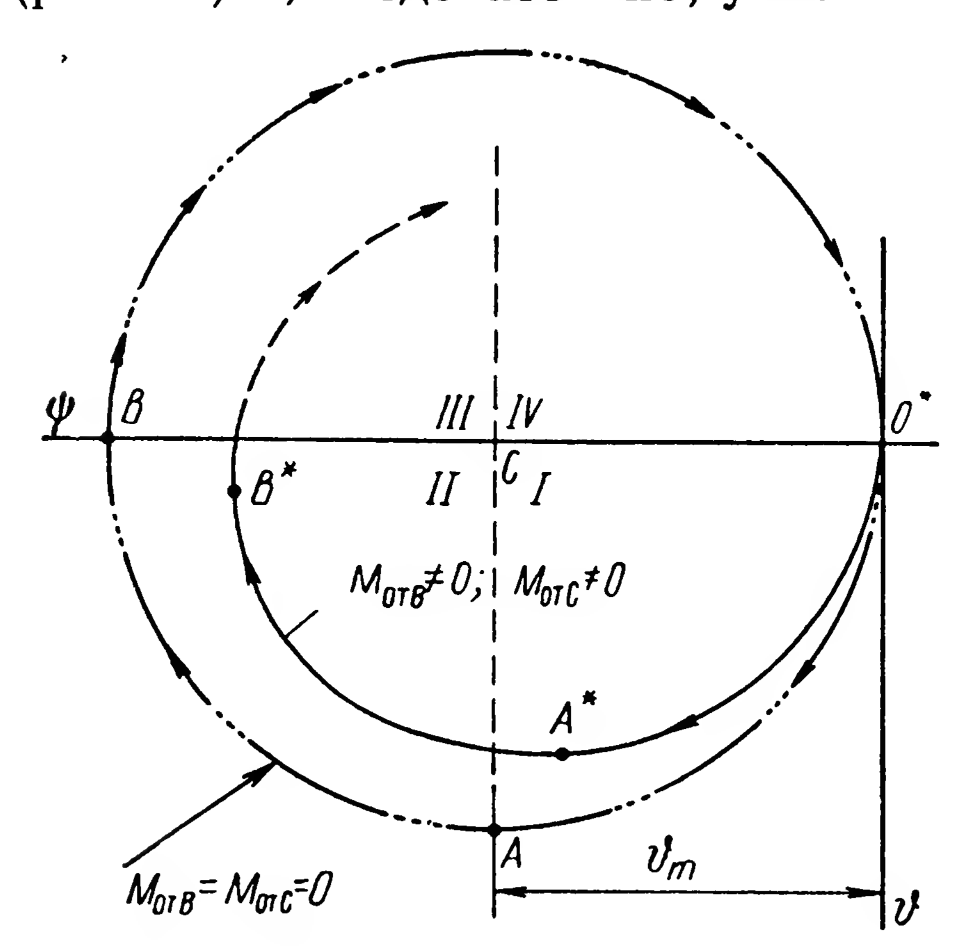


Рис. 69. Графики затухания нутационных колебаний гироскопа, вызываемого силами сухого трения.

$$J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\psi}\cos\vartheta_0 = -M_{0\text{т}B};$$

$$J_C\ddot{\psi} - J\Omega\dot{\vartheta}\cos\vartheta_0 = -M_{0\text{т}C}.$$

Решение аналогичной системы (47) было получено в § 15 и определялось выражениями (64), которые в рассматриваемом случае, учитывая (238), принимают вид

$$\vartheta = C_1\cos nt + C_2\sin nt + C_3 + \frac{M_{0\text{т}C}}{J\Omega\cos\vartheta_0}t; \quad (240)$$

$$\psi = C_1\sin nt - C_2\cos nt + C_4 - \frac{M_{0\text{т}B}}{J\Omega\cos\vartheta_0}t.$$

Вычислим при начальных условиях

$$\vartheta(0) = 0; \quad \psi(0) = 0; \quad \dot{\vartheta}(0) = \dot{\vartheta}_\text{н}; \quad \dot{\psi}(0) = 0$$

постоянные интегрирования, которые согласно (53) и (238) будут определяться равенствами

$$C_1 = \frac{J_\text{п}M_{0\text{т}B}}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}; \quad C_2 = \frac{J_\text{п}\dot{\vartheta}_\text{н}}{J\Omega\cos\vartheta_0} - \frac{J_\text{п}M_{0\text{т}C}}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2};$$

$$C_3 = -\frac{J_\text{п}M_{0\text{т}B}}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}; \quad C_4 = \frac{J_\text{п}\dot{\vartheta}_\text{н}}{J\Omega\cos\vartheta_0} - \frac{J_\text{п}M_{0\text{т}C}}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}.$$

Подставляя найденные значения постоянных интегрирования в выражения (240) и учитывая (239), будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\vartheta &= \frac{J_{п}M_{0тB}}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}\cos nt + \left[\vartheta_m - \frac{J_{п}M_{0тC}}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}\right]\sin nt - \\ &\quad - \frac{J_{п}M_{0тB}}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2} + \frac{M_{0тC}}{J\Omega\cos\vartheta_0}\,t; \\ \psi &= \frac{J_{п}M_{0тB}}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}\sin nt - \left[\vartheta_m - \frac{J_{п}M_{0тC}}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}\right]\cos nt + \\ &\quad + \vartheta_m - \frac{J_{п}M_{0тC}}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2} - \frac{M_{0тB}}{J\Omega\cos\vartheta_0}\,t.\end{aligned}\right\} \tag{241}$$

Из полученных выражений нетрудно вычислить значения углов ϑ и ψ к концу первой четверти периода T нутационных колебаний, когда nt согласно (60) принимает значение

$$nt = n\frac{T}{4} = n\frac{1}{4}\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{2}.$$

Подставив значение nt в (241), найдем, что в момент $t = \frac{T}{4}$ углы ϑ и ψ будут равны

$$\vartheta\left(\frac{T}{4}\right) = \vartheta_m - \frac{J_{п}(M_{0тB} + M_{0тC})}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2} + \frac{M_{0тC}}{J\Omega\cos\vartheta_0}\cdot\frac{T}{4};$$

$$\psi\left(\frac{T}{4}\right) = \vartheta_m - \frac{J_{п}(M_{0тC} - M_{0тB})}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2} - \frac{M_{0тB}}{J\Omega\cos\vartheta_0}\cdot\frac{T}{4},$$

или, учитывая (60) и (238),

$$\vartheta\left(\frac{T}{4}\right) = \vartheta_m - \frac{J_{п}(M_{0тB} + M_{0тC})}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2} + \frac{M_{0тC}}{J\Omega\cos\vartheta_0}\cdot\frac{2\pi J_{п}}{4J\Omega\cos\vartheta_0},$$

$$\psi\left(\frac{T}{4}\right) = \vartheta_m - \frac{J_{п}(M_{0тC} + M_{0тB})}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2} - \frac{M_{0тB}}{J\Omega\cos\vartheta_0}\cdot\frac{2\pi J_{п}}{4J\Omega\cos\vartheta_0},$$

откуда после преобразований

$$\left.\begin{aligned}\vartheta\left(\frac{T}{4}\right) &= \vartheta_m - \frac{J_{п}}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}(M_{0тB} - 0{,}57M_{0тC}); \\ \psi\left(\frac{T}{4}\right) &= \vartheta_m - \frac{J_{п}}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}(M_{0тC} + 1{,}57M_{0тB}).\end{aligned}\right\} \tag{242}$$

Вычисленные значения углов $\vartheta\left(\frac{T}{4}\right)$ и $\psi\left(\frac{T}{4}\right)$ показывают, что движение гироскопа при наличии в опорах его подвеса сил сухого трения отлично от движения свободного гироскопа. Полюс свободного гироскопа при перемещении по картинной плоскости (рис. 69) к моменту времени $t = \frac{T}{4}$ достигает точки A, удаленной

от начала координат по обеим осям $O^*\vartheta$ и $O^*\psi$ на равные расстояния ϑ_m. В рассматриваемом случае полюс гироскопа к моменту времени $t = \frac{T}{4}$ не совместится с точкой A. В результате действия сил трения он к концу первой четверти периода достигнет некоторой точки A^*, координаты которой определяются выражениями (242).

Для определения угловых скоростей движения гироскопа в первой четверти периода его нутационных колебаний продифференцируем равенства (241) с учетом (53) и (238):

$$\dot{\vartheta} = -\frac{M_{0\text{т}B}}{J\Omega\cos\vartheta_0}\sin nt + \left(\frac{J\Omega\vartheta_m\cos\vartheta_0}{J_\text{п}} - \frac{M_{0\text{т}C}}{J\Omega\cos\vartheta_0}\right)\cos nt + \frac{M_{0\text{т}C}}{J\Omega\cos\vartheta_0};$$

$$\dot{\psi} = \frac{M_{0\text{т}B}}{J\Omega\cos\vartheta_0}\cos nt + \left(\frac{J\Omega\,\vartheta_m\cos\vartheta_0}{J_\text{п}} - \frac{M_{0\text{т}C}}{J\Omega\cos\vartheta_0}\right)\sin nt - \frac{M_{0\text{т}B}}{J\Omega\cos\vartheta_0},$$

откуда для момента времени $t = \frac{T}{4}$, когда $nt = \frac{\pi}{2}$, в соответствии с (239) находим

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vartheta}\left(\frac{T}{4}\right) &= \frac{M_{0\text{т}C} - M_{0\text{т}B}}{J\Omega\cos\vartheta_0}; \\ \dot{\psi}\left(\frac{T}{4}\right) &= \dot{\vartheta}_\text{н} - \frac{M_{0\text{т}C} + M_{0\text{т}B}}{J\Omega\cos\vartheta_0}. \end{aligned}\right\} \tag{243}$$

При исследовании движения гироскопа во второй четверти периода его нутационных колебаний условимся отсчет времени вести от момента, соответствующего окончанию первой четверти периода T. Обозначив время во второй четверти через t^*, будем иметь следующую зависимость между ним и текущим значением t:

$$t^* = t - \frac{T}{4}. \tag{244}$$

Во второй четверти периода (рис. 69) угол ψ продолжает расти, а угол ϑ начинает уменьшаться. Следовательно, угловая скорость $\dot{\vartheta}$ во второй четверти становится отрицательной, в связи с чем момент сил трения $M_{0\text{т}B}$ принимает положительное значение. Таким образом, изменения углов ϑ и ψ на протяжении второй четверти периода будут характеризоваться выражениями

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= C_1\cos nt^* + C_2\sin nt^* + C_3 + \frac{M_{0\text{т}C}}{J\Omega\cos\vartheta_0}t^*; \\ \psi &= C_1\sin nt^* - C_2\cos nt^* + C_4 + \frac{M_{0\text{т}B}}{J\Omega\cos\vartheta_0}t^*, \end{aligned}\right\} \tag{245}$$

вытекающими из (240) после перемены в них знака перед $M_{0тB}$ на обратный.

Пользуясь методом припасовывания, [1] примем за начальные условия те, которые характеризовали движение гироскопа в момент окончания первой четверти нутационных колебаний, соответствующий совмещению проекции его полюса на картинной плоскости с точкой A^*. Эти условия определяются из выражений (242) и (243), в связи с чем из равенств (245) и их первых производных вытекают следующие зависимости:

$$\vartheta(0) = C_1 + C_3 = \vartheta_m - \frac{J_п}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}(M_{0тB} - 0{,}57M_{0тC});$$

$$\psi(0) = -C_2 + C_4 = \vartheta_m - \frac{J_п}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}(M_{0тC} + 1{,}57M_{0тB});$$

$$\dot\vartheta(0) = nC_2 + \frac{M_{0тC}}{J\Omega\cos\vartheta_0} = \frac{M_{0тC} - M_{0тB}}{J\Omega\cos\vartheta_0};$$

$$\dot\psi(0) = nC_1 + \frac{M_{0тB}}{J\Omega\cos\vartheta_0} = \dot\vartheta_н - \frac{M_{0тC} + M_{0тB}}{J\Omega\cos\vartheta_0},$$

из которых, учитывая (53) и (239), следует

$$C_1 = \vartheta_m - \frac{J_п(M_{0тC} + 2M_{0тB})}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2};$$

$$C_2 = -\frac{J_п M_{0тB}}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}; \quad C_3 = \frac{J_п(1{,}57M_{0тC} + M_{0тB})}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2};$$

$$C_4 = \vartheta_m - \frac{J_п(M_{0тC} + 2{,}57M_{0тB})}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}.$$

Подставив вычисленные значения постоянных интегрирования в выражения (245), будем иметь

$$\vartheta = \left[\vartheta_m - \frac{J_п(M_{0тC} + 2M_{0тB})}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}\right]\cos nt^* - \frac{J_п M_{0тB}}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}\sin nt^* +$$
$$+ \frac{J_п(1{,}57M_{0тC} + M_{0тB})}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2} + \frac{M_{0тC}}{J\Omega\cos\vartheta_0}t^*;$$

$$\psi = \left[\vartheta_m - \frac{J_п(M_{0тC} + 2M_{0тB})}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}\right]\sin nt^* + \frac{J_п M_{0тB}}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}\cos nt^* +$$
$$+ \vartheta_m - \frac{J_п(M_{0тC} + 2{,}57M_{0тB})}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2} + \frac{M_{0тB}}{J\Omega\cos\vartheta_0}t^*.$$

[1] См.: Н. В. Бутенин. Элементы теории нелинейных колебаний. Судпромгиз, 1962, стр. 58.

К концу второй четверти периода, по прошествии времени $t^* = \frac{T}{4}$ от нового начала отсчета, когда $nt^* = n\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$, углы ϑ и ψ поворота гироскопа вокруг осей подвеса достигнут значений

$$\vartheta\left(t^* = \frac{T}{4}\right) = -\frac{J_п M_{отB}}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2} + \frac{J_п(1{,}57M_{отC} + M_{отB})}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2} + \\ + \frac{M_{отC}}{J\Omega\cos\vartheta_0}\cdot\frac{T}{4};$$

$$\psi\left(t^* = \frac{T}{4}\right) = 2\vartheta_m - \frac{J_п(M_{отC} + 2M_{отB})}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2} - \frac{J_п(M_{отC} + 2{,}57M_{отB})}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2} + \\ + \frac{M_{отB}}{J\Omega\cos\vartheta_0}\cdot\frac{T}{4}$$

или, учитывая зависимости (60) и (244),

$$\left.\begin{aligned} \vartheta\left(\frac{T}{2}\right) &= \frac{3{,}14J_п M_{отC}}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}; \\ \psi\left(\frac{T}{2}\right) &= 2\vartheta_m - \frac{J_п(2M_{отC} + 3M_{отB})}{(J\Omega\cos\vartheta_0)^2}. \end{aligned}\right\} \quad (246)$$

Как видим, полюс гироскопа уже не совместится с точкой B. Вследствие действия в опорах подвеса сил сухого трения он к концу второй четверти периода нутационных колебаний совместится на картинной плоскости с точкой B^* (рис. 69). Следовательно, силы сухого трения, так же как и вязкого, будут приводить к постепенному уменьшению амплитуд нутационных колебаний гироскопа. Однако характер их затухания под действием сил сухого трения будет отличаться от процесса демпфирования нутационных колебаний силами вязкого трения. Если силы вязкого трения порождают у гироскопа, установленного на подвижном основании, систематический дрейф сразу же с максимальными значениями угловых скоростей (230), то силы сухого трения порождают дрейф с угловой скоростью, постепенно возрастающей от нуля до определенного максимума.

Рассмотрим подробнее изменение момента сил сухого трения за один период нутационных колебаний, например относительно внутренней оси подвеса гироскопа (рис. 70). Нетрудно видеть, что совместное влияние угловых скоростей $D\cos nt$ и ω_B на изменение знака момента сил сухого трения будет обусловливать более продолжительное время его действия в одном направлении, чем в противоположном. Действительно, нулевые значения суммарной угловой скорости $D\cos nt - \omega_B$, которым соответствуют изменения знака сил трения, имеют место не в моменты времени $\frac{T}{4}$ и $\frac{3T}{4}$, а в моменты, смещенные относительно их на величину Δ. Эти мгно-

вения указаны на графике точками a и b. Тем самым действие на гироскоп моментов сил трения во взаимно противоположных направлениях за один период нутационных колебаний несимметрично.

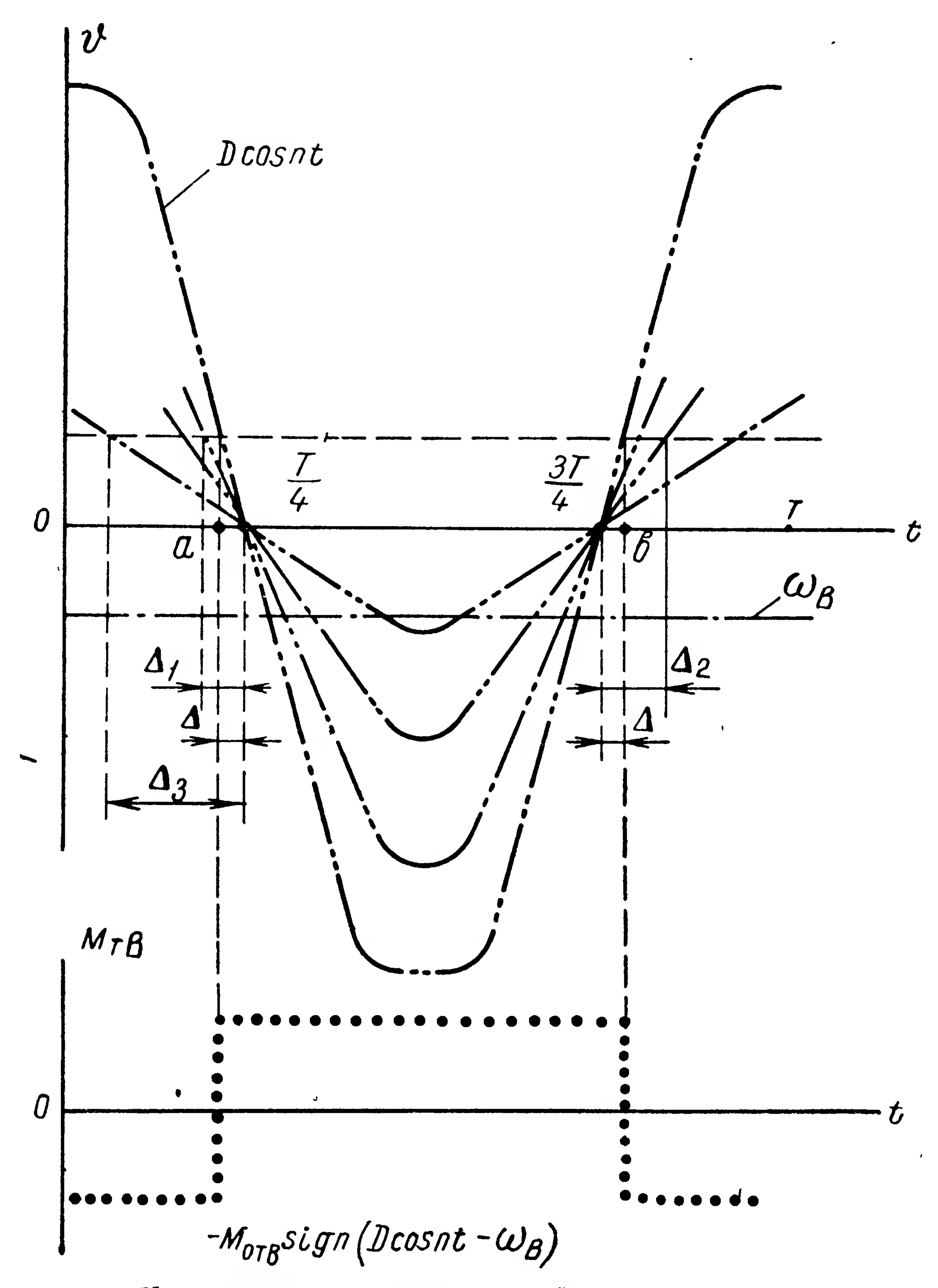


Рис. 70. К определению изменения действия момента сил сухого трения при затухании нутационных колебаний.

Действие момента сил трения в отрицательном направлении продолжается в течение времени $0{,}5T - 2\Delta$, а в противоположном — в течение времени $0{,}5T + 2\Delta$. Таким образом, за один период T нутационных колебаний гироскоп под влиянием сил сухого трения, согласно основному закону прецессии (32), повернется сначала в одном, а затем в противоположном направлении

вокруг оси подвеса, перпендикулярной оси действия момента сил трения. В рассматриваемом случае гироскоп будет вращаться вокруг наружной оси. В результате несимметричного по времени действия момента сил сухого трения в противоположных направлениях гироскоп за время одного периода нутационных колебаний повернется вокруг оси подвеса на угол

$$\psi_T = -\frac{M_{0\text{т}B}}{J\Omega\cos\vartheta_0}(0{,}5T - 2\Delta) +$$

$$+\frac{M_{0\text{т}B}}{J\Omega\cos\vartheta_0}(0{,}5T + 2\Delta) = \frac{4M_{0\text{т}B}\Delta}{J\Omega\cos\vartheta_0}.$$

Как видим, суммарный угол поворота отличен от нуля. Следовательно, за время T одного периода нутационных колебаний главная ось гироскопа отклонилась от своего первоначального направления на угол ψ_T. Относя величину угла ψ_T ко времени T, можно определить среднюю угловую скорость, с которой гироскоп отклоняется, или, как говорят, совершает дрейф, от заданного ему в пространстве направления:

$$\dot{\psi}_T = \frac{\psi_T}{T} = \frac{M_{0\text{т}B}}{J\Omega\cos\vartheta_0}\cdot\frac{4\Delta}{T}.$$

Проанализировав график (рис. 70), нетрудно заметить, что с уменьшением амплитуды D нутационных колебаний время Δ, характеризующее несимметричность действия сил трения, будет увеличиваться, так как $\Delta_3 > \Delta_2 > \Delta_1 > \Delta$, и тем самым будет увеличиваться и угловая скорость $\dot{\psi}_T$ дрейфа. В предельном случае, когда время 4Δ станет равным периоду T, угловая скорость дрейфа, порождаемая силами сухого трения, достигнет своего максимального значения

$$\dot{\psi}_{T\max} = \frac{M_{0\text{т}B}}{J\Omega\cos\vartheta_0}.$$

Это произойдет в тот момент, когда амплитуда D угловой скорости нутационных колебаний снизится до величины угловой скорости основания прибора. После этого моменты сил сухого трения перестанут изменять свой знак и направление их воздействия на гироскоп будет зависеть лишь от направления вращения его основания, в связи с чем уравнения (236) движения гироскопа примут вид

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega(\dot{\psi} + \omega_\text{н})\cos\vartheta_0 &= M_{0\text{т}B}\operatorname{sign}\omega_B; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega(\dot{\vartheta} + \omega_B)\cos\vartheta_0 &= M_{0\text{т}C}\operatorname{sign}\omega_\text{н}. \end{aligned}\right\} \qquad (247)$$

Если угловые скорости вращения основания не будут изменять своего направления, то действие на гироскоп моментов сил сухого трения будет подобно влиянию постоянных моментов внешних сил

(§ 15). Действительно, в этом случае моменты сил сухого трения не будут изменять знака (см. рис. 68, *б*), в связи с чем система (247) примет вид

$$J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\psi}\cos\vartheta_0 = -J\Omega\omega_н\cos\vartheta_0 + M_{0тB};$$

$$J_C\ddot{\psi} - J\Omega\dot{\vartheta}\cos\vartheta_0 = J\Omega\omega_B\cos\vartheta_0 + M_{0тC}.$$

Полученная система имеет частные решения:

$$\vartheta_r = -\left(\omega_B + \frac{M_{0тC}}{J\Omega\cos\vartheta_0}\right)t;$$

$$\psi_r = -\left(\omega_н - \frac{M_{0тB}}{J\Omega\cos\vartheta_0}\right)t.$$

Решение соответствующей однородной системы (50) определяется из выражений (57). Таким образом, общее решение рассматриваемой системы уравнений будет определяться равенствами

$$\vartheta = C_1\cos nt + C_2\sin nt + C_3 - \left(\omega_B + \frac{M_{0тC}}{J\Omega\cos\vartheta_0}\right)t;$$

$$\psi = \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\,(C_1\sin nt - C_2\cos nt) + C_4 - \left(\omega_н - \frac{M_{0тB}}{J\Omega\cos\vartheta_0}\right)t,$$

из которых следует, что гироскоп в подвижной системе координат движется в данном случае с постоянными угловыми скоростями

$$\left.\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= -\omega_B - \frac{M_{0тC}}{J\Omega\cos\vartheta_0};\\ \dot{\psi} &= -\omega_н + \frac{M_{0тB}}{J\Omega\cos\vartheta_0},\end{aligned}\right\} \qquad (248)$$

вызванными вращением в пространстве основания прибора и возникающими при этом в опорах подвеса силами сухого трения.

Такое систематическое прецессионное движение гироскопа сопровождается его незатухающими нутационными колебаниями. На возможность незатухающих нутационных колебаний гироскопа при наличии сил трения в опорах его подвеса впервые было указано Е. Л. Николаи [24].

Таким образом, в отличие от сил вязкого трения (см. рис. 67) действие на гироскоп сил сухого трения обусловливает затухание его нутационных колебаний лишь только до некоторого предела, порождая одновременно дрейф с постепенно увеличивающейся до своего максимума угловой скоростью. С того мгновения, когда скорость дрейфа достигнет своего максимума и прекратится затухание нутационных колебаний, движение гироскопа будет продолжаться с постоянной угловой скоростью, как это видно по пере-

мещению его полюса на картинной плоскости (рис. 71), записанному экспериментально.

Пример 19. Определить угловые скорости систематического дрейфа гироскопа относительно подвижной системы координат и уменьшение амплитуды его нутационных колебаний за первую половину их периода. Параметры гироскопа $J\Omega = 3500$ *Гсмсек*, $J_B = J_C = J_п = 1{,}5$ *Гсмсек*^{2}, $M_{0тB} = 1{,}0$ *Гсм*, $M_{0тC} = 1{,}6$ *Гсм*. Угол, составляемый главной осью гироскопа с перпендикуляром к плоскости его наружного кольца, $\vartheta_0 = 0$. Угловые скорости вращения основания $\omega_B = \omega_н = 1{,}0 \cdot 10^{-4}$ сек.$^{-1}$. В начальный момент времени амплитуда нутационных колебаний $\vartheta_m = 0{,}7$ угл. мин.

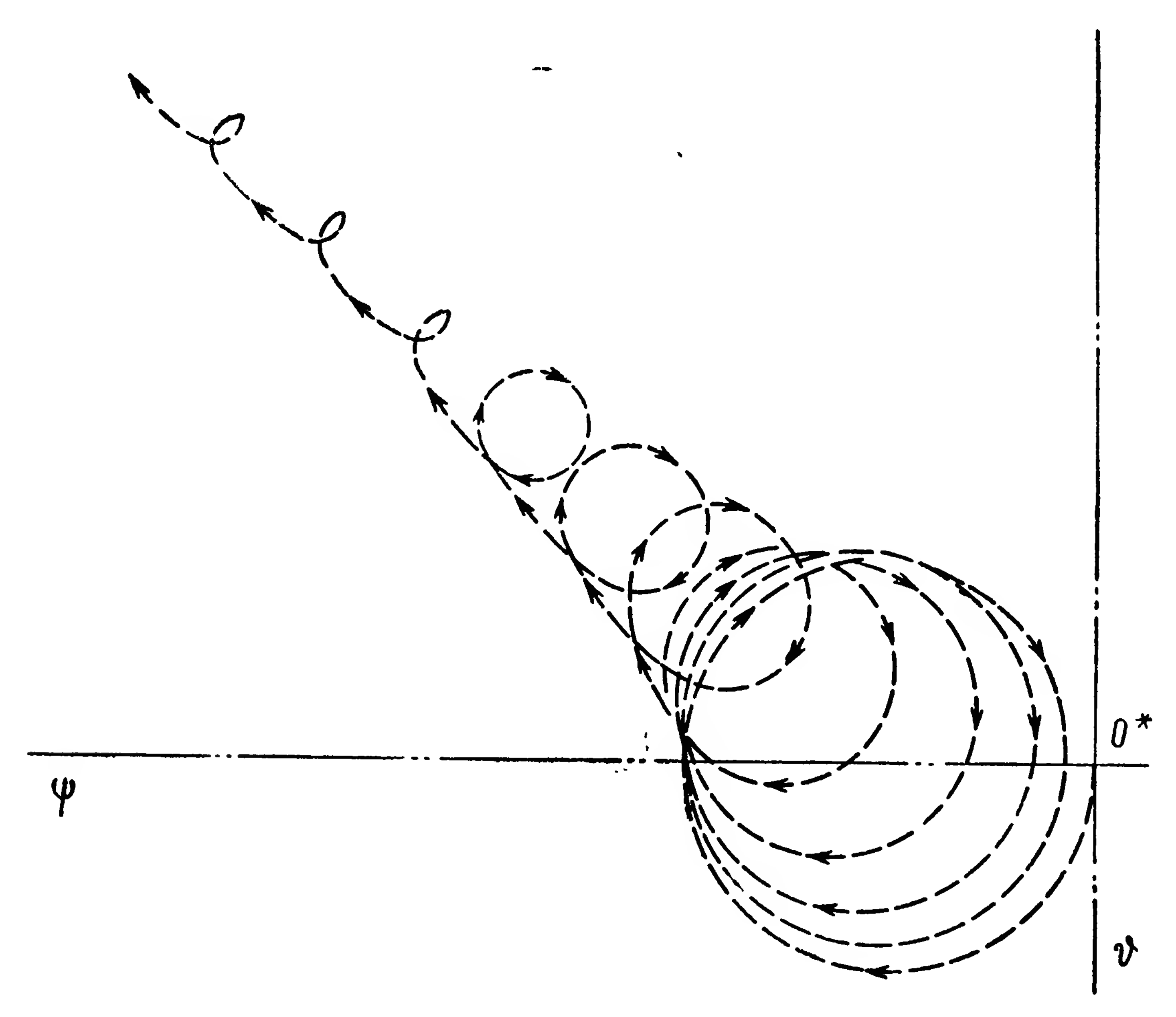


Рис. 71. Траектория движения полюса гироскопа при наличии в опорах подвеса сил сухого трения.

Выразим значение начальной амплитуды в радианах:

$$\vartheta_m = 0{,}7 \frac{1}{60 \cdot 57{,}3} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ рад.}$$

Вычислим в угловых величинах расстояние точки B^* от центра C (рис. 69), вокруг которого перемещается полюс гироскопа в процессе нутационных колебаний. К моменту времени $\frac{T}{2}$ удаление точки B^* от центра C будет определяться проекциями B^*C_ϑ и B^*C_ψ на оси $O^*\vartheta$ и $O^*\psi$ искомого расстояния B^*C. Из формул (246) находим

$$B^*C_\vartheta = \frac{3{,}14 J_п M_{0тC}}{(J\Omega \cos \vartheta_0)^2} = \frac{3{,}14 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}6}{3500^2} = 6{,}1 \cdot 10^{-7} \text{ рад.};$$

$$B^*C_\psi = \vartheta_m - \frac{J_п (2M_{0тC} + 3M_{0тB})}{(J\Omega \cos\vartheta_0)^2} = 2\cdot 10^{-4} -$$

$$- \frac{1{,}5\,(2\cdot 1{,}6 + 3\cdot 1{,}0)}{3500^2} = 1{,}992\cdot 10^{-4} \text{ рад.}$$

Величина амплитуды нутационных колебаний в момент времени $\frac{T}{2}$

$$\vartheta_m\left(\frac{T}{2}\right) = \sqrt{(B^*C_\vartheta)^2 + (B^*C_\psi)^2} = \sqrt{(6{,}1\cdot 10^{-7})^2 + (1{,}992\cdot 10^{-4})^2} =$$

$$= 1{,}992\cdot 10^{-4} \text{ рад.}$$

Таким образом, за первую половину периода амплитуда колебаний уменьшится пропорционально коэффициенту

$$\frac{\vartheta_m\left(\frac{T}{2}\right)}{\vartheta_m} = \frac{1{,}992\cdot 10^{-4}}{2\cdot 10^{-4}} = 0{,}996,$$

т. е. на 0,4%.

Угловые скорости дрейфа гироскопа определяются по выражениям (248):

$$\dot\vartheta = -\omega_B - \frac{M_{0тC}}{J\Omega\cos\vartheta_0} = -1{,}0\cdot 10^{-4} - \frac{1{,}6}{3500} = -5{,}6\cdot 10^{-4} \text{ сек.}^{-1};$$

$$\dot\psi = -\omega_н + \frac{M_{0тB}}{J\Omega\cos\vartheta_0} = -1{,}0\cdot 10^{-4} + \frac{1{,}0}{3500} = 1{,}9\cdot 10^{-4} \text{ сек.}^{-1},$$

или соответственно

$$\dot\vartheta = -5{,}6\cdot 10^{-4}\cdot 57{,}3\cdot 60 = -1{,}93 \text{ град./мин.};$$

$$\dot\psi = 1{,}9\cdot 10^{-4}\cdot 57{,}3\cdot 60 = 0{,}65 \text{ град./мин.}$$

§ 37. ВЛИЯНИЕ МОМЕНТОВ СИЛ СУХОГО ТРЕНИЯ В ОПОРАХ ПОДВЕСА НА ХАРАКТЕР ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ЕГО ОСНОВАНИЯ

Часто корпус гироскопического прибора, установленного на подвижном объекте, вынужден совершать вместе с ним непрерывные колебания, порождаемые различными возмущающими воздействиями. Предположим, что в результате таких возмущений объект, а вместе с ним и корпус прибора совершают относительно осей подвеса OB и OC и перпендикулярной им оси OD (рис. 72) гармонические колебания с угловыми скоростями

$$\omega_B = \omega_{0B}\sin qt; \quad \omega_C = \omega_{0C}\cos qt; \quad \omega_D = \omega_{0D}\sin qt.$$

Подставляя значения скоростей в систему уравнений (236) и учитывая зависимость (201), можем записать

$$J_B\ddot\vartheta + J\Omega\left(\dot\psi + \omega_{0C}\cos qt + \omega_{0D}\operatorname{tg}\vartheta_0\sin qt\right)\cos\vartheta_0 =$$
$$= -M_{0тB}\operatorname{sign}(D\cos nt - \omega_{0B}\sin qt);$$

$$J_C\ddot\psi - J\Omega\left(\dot\vartheta + \omega_{0B}\sin qt\right)\cos\vartheta_0 =$$
$$= -M_{0тC}\operatorname{sign}(D\sin nt - \omega_{0C}\cos qt - \omega_{0D}\operatorname{tg}\vartheta_0\sin qt).$$

Обозначим в приведенной системе

$$\omega_{0C} = \omega_{0н} \sin \varphi; \qquad \omega_{0D} \operatorname{tg} \vartheta_0 = \omega_{0н} \cos \varphi,$$

в результате получим

$$\left.\begin{aligned} &J_B \ddot{\vartheta} + J\Omega \left[\dot{\psi} + \omega_{0н} \sin (qt + \varphi)\right] \cos \vartheta_0 = \\ &\quad = - M_{0тB} \operatorname{sign} (D \cos nt - \omega_{0B} \sin qt); \\ &J_C \ddot{\psi} - J\Omega (\dot{\vartheta} + \omega_{0B} \sin qt) \cos \vartheta_0 = \\ &\quad = - M_{0тC} \operatorname{sign} [D \sin nt - \omega_{0н} \sin (qt + \varphi)]. \end{aligned}\right\} \qquad (249)$$

Амплитуда D угловых скоростей нутационных колебаний при наличии в опорах подвеса сил сухого трения весьма быстро сни-

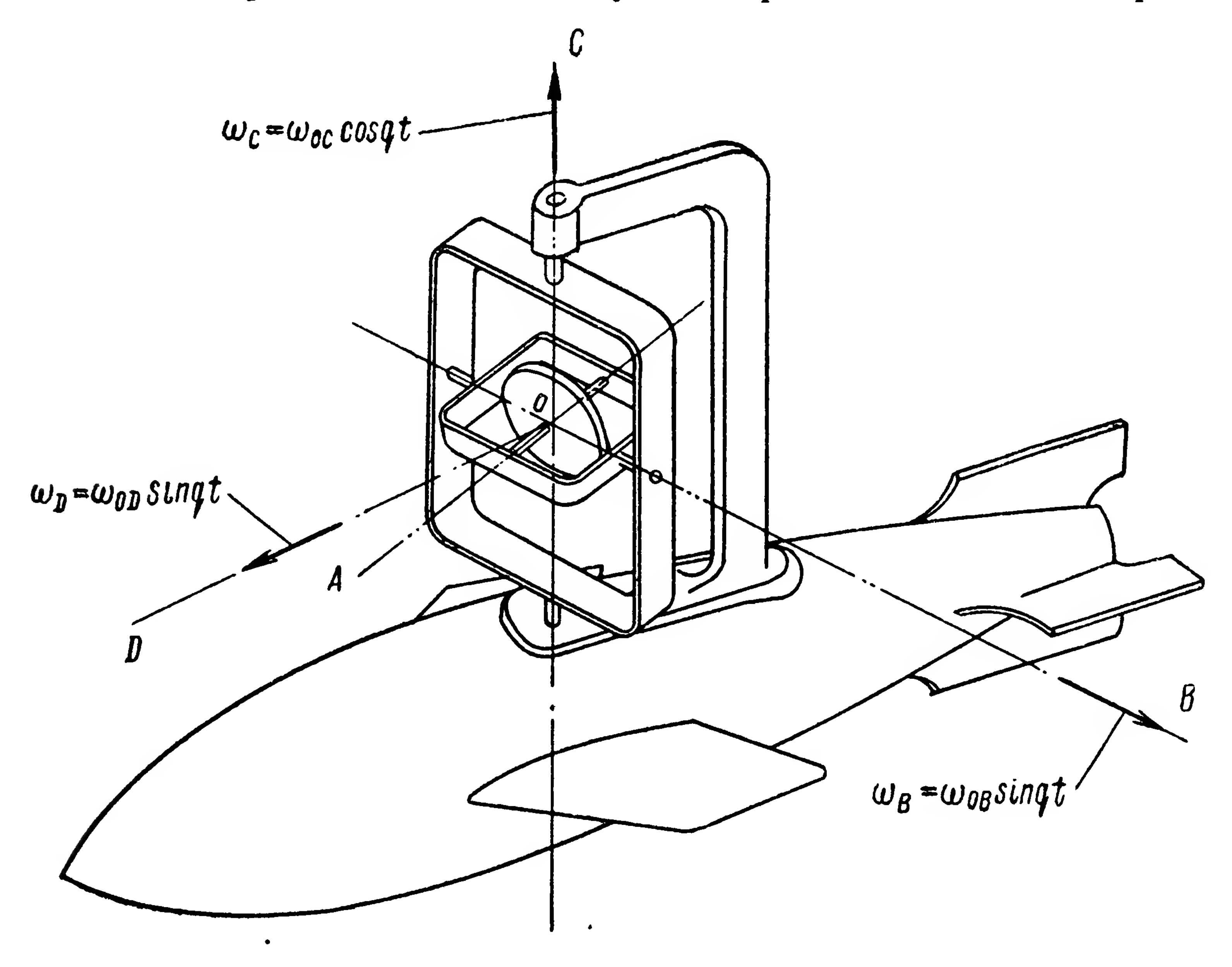


Рис. 72. Гироскоп на подвижном объекте.

жается до величины угловой скорости основания прибора, после чего нутационные колебания уже не влияют на изменения знака моментов сил трения (рис. 68, *б*). Поэтому для случая, когда $D \begin{smallmatrix} \leqslant \omega_{0B} \\ \leqslant \omega_{0н} \end{smallmatrix}$, систему (249), в которой опускаем из рассмотрения начальную фазу φ и инерционные члены, представим двумя уравнениями:

$$J\Omega (\dot{\psi} + \omega_{0н} \sin qt) \cos \vartheta_0 = M_{0тB} \operatorname{sign} (\omega_{0B} \sin qt);$$

$$J\Omega (\dot{\vartheta} + \omega_{0B} \sin qt) \cos \vartheta_0 = - M_{0тC} \operatorname{sign} (\omega_{0н} \sin qt),$$

описывающими прецессионное движение гироскопа относительно осей подвижной системы координат, связанной с объектом.

Изменение угловой скорости $\omega_{0B} \sin qt$ или $\omega_{0н} \sin qt$ обусловливает изменение момента сил сухого трения (рис. 73). Нетрудно видеть, что изменение его знака будет зависеть не от амплитуды ω_{0B} или $\omega_{0н}$ колебаний угловых скоростей, а от частоты q их изменения. Поэтому полученные выше уравнения движения гироскопа могут быть переписаны в виде

$$J\Omega(\dot{\psi} + \omega_{0н} \sin qt) \cos \vartheta_0 = $$
$$= M_{0тB} \operatorname{sign}(\sin qt);$$
$$J\Omega(\dot{\vartheta} + \omega_{0B} \sin qt) \cos \vartheta_0 =$$
$$= -M_{0тC} \operatorname{sign}(\sin qt). \tag{250}$$

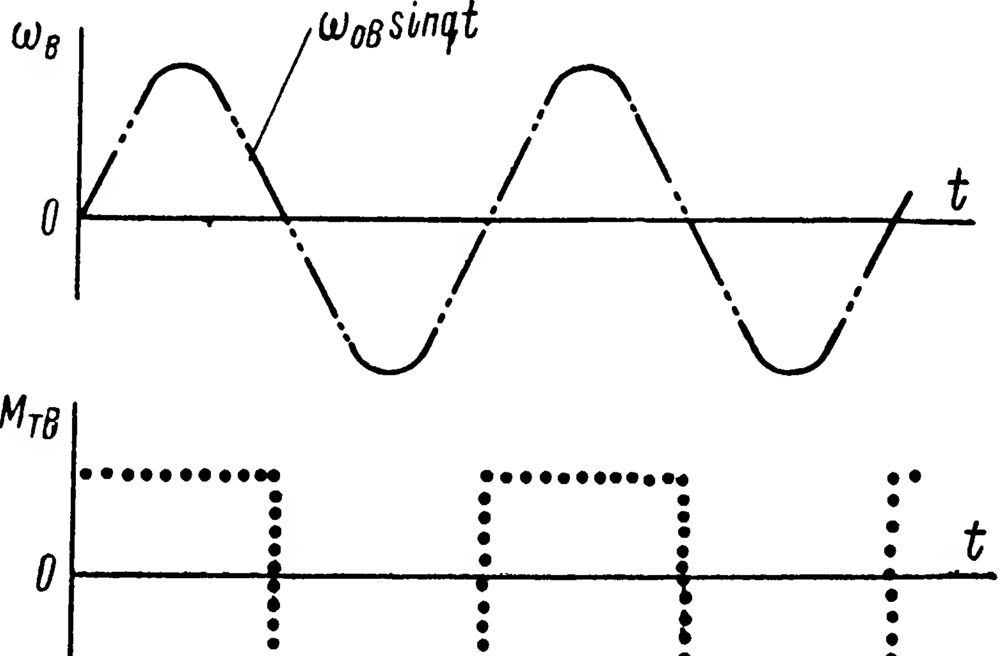


Рис. 73. Графики изменения моментов сил сухого трения при гармонических колебаниях корпуса гироскопа.

Действуя относительно осей подвеса гироскопа, моменты сил трения меняются периодически, причем значения функций $M_{тB}(t)$ и $M_{тC}(t)$ могут быть вычислены по интервалам для каждого полупериода $\frac{T}{2}$ в отдельности. Так, в промежутке $0 < t < \frac{T}{2}$ функция $M_{тB}(t) = +M_{0тB}$. Для следующего полупериода, когда $\frac{T}{2} < t < T$, $M_{тB}(t) = -M_{0тB}$. Таким образом, в общем виде $M_т(t) = M_{0т}$ при $0 < t < \frac{T}{2}$, $M_т(t) = -M_{0т}$ при $\frac{T}{2} < t < T$, и т. д. Для определения влияния моментов сил трения на поведение гироскопа разложим функцию $M_т(t)$ в ряд Фурье [1]

$$M_т(t) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx + b_k \cos kx), \tag{251}$$

где $x = qt$.

Коэффициенты ряда Фурье определяются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx;$$

[1] См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Т. II, изд. 11-е, Гостехиздат, 1952, стр. 394.

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx.$$

Из приведенных зависимостей находим:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} M_{0т}\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} M_{0т}\,dx\right] = 0;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} M_{0т}\sin kx\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} M_{0т}\sin kx\,dx\right] =$$

$$= \frac{M_{0т}}{k\pi}\left[-\cos kx\Big|_0^{\pi} - \left(-\cos kx\Big|_{\pi}^{2\pi}\right)\right] = \begin{cases} \dfrac{4M_{0т}}{k\pi} & \text{при } k \text{ нечетном,} \\ 0 & \text{при } k \text{ четном;} \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} M_{0т}\cos kx\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} M_{0т}\cos kx\,dx\right] =$$

$$= \frac{M_{0т}}{k\pi}\left[\sin kx\Big|_0^{\pi} - \sin kx\Big|_{\pi}^{2\pi}\right] = 0.$$

Таким образом, учитывая, что $x = qt$, для функции $M_т(t)$ ряд Фурье (251) принимает вид

$$M_т(t) = \frac{4M_{0т}}{\pi}\left(\sin qt + \frac{1}{3}\sin 3qt + \frac{1}{5}\sin 5qt + \cdots\right). \quad (252)$$

Подставив значение (252) функции $M_т(t)$ в уравнения (250), будем иметь

$$J\Omega(\dot\psi + \omega_{0н}\sin qt)\cos\vartheta_0 = \frac{4M_{0тB}}{\pi}\times$$

$$\times\left(\sin qt + \frac{1}{3}\sin 3qt + \frac{1}{5}\sin 5qt + \cdots\right);$$

$$J\Omega(\dot\vartheta + \omega_{0B}\sin qt)\cos\vartheta_0 = -\frac{4M_{0тC}}{\pi}\times$$

$$\times\left(\sin qt + \frac{1}{3}\sin 3qt + \frac{1}{5}\sin 5qt + \cdots\right),$$

откуда

$$\dot{\psi} = -\omega_{0н} \sin qt + \frac{4M_{0тB}}{\pi J \Omega \cos \vartheta_0} \times$$

$$\times \left(\sin qt + \frac{1}{3} \sin 3qt + \frac{1}{5} \sin 5qt + \cdots \right);$$

$$\dot{\vartheta} = -\omega_{0B} \sin qt - \frac{4M_{0тC}}{\pi J \Omega \cos \vartheta_0} \times$$

$$\times \left(\sin qt + \frac{1}{3} \sin 3qt + \frac{1}{5} \sin 5qt + \cdots \right).$$

Проинтегрировав полученные равенства, найдем выражения

$$\psi = \frac{\omega_{0н}}{q} \cos qt - \frac{4M_{0тB}}{\pi q J \Omega \cos \vartheta_0} \times$$

$$\times \left(\cos qt + \frac{1}{9} \cos 3qt + \frac{1}{25} \cos 5qt + \cdots \right) + C_1,$$

$$\vartheta = \frac{\omega_{0B}}{q} \cos qt + \frac{4M_{0тC}}{\pi q J \Omega \cos \vartheta_0} \times$$

$$\times \left(\cos qt + \frac{1}{9} \cos 3qt + \frac{1}{25} \cos 5qt + \cdots \right) + C_2,$$

характеризующие изменения во времени углов ϑ и ψ отклонения гироскопа относительно подвижного объекта, совершающего вынужденные гармонические колебания.

При начальных условиях $\vartheta(0) = 0, \psi(0) = 0$ постоянные интегрирования будут равны:

$$C_1 = -\frac{\omega_{0н}}{q} + \frac{4M_{0тB}}{\pi q J \Omega \cos \vartheta_0};$$

$$C_2 = -\frac{\omega_{0B}}{q} - \frac{4M_{0тC}}{\pi q J \Omega \cos \vartheta_0},$$

в соответствии с чем

$$\left.\begin{aligned} \psi &= -\frac{\omega_{0н}}{q}(1 - \cos qt) + \frac{4M_{0тB}}{\pi q J \Omega \cos \vartheta_0} \times \\ &\times \left(1 - \cos qt - \frac{1}{9} \cos 3qt - \frac{1}{25} \cos 5qt - \cdots \right); \\ \vartheta &= -\frac{\omega_{0B}}{q}(1 - \cos qt) - \frac{4M_{0тC}}{\pi q J \Omega \cos \vartheta_0} \times \\ &\times \left(1 - \cos qt - \frac{1}{9} \cos 3qt - \frac{1}{25} \cos 5qt - \cdots \right). \end{aligned}\right\} \quad (253)$$

Из анализа зависимостей (253) видно, что при колебаниях основания прибора силы трения в опорах подвеса вызывают отклонения главной оси гироскопа от заданного направления в пространстве. Рассмотрим подробнее, как изменяется угол ψ.

При отклонении объекта от заданного направления движения (рис. 74) на угол $\frac{\omega_{он}}{q}(1-\cos qt)$ гироскоп повернется вокруг наружной оси подвеса по отношению к объекту на угол $\psi \neq \frac{\omega_{он}}{q}(1-\cos qt)$. Аналогичная картина будет наблюдаться и при поворотах объекта вокруг внутренней оси подвеса гироскопа. Разница между углами соответствующих поворотов объекта и гироскопа определяется вторыми слагаемыми выражений (253):

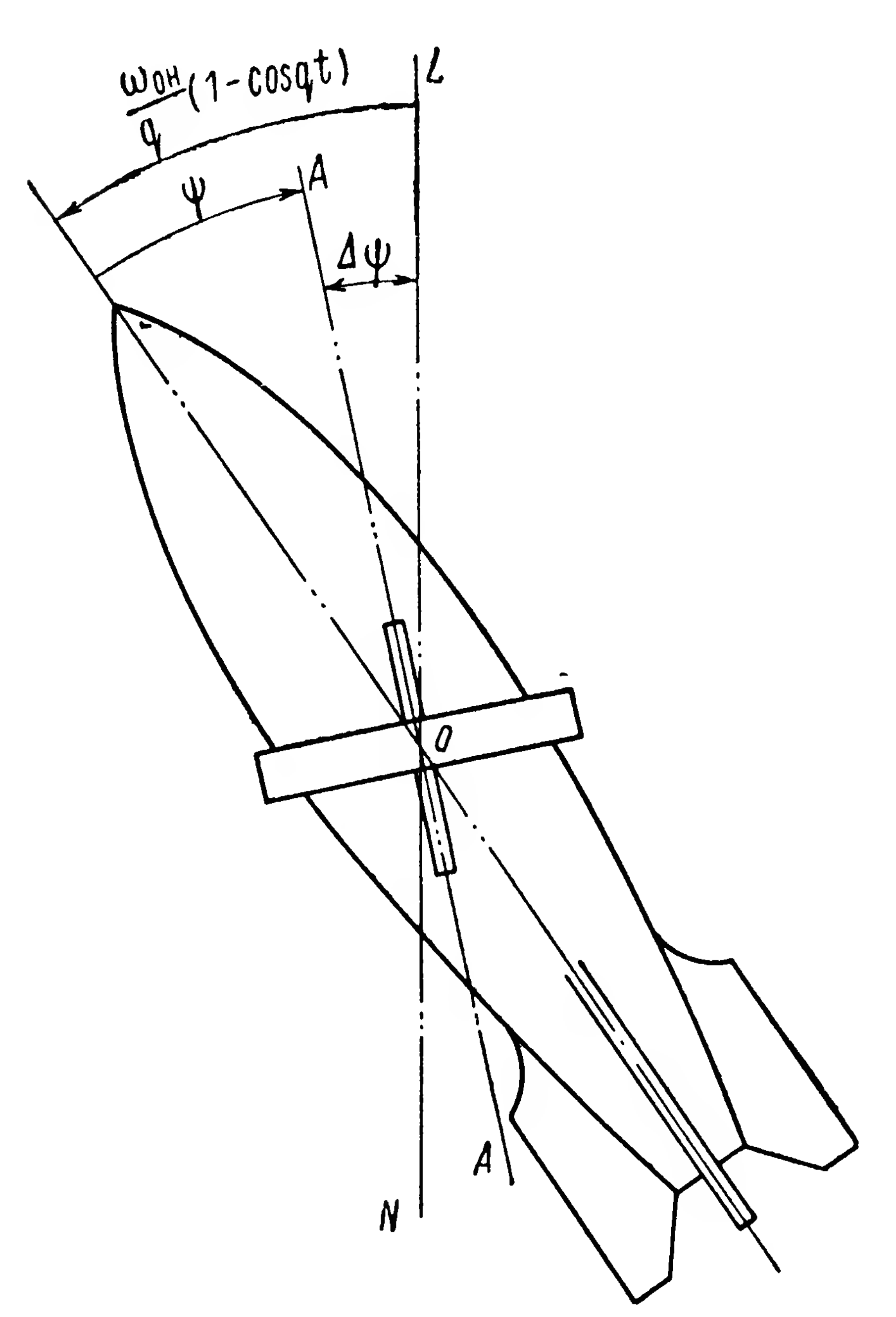


Рис. 74. К определению вынужденных колебаний гироскопа при гармонических колебаниях объекта.

Как видим, силы сухого трения в опорах подвеса при гармонических колебаниях основания прибора вызывают

$$\left.\begin{aligned}\Delta\vartheta &= -\frac{4M_{0\,\text{т}C}}{\pi q J\Omega\cos\vartheta_0}\times\\&\times\left(1-\cos qt-\frac{1}{9}\cos 3qt-\right.\\&\left.-\frac{1}{25}\cos 5qt-\cdots\right);\\\Delta\psi &=\\&=\frac{4M_{0\,\text{т}B}}{\pi q J\Omega\cos\vartheta_0}\left(1-\cos qt-\right.\\&-\frac{1}{9}\cos 3qt-\\&\left.-\frac{1}{25}\cos 5qt-\cdots\right).\end{aligned}\right\}\quad(254)$$

вынужденные колебания гироскопа, которые происходят не только с основной q, но и с кратными ей частотами $3q$, $5q$ колебаний объекта. Амплитуды этих колебаний тем меньше, чем меньше моменты сил сухого трения $M_{0\,\text{т}B}$ и $M_{0\,\text{т}C}$, действующие относительно осей подвеса, и чем больше кинетический момент $J\Omega$ и частота q колебаний корпуса гироскопа. Необходимо иметь в виду, что и при малых амплитудах вынужденных колебаний возникнет систематический дрейф гироскопа. Его угловая скорость, согласно изложенному в § 22, будет определяться выраже-

нием (109), которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$\Delta\dot{\psi}_д = \frac{J_н + J_{вx}}{2(J\Omega \cos\vartheta_0)^3} \operatorname{tg}\vartheta_0 \left[\left(\frac{4M_{0\,тB}}{\pi}\right)^2 + \frac{J_B}{J_C}\left(\frac{4M_{0\,тC}}{\pi}\right)^2\right]. \quad (255)$$

С такой угловой скоростью главная ось OA гироскопа (рис. 74) будет непрерывно отклоняться от заданного в пространстве направления NL.

Пример 20. Определить амплитуды вынужденных колебаний и угловую скорость систематического дрейфа гироскопа, вызываемых силами сухого трения в опорах его подвеса при гармонических колебаниях основания прибора, период T которых равен 1,2 сек. Параметры гироскопа: $J\Omega = 2800$ *Гсмсек*; $J_B = 0{,}7$ *Гсмсек*^{2}; $J_C = 5{,}6$ *Гсмсек*^{2}; $J_{вx} = 0{,}2$ *Гсмсек*^{2}; $J_н = 4{,}8$ *Гсмсек*^{2}. Моменты сил сухого трения относительно осей подвеса гироскопа соответственно равны $M_{0\,тB} = 0{,}8$ *Гсм*; $M_{0\,тC} = 1{,}0$ *Гсм*. В начальный момент времени при $t = 0$ главная ось OA гироскопа составляет с перпендикуляром OD (см. рис. 72) угол $\vartheta_0 = 15°$.

Вычислим круговую частоту q вынужденных колебаний по формуле (15):

$$q = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\cdot 3{,}14}{1{,}2} = 5{,}23 \text{ сек.}^{-1}$$

Из равенств (254) находим амплитуды вынужденных колебаний гироскопа:

$$\Delta\vartheta_a = \frac{4M_{0\,тC}}{\pi q J\Omega \cos\vartheta_0} = \frac{4\cdot 1{,}0}{3{,}14\cdot 5{,}23\cdot 2800 \cos 15°} = 2{,}4\cdot 10^{-4} \text{ рад.};$$

$$\Delta\psi_a = \frac{4M_{0\,тB}}{\pi q J\Omega \cos\vartheta_0} = \frac{4\cdot 0{,}8}{3{,}14\cdot 5{,}23\cdot 2800 \cos 15°} = 1{,}9\cdot 10^{-4} \text{ рад.},$$

или соответственно

$$\Delta\vartheta_a = 2{,}4\cdot 10^{-4}\cdot 57{,}3\cdot 60 = 0{,}83 \text{ угл. мин.};$$

$$\Delta\psi_a = 1{,}9\cdot 10^{-4}\cdot 57{,}3\cdot 60 = 0{,}65 \text{ угл. мин.}$$

Угловую скорость дрейфа определим по формуле (255):

$$\Delta\dot{\psi}_д = \frac{J_н + J_{вx}}{2(J\Omega \cos\vartheta_0)^3} \operatorname{tg}\vartheta_0 \left[\left(\frac{4M_{0\,тB}}{\pi}\right)^2 + \frac{J_B}{J_C}\left(\frac{4M_{0\,тC}}{\pi}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{4{,}8 + 0{,}2}{2(2800 \cos 15°)^3} \operatorname{tg} 15° \left[\left(\frac{4\cdot 0{,}8}{3{,}14}\right)^2 + \frac{0{,}7}{5{,}6}\left(\frac{4\cdot 1{,}0}{3{,}14}\right)^2\right] \approx 0{,}5\cdot 10^{-10} \text{ сек.}^{-1},$$

или

$$\Delta\dot{\psi}_д = 0{,}5\cdot 10^{-10}\cdot 57{,}3\cdot 60\cdot 60 = 1{,}03\cdot 10^{-5} \text{ угл. мин./мин.}$$

§ 38. ВЛИЯНИЕ СИЛ СУХОГО ТРЕНИЯ НА ГИРОСКОП ПРИ СЛУЧАЙНОМ ХАРАКТЕРЕ КОЛЕБАНИЙ ЕГО ОСНОВАНИЯ

В предыдущем параграфе было рассмотрено влияние на движение гироскопа сил сухого трения в опорах подвеса для случая гармонических колебаний основания. Между тем в действительности колебания объектов, с которыми основание гироскопа соединяется обычно жестко, подчинены законам, отличающимся от гармонических. Летательный аппарат, корабль и многие другие под-

вижные объекты вследствие воздействия различных возмущений совершают колебания, имеющие случайный характер (рис. 75).

Также случайны и силы сухого трения в опорах подвеса гироскопа. Находясь в сложной зависимости от статических деформаций соприкасающихся тел, чистоты обработки их поверхностей,

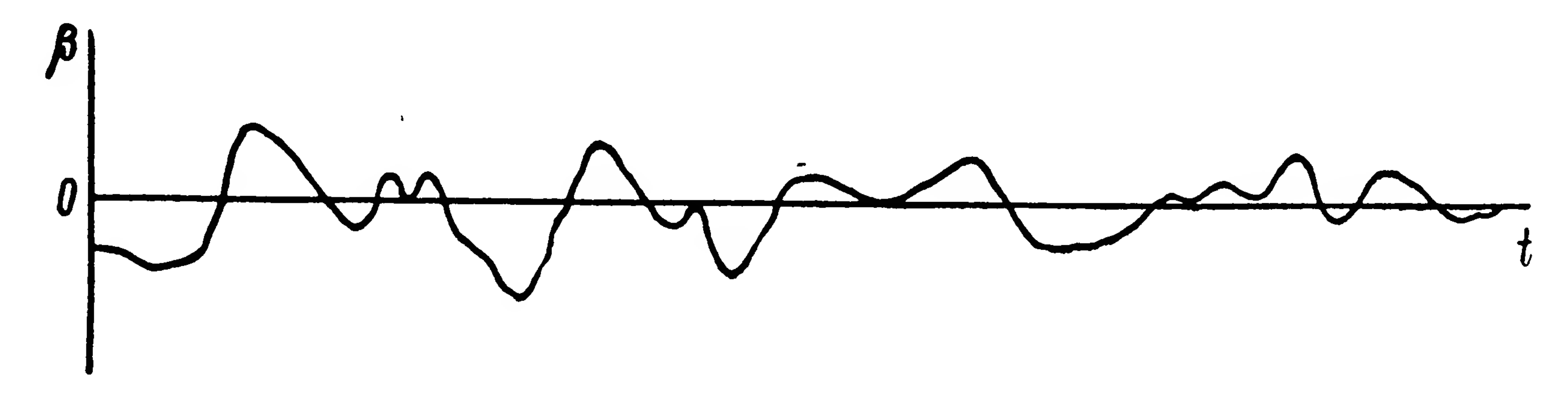


Рис. 75. График изменения угла крена объекта.

радиусов кривизны этих тел и целого ряда других факторов, силы трения порождают моменты, величины которых колеблются в весьма широких пределах даже в одной и той же опоре. На рис. 76 приведена осциллограмма изменения момента $M_т$ сил

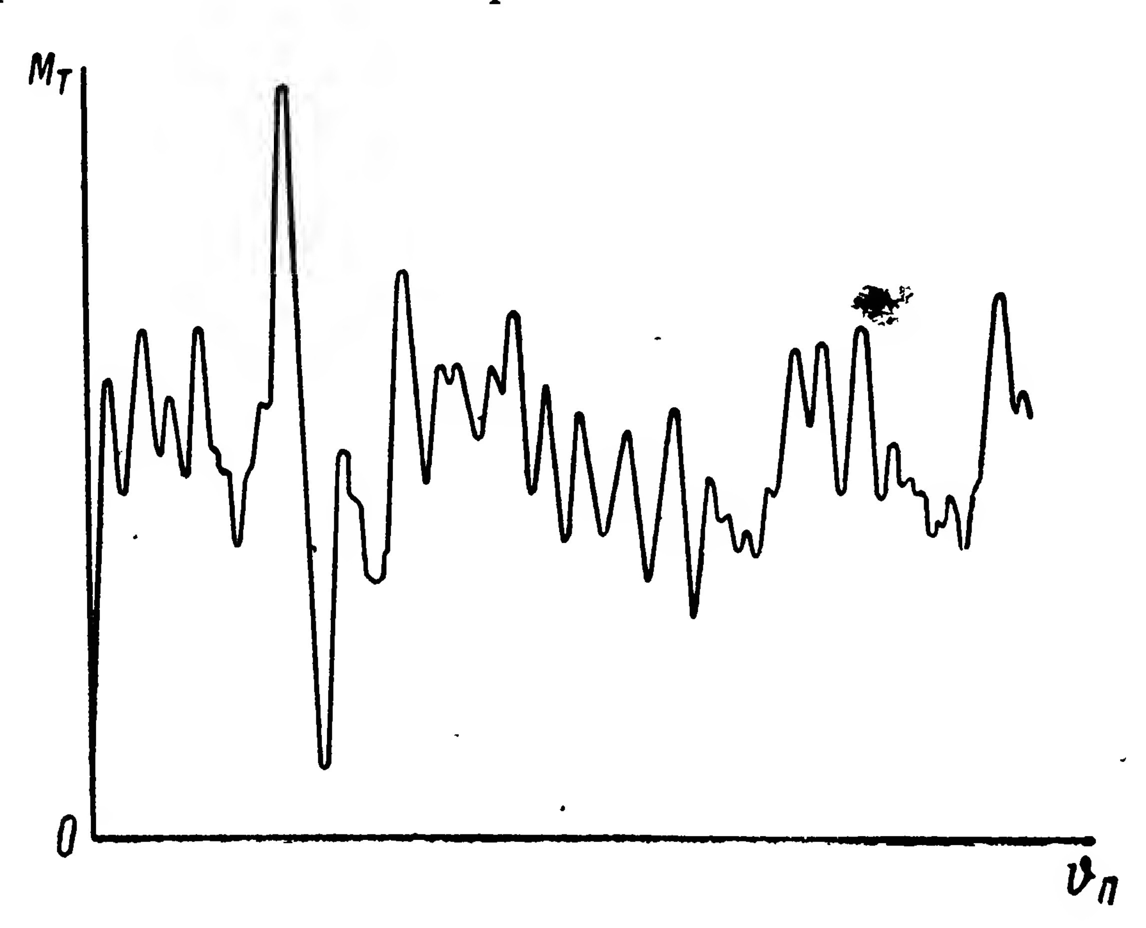


Рис. 76. Осциллограмма изменения момента сил сухого трения в шариковом подшипнике в зависимости от угла поворота его колец.

трения в шариковом подшипнике, находящемся под постоянной нагрузкой в зависимости от угла $\vartheta_п$ взаимного поворота его колец. Случайный характер момента $M_т$ приводит к тому, что даже его среднее значение $M_{0т}$ не остается постоянным по модулю. Согласно экспериментальным данным среднее значение момента сил сухого трения в шариковых подшипниках при изменении направления их движения изменяет не только свой знак, но и величину. Так, при переходе угловой скорости $\dot{\vartheta}_п$ взаимного поворота колец шари-

коподшипника через нуль (рис. 77) средняя величина момента сил сухого трения изменяется от — $M_{0т}$ до + $\nu M_{0т}$, где ν — экспериментально определяемый коэффициент.

В общем случае моменты сил сухого трения относительно осей подвеса гироскопа при колебаниях его основания вместе с объектом будут несимметричны не только по времени, но и по величине. В самом деле, при изменениях угла отклонения объекта от заданного направления (рис. 75) угловая скорость этих отклонений будет характеризоваться кривой $\dot{\beta}(t)$ (рис. 78), являющейся результатом дифференцирования исходной функции $\beta(t)$. После того, как амплитуда нутационных колебаний уменьшится до значения угловой скорости $\dot{\beta}$ объекта, знак момента сил сухого трения будет обусловливаться (см. § 36) лишь направлением угловой скорости $\dot{\beta}$ вращения объекта. Поэтому изменение момента сил сухого трения в рассматриваемом примере будет характеризоваться случайной функцией $M_т(t)$.

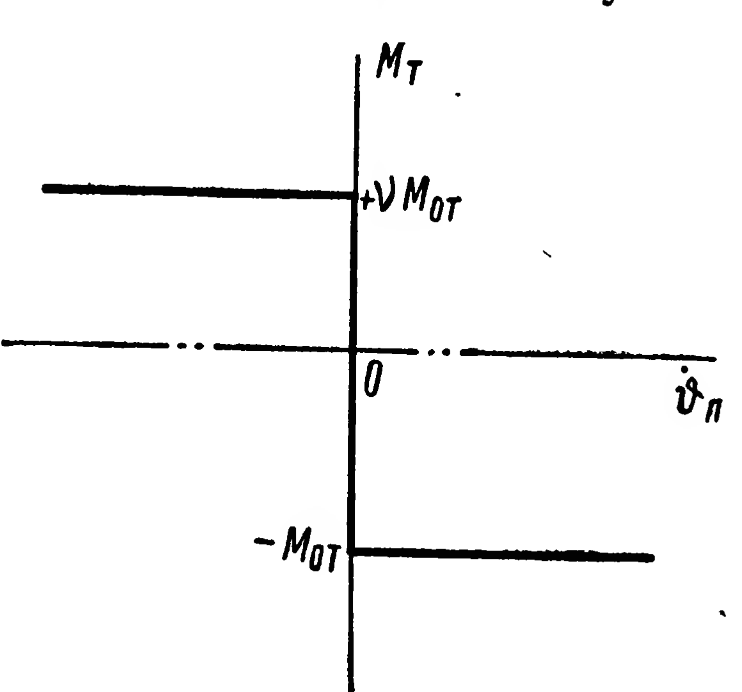


Рис. 77. Графики изменения момента сил трения в шариковых опорах.

Вследствие отсутствия какой-либо периодичности в чередовании взаимно противоположных направлений действия моментов сил сухого трения на гироскоп в данном случае уже не представляется возможным воспользоваться разложением функции $M_т(t)$ в ряд Фурье. Вот почему для определения в рассматриваемых условиях работы отклонений гироскопа от заданного направления в пространстве приходится обращаться к методам теории вероятностей. [1]

Если бы нам были известны промежутки времени $t_1, t_3, t_5, \ldots$ $\ldots, t_{2n-1}$, а также $t_2, t_4, t_6, \ldots, t_{2n}$ (рис. 78), в течение которых моменты сил сухого трения соответственно отрицательны и положительны, то отклонение гироскопа за то или иное время можно было бы вычислить основываясь на законе прецессии. Действительно, полагая для упрощения, что $\dot{\beta}$ является угловой скоростью объекта вокруг внутренней оси OB гироскопа (см. рис. 72), т. е. $\dot{\beta} = \omega_B$, по аналогии с изложенным в § 36 можем записать

$$\psi = -\frac{M_{0\,тB}}{J\Omega\cos\vartheta_0}\sum_{k=1}^{n} t_{2k-1} + \frac{\nu M_{0\,тB}}{J\Omega\cos\vartheta_0}\sum_{k=1}^{n} t_{2k}, \qquad (256)$$

[1] В настоящем параграфе приводятся лишь элементарные сведения о методах исследования уходов гироскопа при случайном характере действующих на него возмущений. Подробнее см. в [36].

где

$$\sum_{k=1}^{n} t_{2k-1} = t_1 + t_3 + t_5 + \cdots + t_{2n-1} = T_{(-B)};$$

$$\sum_{k=1}^{n} t_{2k} = t_2 + t_4 + t_6 + \cdots + t_{2n} = T_{(+B)}.$$

Рис. 78. Графики изменения момента сил сухого трения при случайном характере колебаний корпуса гироскопа.

Подставив принятые обозначения суммарных значений времени $\sum_{k=1}^{n} t_{2k-1}$ и $\sum_{k=1}^{n} t_{2k}$ в выражение (256), будем иметь

$$\psi = -\frac{M_{0\,\text{т}B}}{J\Omega\cos\vartheta_0}T_{(-B)} + \frac{\nu M_{0\,\text{т}B}}{J\Omega\cos\vartheta_0}T_{(+B)}.$$

Так как

$$T_{(-B)} + T_{(+B)} = T,$$

то полученное равенство может быть переписано в следующем виде:

$$\psi = -\frac{M_{0\,\text{т}B}}{J\Omega\cos\vartheta_0}T + \frac{M_{0\,\text{т}B}}{J\Omega\cos\vartheta_0}T_{(+B)}(1+\nu).$$

Относя величину угла ψ ко времени T, в течение которого произошел поворот гироскопа, и вводя обозначение

$$\frac{T_{(+B)}}{T} = \tau_B,$$

найдем выражение для средней угловой скорости

$$\dot{\psi} = -\frac{M_{0\,\tau B}}{J\Omega\cos\vartheta_0}\left[1 - \tau_B(1+\nu)\right], \tag{257}$$

с которой за рассматриваемый промежуток времени T главная ось отклонилась от первоначального направления.

Рассуждая аналогичным образом, можно получить соответствующее выражение и для угловой скорости поворота гироскопа вокруг внутренней оси подвеса OB. Учитывая, согласно формулам (250), знаки моментов сил трения для рассматриваемого случая, будем иметь

$$\dot{\vartheta} = -\frac{M_{0\,\tau C}}{J\Omega\cos\vartheta_0}\left[1 - \tau_C(1+\nu)\right], \tag{258}$$

где τ_C — отношение времени действия момента сил трения в положительном направлении к общему времени T.

Из анализа выражений (257) и (258) видно, что входящие в них коэффициенты τ_B и τ_C для каждого рассматриваемого промежутка времени T могут иметь различные значения и, следовательно, являются случайными величинами. Значения случайных величин τ_B и τ_C не могут быть точно известны заранее, что не позволяет при определении отклонений гироскопа от заданного направления воспользоваться формулами (257) и (258). Однако по экспериментальным записям колебаний объекта (рис. 75) можно вычислить среднее арифметическое наблюденных значений случайной величины:

$$m_{\tau B} = \frac{\sum_{j=1}^{n}\tau_{Bj}}{n}; \quad m_{\tau C} = \frac{\sum_{j=1}^{n}\tau_{Cj}}{n}, \tag{259}$$

где τ_{Bj} и τ_{Cj} — значения случайных величин, наблюденные при j-м опыте;

n — количество опытов.

При достаточно большом количестве экспериментов n среднее арифметическое (259), согласно закону больших чисел, может быть принято приближенно равным математическому ожиданию рассматриваемой случайной величины [1]. Пользуясь данными эксперимента, представляется возможным вычислить средние квадратические отклонения случайных величин τ_B и τ_C от их математических ожиданий:

$$\sigma(\tau_B) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}(\tau_{Bj} - m_{\tau B})^2}{n}};$$

[1] См.: Е. С. Вентцель. Теория вероятностей. ГИФМЛ, 1958, стр. 130.

$$\sigma(\tau_C) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} (\tau_{Cj} - m_{\tau C})^2}{n}}$$

и квадраты этих параметров, или так называемые дисперсии случайных величин:

$$\left.\begin{aligned} D(\tau_B) &= \frac{\sum_{j=1}^{n} (\tau_{Bj} - m_{\tau B})^2}{n}; \\ D(\tau_C) &= \frac{\sum_{j=1}^{n} (\tau_{Cj} - m_{\tau C})^2}{n}. \end{aligned}\right\} \quad (260)$$

При нормальном законе распределения плотности вероятности, который наиболее часто встречается на практике, математическое ожидание и дисперсия дают полную характеристику рассматриваемой случайной величины.

Так как коэффициенты τ_B и τ_C — величины случайные, то естественно, что и зависящие от них угловые скорости $\dot{\psi}$ и $\dot{\vartheta}$, определяемые из выражений (257) и (258), также будут случайными величинами. Их математическое ожидание в соответствии с теоремами о числовых характеристиках случайных величин может быть выражено через математические ожидания случайных величин τ_C и τ_B:

$$\left.\begin{aligned} m_{\dot{\psi}} &= -\frac{M_0\,\tau B}{J\Omega\cos\vartheta_0}[1-(1+\nu)\,m_{\tau B}]; \\ m_{\dot{\vartheta}} &= \frac{M_0\,\tau C}{J\Omega\cos\vartheta_0}[1-(1+\nu)\,m_{\tau C}]. \end{aligned}\right\} \quad (261)$$

По выражениям (261) можно вычислить угловые скорости дрейфа гироскопа при случайном характере колебаний его основания. Вероятность дрейфа с найденными угловыми скоростями может быть определена по дисперсиям $D(\dot{\psi})$ и $D(\dot{\vartheta})$ случайных величин τ_B и τ_C:

$$D(\dot{\psi}) = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{M_0\,\tau B}{J\Omega\cos\vartheta_0}[1-(1+\nu)\,\tau_{Bj}] - \frac{M_0\,\tau B}{J\Omega\cos\vartheta_0}[1-(1+\nu)\,m_{\tau B}]\right\}^2}{n};$$

$$D(\dot{\vartheta}) = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{M_0\,\tau C}{J\Omega\cos\vartheta_0}[1-(1+\nu)\,\tau_{Cj}] - \frac{M_0\,\tau C}{J\Omega\cos\vartheta_0}[1-(1+\nu)\,m_{\tau C}]\right\}^2}{n}.$$

Преобразовав последние выражения с учетом (260), найдем

$$\left.\begin{aligned} D(\psi) &= \left(\frac{M_{0\,\text{т}B}}{J\Omega\cos\vartheta_0}\right)^2 (1+\nu)^2 D(\tau_B);\\ D(\dot\vartheta) &= \left(\frac{M_{0\,\text{т}C}}{J\Omega\cos\vartheta_0}\right)^2 (1+\nu)^2 D(\tau_C). \end{aligned}\right\} \qquad (262)$$

Как известно, [1] нормальный закон распределения (рис. 79) вполне характеризуется математическим ожиданием и дисперсией случайной величины

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(x)}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2D(x)}}.$$

Поэтому представляется возможным определить вероятность попадания случайной величины x в определенный диапазон значений от a до b:

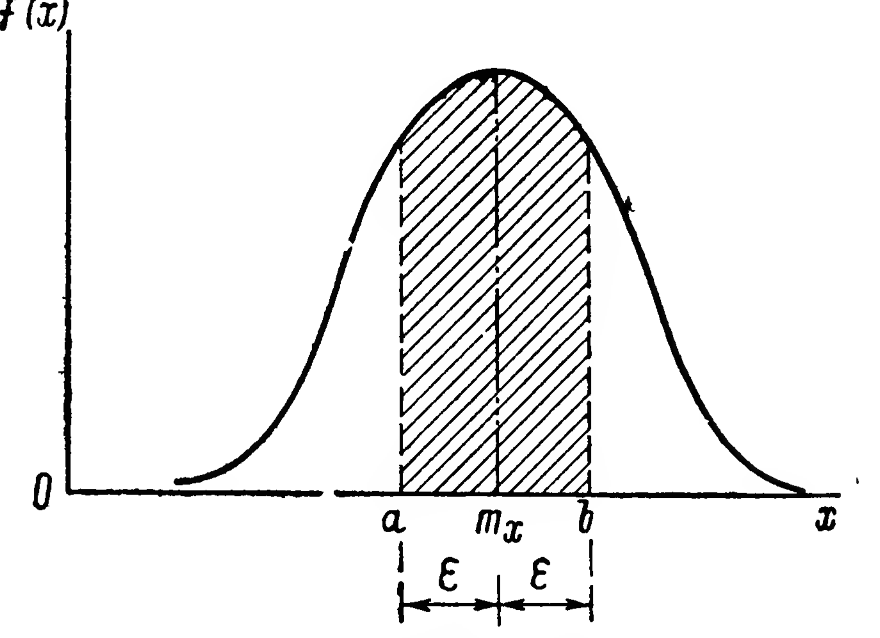


Рис. 79. Нормальный закон распределения.

$$P(a<x<b) = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(x)}}\int_a^b e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2D(x)}}\,dx.$$

Учитывая, что $D(x) = \sigma^2(x)$, и вводя замену переменной

$$\frac{x-m_x}{\sigma(x)\sqrt{2}} = t,$$

перепишем последнее равенство в следующем виде:

$$P(a<x<b) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{a-m_x}{\sigma(x)\sqrt{2}}}^{\frac{b-m_x}{\sigma(x)\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt. \qquad (263)$$

Полученный интеграл не выражается через элементарные функции, для его вычисления пользуются таблицами специальной функции

$$\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-t^2}\,dt, \qquad (264)$$

---

[1] См.: В. С. Пугачев. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. ГИФМЛ, 1960, стр. 51.

называемой интегралом вероятности.

Таблицы этой функции приводятся в курсах по теории вероятностей, а ее график показан на рис. 80.

Искомая вероятность (263) может быть выражена через интеграл вероятности (264) следующим образом:

$$P(a<x<b)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{a-m_x}{\sigma(x)\sqrt{2}}}^{\frac{b-m_x}{\sigma(x)\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{b-m_x}{\sigma(x)\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{a-m_x}{\sigma(x)\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt\right]=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{b-m_x}{\sigma(x)\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{a-m_x}{\sigma(x)\sqrt{2}}\right)\right].$$

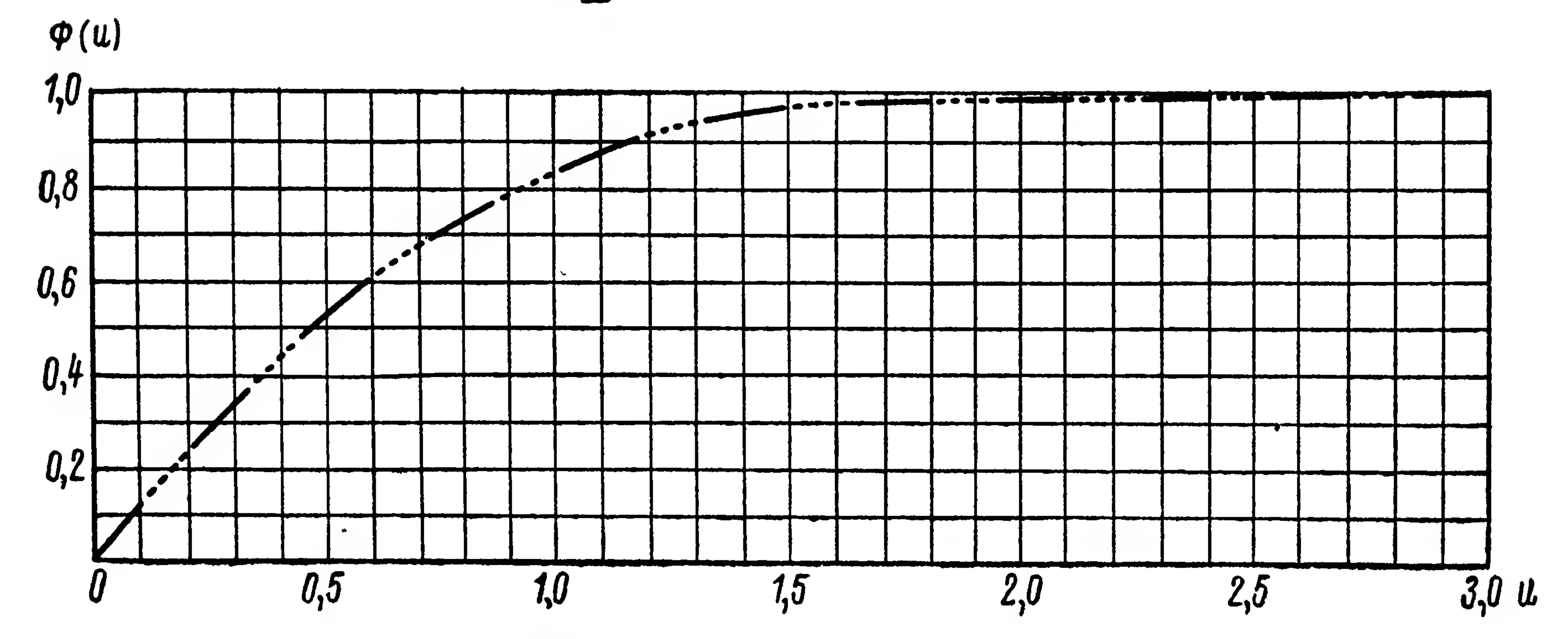


Рис. 80. График функции интеграла вероятности.

В частном случае, когда интервал (a, b) симметричен относительно m_x (рис. 79), т. е. $a=m_x-\varepsilon$, $b=m_x+\varepsilon$, полученная формула принимает вид

$$P\ (m_x-\varepsilon<x<m_x+\varepsilon)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma(x)\sqrt{2}}-\Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma(x)\sqrt{2}}\right)\right].\right.$$

Но так как $\Phi(u)$ нечетная функция, то окончательно будем иметь

$$P(|x-m_x|<\varepsilon)=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma(x)\sqrt{2}}\right). \tag{265}$$

Такова формула для определения вероятности нахождения случайной функции, вычисленной по формулам (261) в определенном диапазоне ее отклонений от математического ожидания.

Пример 21. Определить угловые скорости дрейфа гироскопа, кинетический момент которого $J\Omega = 3000$ *Гсмсек*, вызываемого силами сухого трения в опорах его подвеса при случайных колебаниях объекта. Вычислить также вероятность сохранения гироскопом угловых скоростей дрейфа в пределах их возможного отклонения от математического ожидания, не превышающих $\pm 20\%$. Математические ожидания случайных величин отношения времени действия моментов сил трения в опорах подвеса на гироскоп в одном направлении к общему времени работы прибора $m_{\tau B} = 0{,}52$, $m_{\tau C} = 0{,}54$, а их дисперсии $D(\tau_B) = 2{,}3 \cdot 10^{-5}$, $D(\tau_C) = 2{,}9 \cdot 10^{-5}$. Модули моментов сил трения $M_{0\,\tau B} = 0{,}5$ *Гсм*, $M_{0\,\tau C} = 0{,}8$ *Гсм*. Коэффициент изменения величины момента сил сухого трения при изменении направления движения опоры $\nu = 1{,}06$. В начальный момент угол, составляемый главной осью гироскопа с перпендикуляром к плоскости наружного кольца $\vartheta_0 = 5°$.

По формулам (261) определим математические ожидания угловых скоростей дрейфа гироскопа:

$$m_{\dot\psi} = -\frac{M_{0\,\tau B}}{J\Omega \cos\vartheta_0}\,[1 - (1+\nu)\,m_{\tau B}] =$$

$$= -\frac{0{,}5}{3000 \cos 5^0}\,[1 - (1 + 1{,}06)\,0{,}52] = 1{,}19 \cdot 10^{-5} \text{ сек.}^{-1};$$

$$m_{\dot\vartheta} = \frac{M_{0\,\tau C}}{J\Omega \cos\vartheta_0}\,[1 - (1+\nu)\,m_{\tau C}) =$$

$$= \frac{0{,}8}{3000 \cos 5^0}\,[1 - (1 + 1{,}06)\,0{,}54] = -\,3{,}0 \cdot 10^{-5} \text{ сек.}^{-1}.$$

или соответственно

$$m_{\dot\psi} = 1{,}19 \cdot 10^{-5} \cdot 57{,}3 \cdot 60 \cdot 60 = 2{,}46 \text{ град./час.};$$

$$m_{\dot\vartheta} = -\,3{,}0 \cdot 10^{-5} \cdot 57{,}3 \cdot 60 \cdot 60 = -\,6{,}19 \text{ град./час.}$$

Для определения вероятности сохранения угловых скоростей дрейфа в диапазоне $\pm 20\%$ по отношению к их вычисленным математическим ожиданиям $m_{\dot\psi}$ и $m_{\dot\vartheta}$ из формул (262) найдем дисперсии рассматриваемых случайных величин:

$$D(\dot\psi) = \left(\frac{M_{0\,\tau B}}{J\Omega \cos\vartheta_0}\right)^2 (1+\nu)^2 D(\tau_B) =$$

$$= \left(\frac{0{,}5}{3000 \cos 5^0}\right)^2 (1 + 1{,}06)^2\, 2{,}3 \cdot 10^{-5} = 2{,}72 \cdot 10^{-12};$$

$$D(\dot\vartheta) = \left(\frac{M_{0\,\tau C}}{J\Omega \cos\vartheta_0}\right)^2 (1+\nu)^2 D(\tau_C) =$$

$$= \left(\frac{0{,}8}{3000 \cos 5^0}\right)^2 (1 + 1{,}06)^2\, 2{,}9 \cdot 10^{-5} = 8{,}75 \cdot 10^{-12},$$

и их средние квадратические отклонения:

$$\sigma(\dot\psi) = \sqrt{D(\dot\psi)} = \sqrt{2{,}72 \cdot 10^{-12}} = 1{,}65 \cdot 10^{-6} \text{ сек.}^{-1};$$

$$\sigma(\dot\vartheta) = \sqrt{D(\dot\vartheta)} = \sqrt{8{,}75 \cdot 10^{-12}} = 2{,}96 \cdot 10^{-6} \text{ сек.}^{-1}.$$

Изменения рассматриваемых случайных величин в диапазоне отклонений $\pm 20\%$ от их математических ожиданий будут определяться значениями:

$$\varepsilon_{\dot{\psi}} = 0{,}2 m_{\dot{\psi}} = 0{,}2 \cdot 2{,}46 \cdot 10^{-5} = 4{,}92 \cdot 10^{-6} \text{ сек.}^{-1};$$

$$\varepsilon_{\dot{\vartheta}} = 0{,}2 m_{\dot{\vartheta}} = 0{,}2 \cdot 3{,}0 \cdot 10^{-5} = 6{,}0 \cdot 10^{-6} \text{ сек.}^{-1}.$$

Подставляя вычисленные параметры в правую часть формулы (265), находим значения величин

$$u_{\dot{\psi}} = \frac{\varepsilon_{\dot{\psi}}}{\sigma(\dot{\psi})\sqrt{2}} = \frac{4{,}92 \cdot 10^{-6}}{1{,}65 \cdot 10^{-6}\sqrt{2}} = 2{,}11;$$

$$u_{\dot{\vartheta}} = \frac{\varepsilon_{\dot{\vartheta}}}{\sigma(\dot{\vartheta})\sqrt{2}} = \frac{6{,}0 \cdot 10^{-6}}{2{,}96 \cdot 10^{-6}\sqrt{2}} = 1{,}43.$$

В соответствии с вычисленными величинами $u_{\dot{\psi}}$ и $u_{\dot{\vartheta}}$, пользуясь графиком (рис. 80), находим значения функции $\Phi(u)$, а тем самым и вероятность нахождения рассматриваемых случайных величин в заданных пределах:

$$P_{\dot{\psi}}\left(\left|\dot{\psi} - m_{\dot{\psi}}\right| < \varepsilon_{\dot{\psi}}\right) = 0{,}987;$$

$$P_{\dot{\vartheta}}\left(\left|\dot{\vartheta} - m_{\dot{\vartheta}}\right| < \varepsilon_{\dot{\vartheta}}\right) = 0{,}954.$$

Полученные результаты показывают, что угловые скорости систематического дрейфа гироскопа в заданных условиях колебания объекта не будут отклоняться от своих математических ожиданий более чем на 20% по наружной оси подвеса в 98, а по внутренней в 95 случаях из 100.



Глава VI
АСТАТИЧЕСКИЙ ГИРОСКОП

§ 39. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АСТАТИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ ПОДВИЖНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Астатическим гироскопом, согласно определению Б. В. Булгакова [4], принято называть гироскоп с тремя степенями свободы, центр тяжести которого совмещен с точкой его подвеса. Такие гироскопы (см. рис. 30) с каждым годом находят все большее применение на практике. Их значение особенно возросло в связи с появлением беспилотных летательных аппаратов и освоением космического пространства.

Как известно, [1] для вывода искусственных спутников Земли и космических кораблей на заданную орбиту необходимо, чтобы ракета-носитель с момента старта до момента ее отделения перемещалась строго по заранее заданной траектории. Старт ракеты осуществляется вертикально вверх, в связи с чем начальное значение $\beta_н$ угла наклона вектора $\overline{V}$ линейной скорости ракеты к плоскости горизонта $\xi D \eta$ должно быть равно $\frac{\pi}{2}$ (рис. 81). Достигнув определенной высоты, ракета начинает поворачиваться вокруг своей поперечной оси $O_c y_c$ с тем, чтобы к моменту выключения двигателя вектор $\overline{V}$ ее скорости составил с плоскостью $\xi D \eta$ угол, равный его конечному заданному значению $\beta_к$. Кроме того, на протяжении указанного промежутка времени в процессе полета ракеты на активном участке ее траектории центр тяжести O_c и вектор $\overline{V}$ линейной скорости объекта должны быть совмещены с плоскостью полета $\xi_п D \zeta$, составляющей в момент старта угол $\alpha_н$ с плоскостью меридиана $\xi D \zeta$.

Чтобы осуществить движение ракеты-носителя по заранее заданной так называемой расчетной траектории, объект должен быть оборудован такими приборами, которые неизменно фиксировали бы начальные положения плоскостей $\xi_п D \eta_п$ и $\xi_п D \zeta$. Для этого может быть использован астатический гироскоп, главная ось которого с той или иной степенью точности сохраняет заданное ей направление стабильным в пространстве (см. гл. II).

---

[1] См.: С. Г. Александров и Р. Е. Федоров. Советские спутники и космические корабли. Изд-во АН СССР, 1961.

Устанавливая на объект астатические гироскопы и ориентируя в начальный момент времени их главные оси по соответствующим осям координатной системы $D\xi_п\eta_п\zeta$, получают возможность автоматически контролировать движение ракеты и управлять ее полетом по заранее рассчитанной траектории.

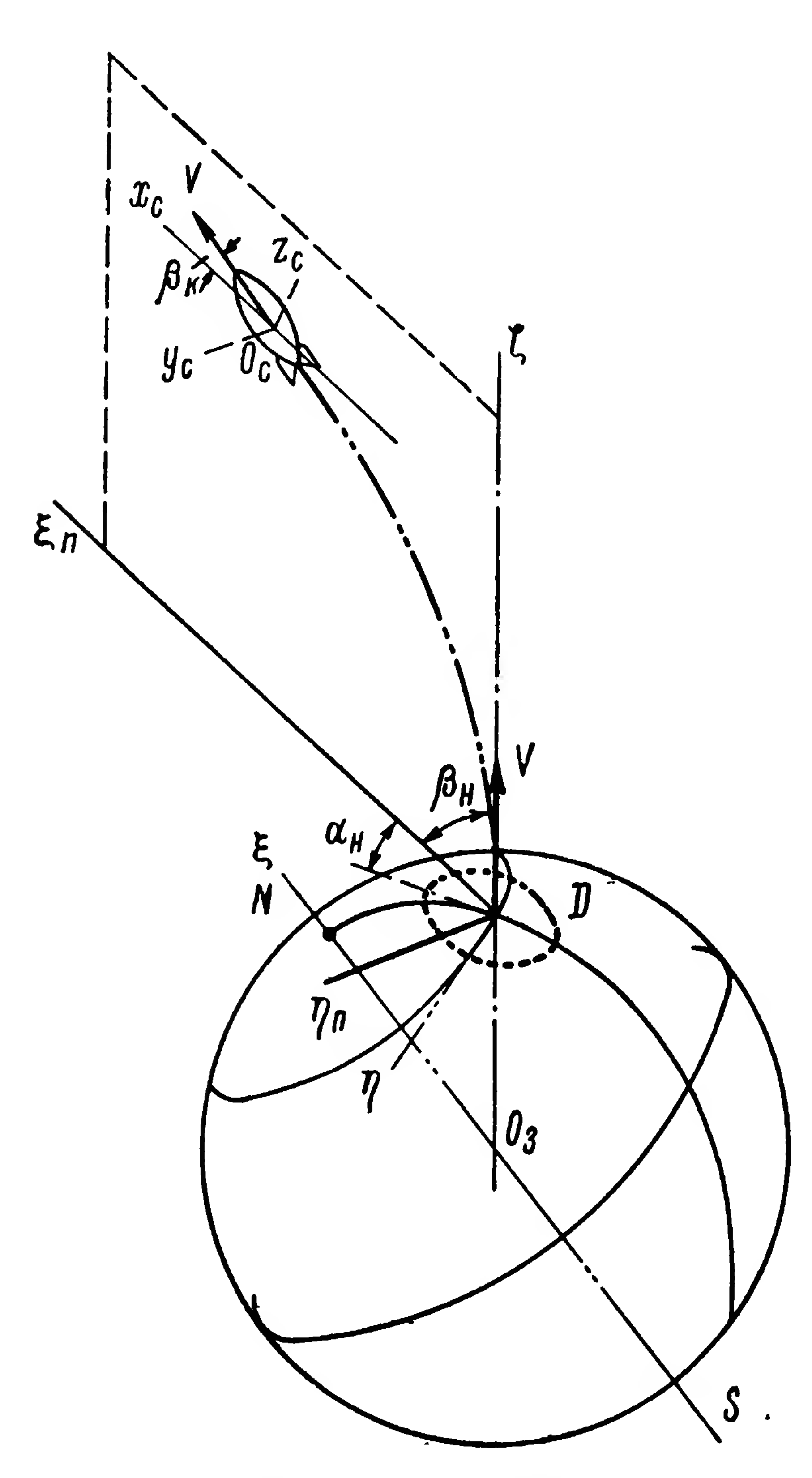


Рис. 81. Траектория ракеты-носителя.

Астатические гироскопы нашли широкое применение и в системах автоматического управления беспилотными летательными аппаратами. Их весьма часто используют в тех случаях, когда возникает необходимость измерения углов поворота объекта вокруг начала системы координат $O_cx_cy_cz_c$, неизменно с ним связанной. Для этого главные оси гироскопов в начальный момент времени ориентируются по соответствующим осям координат $O_cx_cy_cz_c$. При ориентировании главной оси гироскопа по оси O_cx_c можно измерить углы поворота объекта вокруг осей O_cy_c и O_cz_c. При ориентировании главной оси гироскопа по оси O_cy_c прибор будет измерять углы поворота объекта вокруг осей O_cz_c и O_cx_c и т. д.

§ 40. ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ ВЕРТИКАНТ И ГОРИЗОНТ

Характерным примером использования астатического гироскопа для управления объектами может служить система автоматического управления баллистической ракетой V-2, подробно описанная в работах [42, 50]. В этой системе для контроля отклонений ракеты от плоскости полета $\xi_пD\zeta$ (рис. 82) используется астатический гироскоп, главная ось OA которого устанавливается в начальный момент параллельно оси $D\eta_п$ и, следовательно, перпендикулярно плоскости полета $\xi_пD\zeta$. При этом ось OA в течение некоторого времени будет с достаточной точностью сохранять заданное ей в пространстве направление $D\eta_п$.

При отклонении от плоскости полета $\xi_пD\zeta$ в результате поворота вокруг оси O_cz_c ракета будет одновременно поворачиваться и

вокруг наружной оси OC гироскопа, сохраняющего стабильным свое направление в пространстве. В процессе такого поворота жестко укрепленный на наружном кардановом кольце движок потенциометра $П_C$ будет перемещаться по его обмотке, смонтированной на корпусе ракеты. Снимаемый с потенциометра $П_C$ электрический сигнал подается в автоматическое устройство — автопилот, который осуществляет необходимый поворот рулей управления

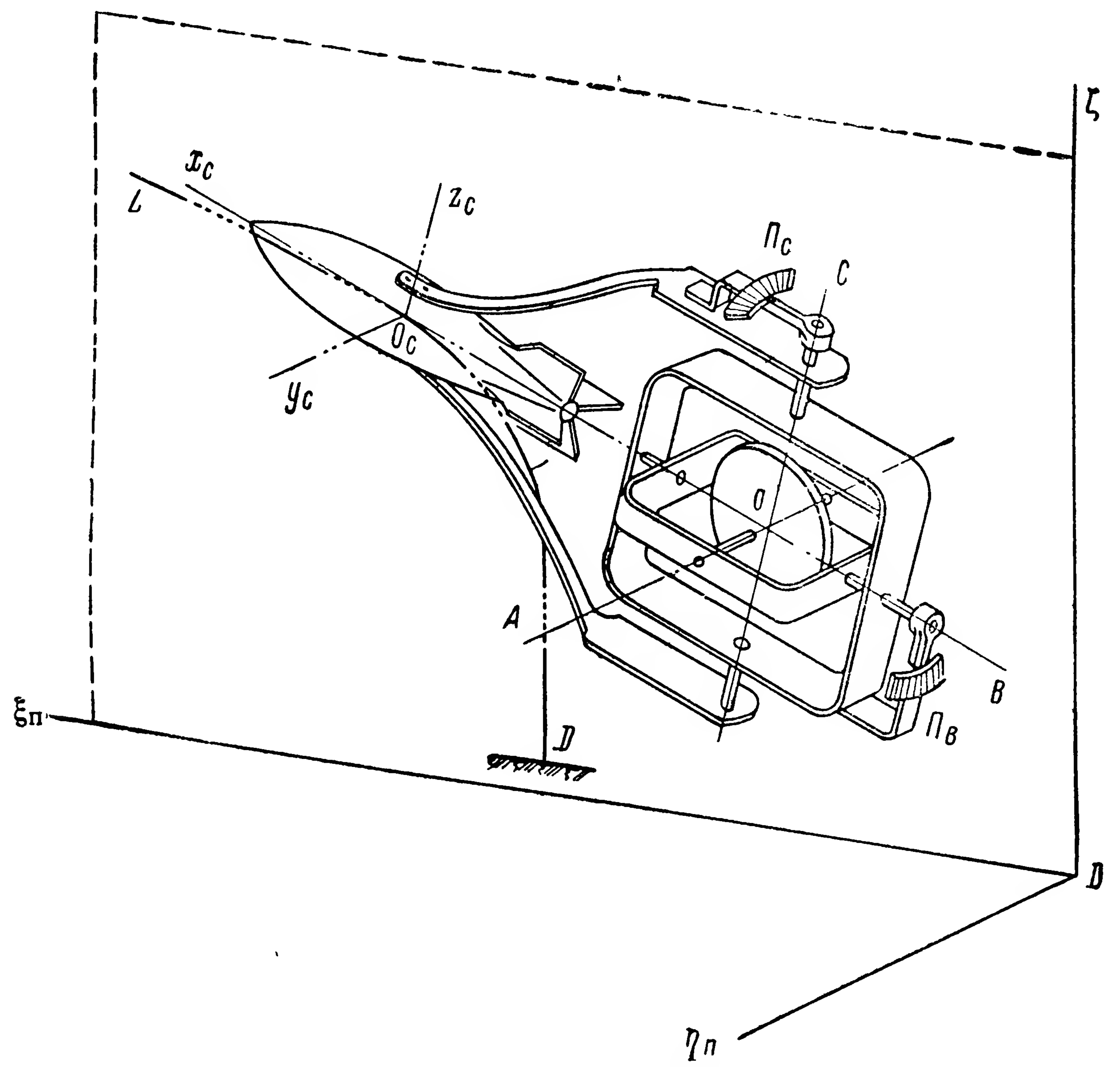


Рис. 82. Принципиальная схема гироскопического прибора вертикант.

для возвращения ракеты к заданной плоскости полета. В случае возникновения крена, что может произойти в результате поворота ракеты вокруг оси O_cx_c, равносильного повороту вокруг внутренней оси OB гироскопа, электрический сигнал будет сниматься с потенциометра $П_B$. Получив этот сигнал, автопилот произведет поворот рулей управления, который устранит возникший крен.

Как видим, описанный гироскопический прибор контролирует положение объекта в вертикальной плоскости полета $\xi_п D\zeta$, поэтому он получил название «вертикант». Так как его главная ось OA установлена перпендикулярно к плоскости полета $\xi_п D\zeta$, то движе-

ние ракеты по криволинейной траектории DO_cL не порождает вынужденных поворотов гироскопической системы. В самом деле, поворачиваясь в плоскости полета $\xi_п D \zeta$ вокруг оси $O_c y_c$, ракета одновременно будет поворачиваться вокруг оси OA. Из изложенного в § 26 следует, что такой поворот основания прибора не вызывает отклонений гироскопа от первоначального его положения в пространстве.

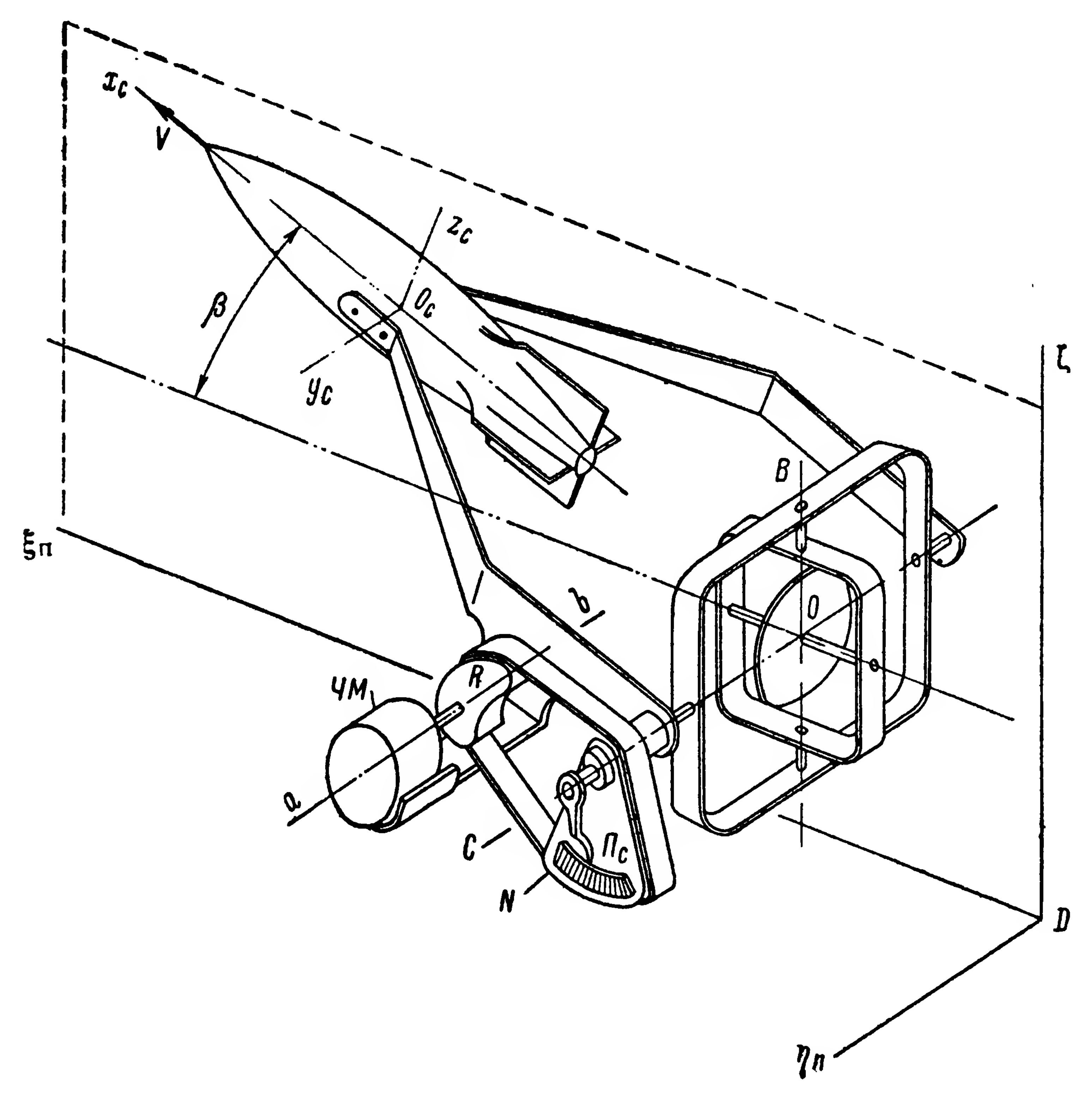


Рис. 83. Принципиальная схема гироскопического прибора горизонт.

Для придания ракете необходимого угла относительно плоскости $\xi_п D \eta_п$ в описываемом устройстве автоматического управления используется второй астатический гироскоп, размещение которого в корпусе ракеты показано на рис. 83. В отличие от вертиканта главная ось OA этого гироскопа, получившего название «горизонт», совмещена с плоскостью полета $\xi_п D \zeta$. Наружная ось OC прибора, несущая на себе движок потенциометра $П_C$, расположена в этом случае параллельно поперечной оси $O_c y_c$ объекта и в первоначальный момент времени ориентируется по оси $D\eta_п$, перпендикулярной к плоскости полета $\xi_п D \zeta$.

При таком расположении гироскоп будет фиксировать повороты ракеты в плоскости полета $\xi_п D \zeta$. Представим себе, что величина угла β, составляемого вектором V скорости объекта с осью $D\xi_п$, изменилась по сравнению с его заданным значением. Это могло произойти лишь в результате отклонения ракеты от заданной траектории движения в плоскости полета $\xi_п D \zeta$, или, иными словами, в результате ее поворота вокруг оси $O_c y_c$. Так как гироскоп сохраняет стабильным свое положение в пространстве, то при указанном отклонении ракеты движок потенциометра $П_C$ переместится по его обмотке, в результате чего будет получен электрический сигнал, пропорциональный углу рассматриваемого отклонения. Получив этот сигнал, автопилот произведет необходимый поворот рулей управления, что устранит возникшее отклонение объекта от заданной траектории.

Для изменения угла β в соответствии с заданной программой полета обмотка потенциометра $П_C$ смонтирована на плате N, которая может поворачиваться относительно корпуса ракеты вокруг оси OC, параллельной оси $O_c y_c$ объекта. Плата N с помощью ленточной передачи связана с профилированным кулачком R, приводимым во вращение вокруг оси ab, также параллельной оси $O_c y_c$, часовым механизмом $ЧМ$.

При повороте платы N, а вместе с ней и обмотки потенциометра $П_C$ его нулевая точка будет смещаться относительно движка, который вместе с гироскопом сохранит неизменным свое положение в пространстве. Таким образом, и в этом случае с потенциометра $П_C$ будет сниматься сигнал, сообщающий об отклонении ракеты от требуемого положения относительно плоскости $\xi_п D \eta_п$. Поступая на автопилот, сигнал будет вызывать поворот рулей управления, что приведет ракету в положение, при котором ее наклон к плоскости $\xi_п D \eta_п$ будет соответствовать требуемому для данного момента времени значению угла β.

Профиль кулачка R выполняется строго в соответствии с заданной траекторией движения. Поэтому плата N будет вращаться с такой переменной угловой скоростью, с какой объект должен изменять во времени значение угла β наклона по отношению к плоскости $\xi_п D \eta_п$. Таким образом, в результате непрерывного вращения платы N вокруг наружной оси OC подвеса гироскопа сигнал, снимаемый с потенциометра $П_C$, оказывается пропорциональным углу отклонения объекта от расчетной траектории его движения в плоскости полета $\xi_п D \zeta$. Автопилот, получающий этот сигнал, воздействует на соответствующие рули управления и устраняет возникшие отклонения объекта от заданной программы движения. Вот почему устройство, обеспечивающее поворот платы N, а в месте с ней и обмотки потенциометра $П_C$ вокруг оси OC гироскопа, получило название программного механизма.

§ 41. АСТАТИЧЕСКИЕ ГИРОСКОПЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ УГЛОВ ОТКЛОНЕНИЯ ОБЪЕКТОВ ОТ ЗАДАННОГО НАПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Весьма часто движение объекта в пространстве задается в каком-либо направлении, которое должно быть выдержано стабильным в течение того или иного промежутка времени. Представим себе, например, что движение объекта задано в пространстве в некотором направлении NL (рис. 84).

Для осуществления намеченного движения необходимо, чтобы отсутствовало вращение объекта вокруг осей координатной системы $O_c x_c y_c z_c$, неизменно с ним связанной. При этом условии про-

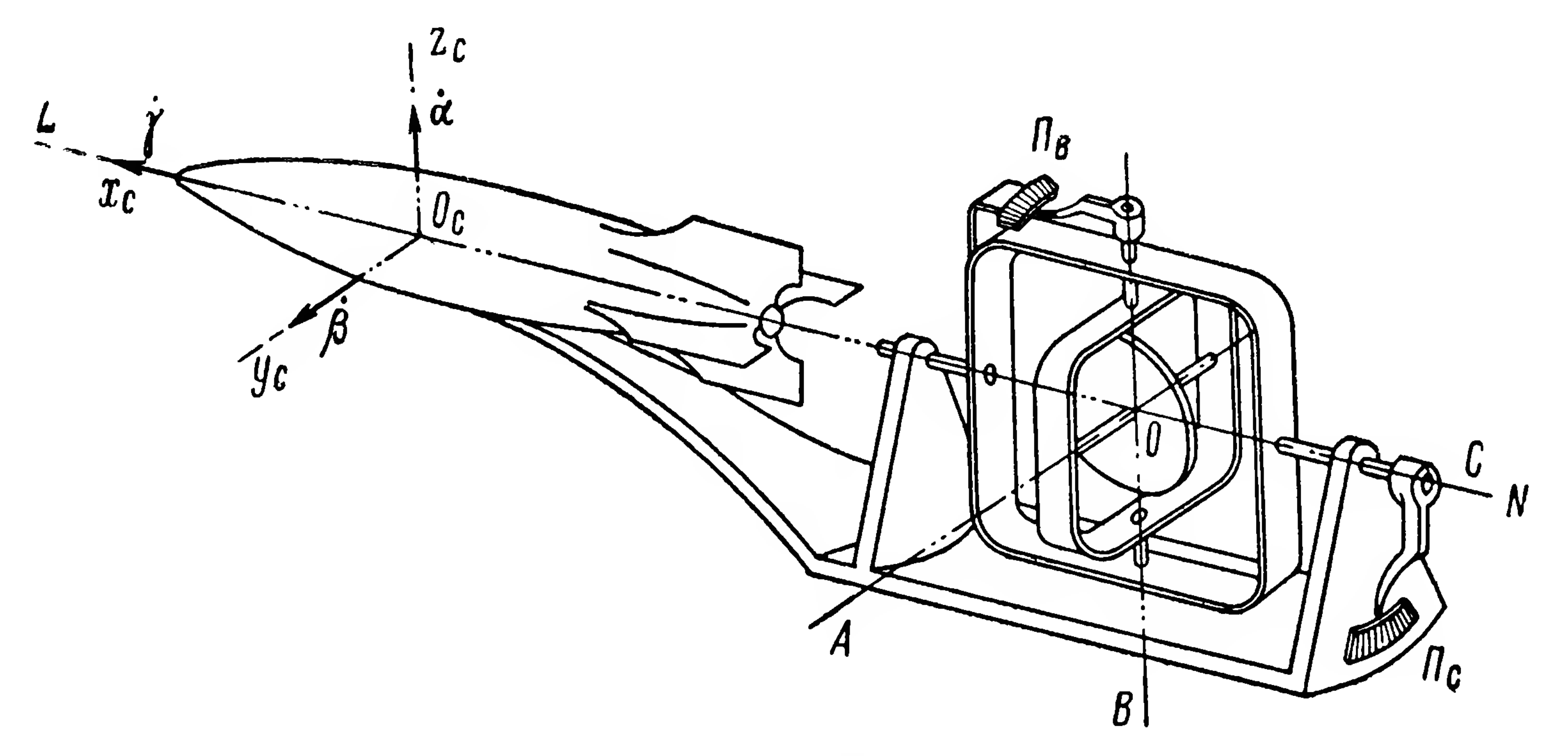


Рис. 84. Гироскопический прибор для измерения углов рыскания и крена.

дольная ось $O_c x_c$ объекта будет неизменно совмещена с линией NL и, следовательно, он будет перемещаться точно в заданном направлении. Между тем, в действительности соблюдение этого условия связано со значительными трудностями. Вследствие непрерывных возмущений, испытываемых объектом в процессе движения, будут неизбежно возникать отклонения от заданного направления. Для измерения угловых отклонений в системах автоматического управления объектами широко используются астатические гироскопы. [1]

С помощью одного гироскопа с тремя степенями свободы можно одновременно измерять два угла поворота объекта. В рассматриваемом случае (рис. 84) гироскоп будет фиксировать повороты объекта вокруг осей $O_c z_c$ и $O_c x_c$, параллельных соответственно внутренней OB и наружной OC осям подвеса гироскопа. При этом сигналы, снимаемые с потенциометров $П_B$ и $П_C$, будут пропорциональны углам α и γ поворота объекта вокруг осей $O_c z_c$ и $O_c x_c$ соответственно. Сравнив схемы размещения гироскопа на подвижном объекте (рис. 82 и 84), заметим, что в обоих вариантах гироскопи-

[1] См.: В. И. Марисов и И. К. Кучеров. Управляемые снаряды. Воениздат, 1959.

ческое устройство позволяет измерять углы поворота объекта вокруг одних и тех же осей $O_c z_c$ и $O_c x_c$. Отличие между ними заключается лишь в том, что в одном варианте (рис. 84) для измерения углов поворота объекта вокруг оси $O_c z_c$ используется потенциометр $П_B$, расположенный на внутренней оси OB подвеса гироскопа, во втором (рис. 82) — потенциометр $П_C$, расположенный на наружной оси OC. Для измерения углов поворота объекта вокруг оси $O_c x_c$ в первом варианте (рис. 84) используется потенциометр $П_C$, во втором (рис. 82) — потенциометр $П_B$.

Таким образом, для измерения углов рыскания α и крена γ могут быть использованы два варианта установки астатического

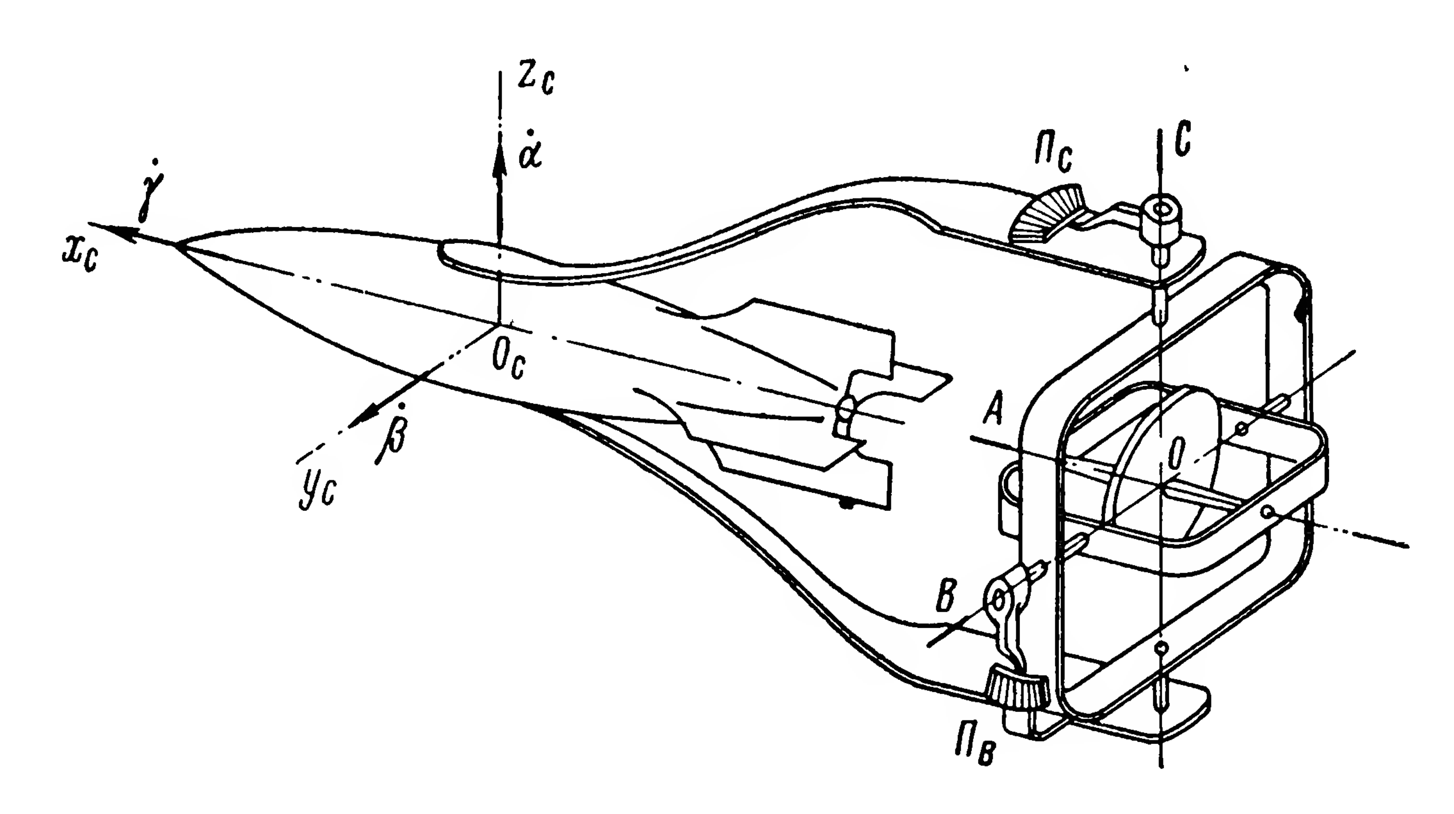


Рис. 85. Гироскопический прибор для измерения углов рыскания и тангажа.

гироскопа на объекте, которые получили название гироскопических устройств курс — крен. Главные оси OA этих гироскопов размещаются параллельно оси $O_c y_c$.

Для измерения углов поворота объекта вокруг осей $O_c z_c$ и $O_c y_c$ также могут быть использованы два варианта установки гироскопа. Одним из них является установка рассмотренного выше (см. рис. 83) астатического гироскопа. Сориентируем ось OA такого гироскопа в начальный момент времени по оси $O_c x_c$ объекта, закрепим неподвижно по отношению к его корпусу плату N и снабдим гироскоп вторым потенциометром, установленным по внутренней оси подвеса OB. В результате получим гироскопическое устройство, позволяющее измерять углы поворота объекта вокруг осей $O_c z_c$ и $O_c y_c$.

Второй возможный вариант размещения на объекте гироскопа с тремя степенями свободы, предназначаемого для измерения углов рыскания α и тангажа β, показан на рис. 85. Здесь, так же как и в первом варианте (см. рис. 83), главная ось гироскопа в начальный момент совмещается с продольной осью $O_c x_c$ объекта. Вследствие такого размещения повороты объекта вокруг

осей O_cz_c и O_cy_c сразу же фиксируются гироскопом. При этом с потенциометров $П_C$ и $П_B$ (рис. 85) будут сниматься сигналы, соответственно пропорциональные углам рыскания α и тангажа β объекта по отношению к заданному направлению движения. Вот почему рассматриваемые устройства и получили в системах автоматического управления название гироскопических устройств тангаж — рыскание.

Наконец, астатический гироскоп может быть использован и для измерения углов отклонения объектов от заданной траектории при повороте их вокруг своих осей O_cx_c и O_cy_c. В таких устройствах главная ось OA гироскопа в начальный момент должна быть совмещена с осью O_cz_c объекта. Нетрудно заметить (рис. 86), что и здесь возможны два варианта размещения гироскопа.

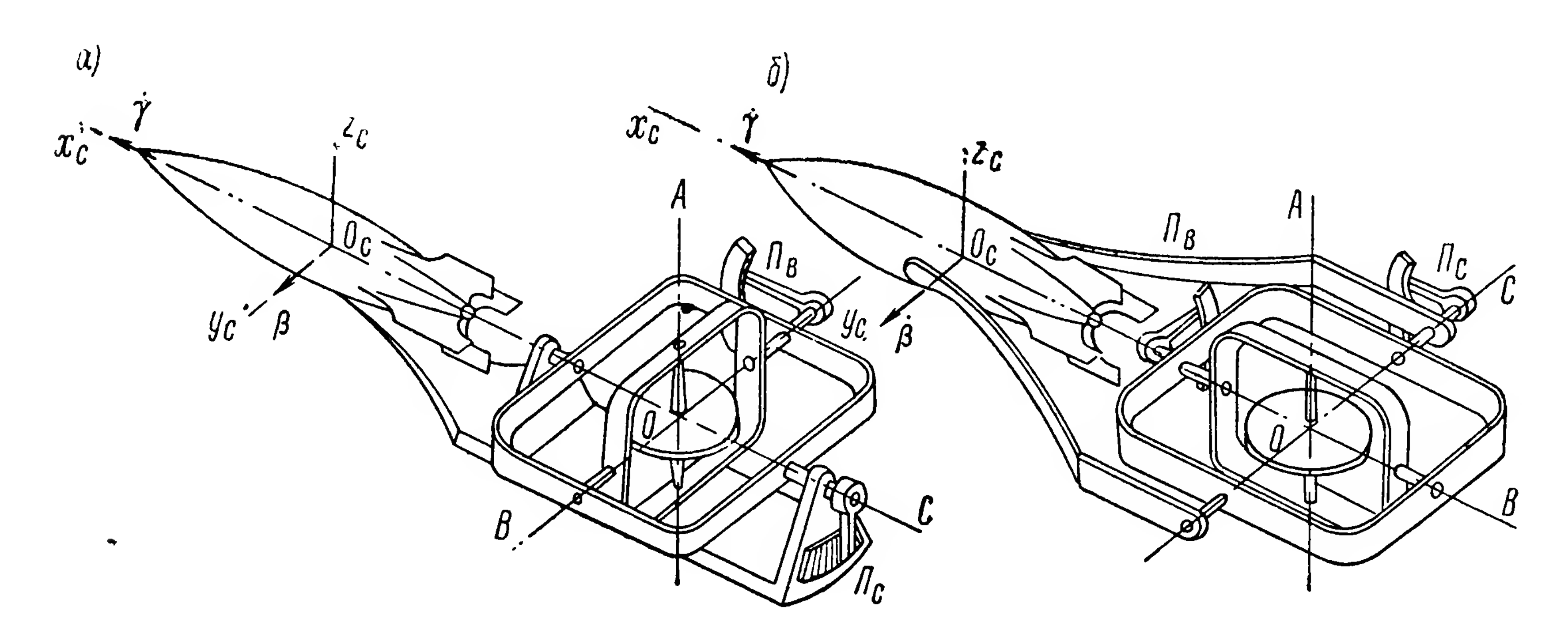


Рис. 86. Гироскопический прибор для измерения углов крена и тангажа.

Описываемые приборы, получившие название гироскопических устройств крен — тангаж, измеряют углы γ крена и β тангажа объекта. В первом варианте (рис. 86, *а*) сигналы, пропорциональные углам γ и β, снимаются соответственно с потенциометров $П_C$ и $П_B$. Во втором (рис. 86, *б*) сигнал, пропорциональный углу крена γ, снимается с потенциометра $П_B$, смонтированного на внутренней оси OB подвеса гироскопа, а сигнал, пропорциональный углу тангажа β, — с потенциометра $П_C$.

Анализ возможных вариантов использования гироскопа для измерения углов отклонения объекта от заданного направления движения показывает, что для одновременного измерения всех трех углов: α рыскания, β тангажа и γ крена на объекте должно быть установлено не менее двух астатических гироскопов. При этом для измерения одной и той же пары углов могут быть использованы два варианта гироскопических устройств. При выборе одного из них обычно отдают предпочтение тому варианту, который в данном конкретном случае обеспечивает наименьшие ошибки при одновременном измерении требуемой пары углов.

§ 42. ФАКТОРЫ, ВЫЗЫВАЮЩИЕ ОШИБКИ ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ АСТАТИЧЕСКИМ ГИРОСКОПОМ УГЛОВ ПОВОРОТА ОБЪЕКТА

Выясним, какие ошибки возникают при измерении с помощью описанных выше гироскопических устройств углов отклонения объекта от неподвижной в пространстве системы координат $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ (рис. 87). Можно считать, что объект отклоняется от заданной траектории в результате трех последовательных поворотов: вокруг оси $O\zeta_0$ на угол рыскания α, вокруг оси Oy на угол тангажа β и, наконец, вокруг оси Ox_c на угол крена γ.

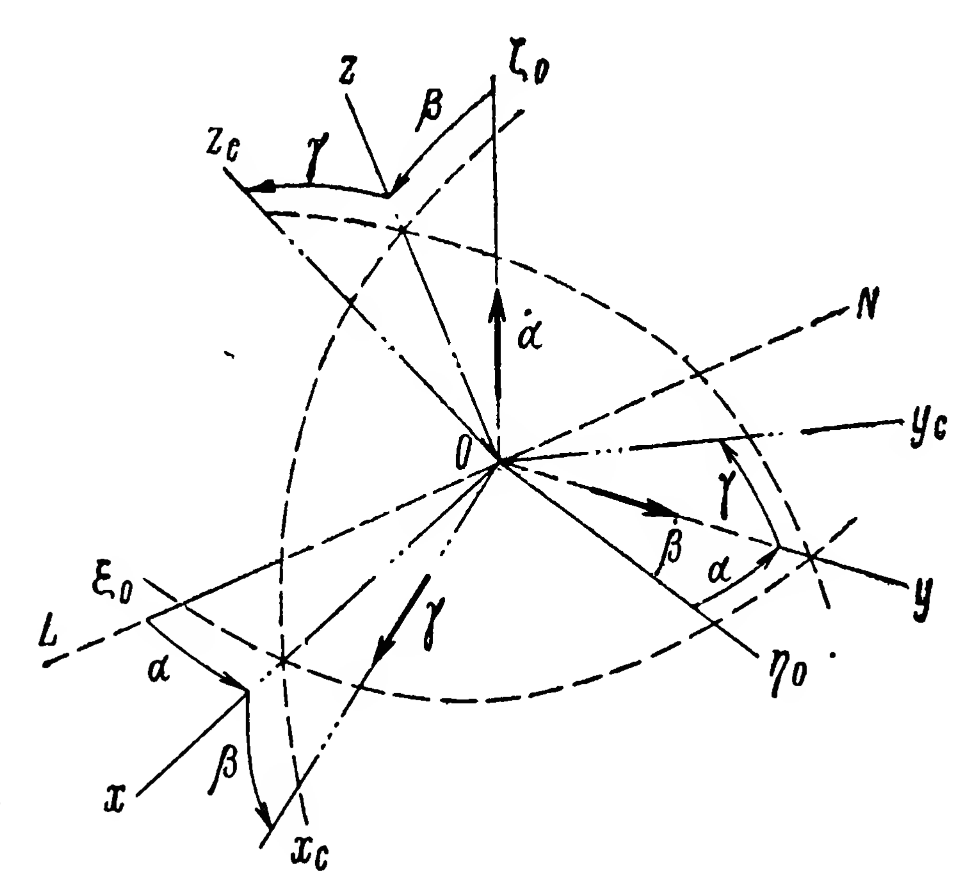


Рис. 87. К ориентации объекта в неподвижной системе координат.

Спроектируем угловые скорости $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ и $\dot{\gamma}$ на координатные оси $Ox_cy_cz_c$, неизменно связанные с объектом. В результате получим

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\alpha}\cos(\zeta_0, x_c) + \dot{\beta}\cos(y, x_c) + \dot{\gamma}\cos(x_c, x_c);\\ \omega_y &= \dot{\alpha}\cos(\zeta_0, y_c) + \dot{\beta}\cos(y, y_c) + \dot{\gamma}\cos(x_c, y_c);\\ \omega_z &= \dot{\alpha}\cos(\zeta_0, z_0) + \dot{\beta}\cos(y, z_c) + \dot{\gamma}\cos(x_c, z_c). \end{aligned}\right\} \quad (266)$$

Для определения косинусов углов, входящих в (266), воспользуемся основным уравнением (30) сферической тригонометрии, согласно которому

$$\cos(\zeta_0, x_c) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\sin\beta;$$

$$\cos(\zeta_0, y_c) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)\sin\beta\cos\frac{\pi}{2} =$$
$$= \cos\beta\sin\gamma;$$

$$\cos(\zeta_0, z_c) = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\frac{\pi}{2} = \cos\beta\cos\gamma;$$

$$\cos(y, x_c) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\beta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\beta\cos\frac{\pi}{2} = 0;$$

$$\cos(y, y_c) = \cos\gamma;$$

$$\cos(y, z_c) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) = -\sin\gamma;$$

$$\cos(x_c, x_c) = \cos 0 = 1;$$

$$\cos(x_c, y_c) = \cos\frac{\pi}{2} = 0;$$

$$\cos(x_c, z_c) = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Подставив вычисленные значения косинусов в выражения (266), найдем проекции угловых скоростей вращения объекта в пространстве на координатные оси $Ox_cy_cz_c$:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= -\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma}; \\ \omega_y &= \dot{\alpha}\cos\beta\sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma; \\ \omega_z &= \dot{\alpha}\cos\beta\cos\gamma - \dot{\beta}\sin\gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (267)$$

Астатический гироскоп, предназначенный для измерения рассматриваемых углов, можно по-разному установить на объекте

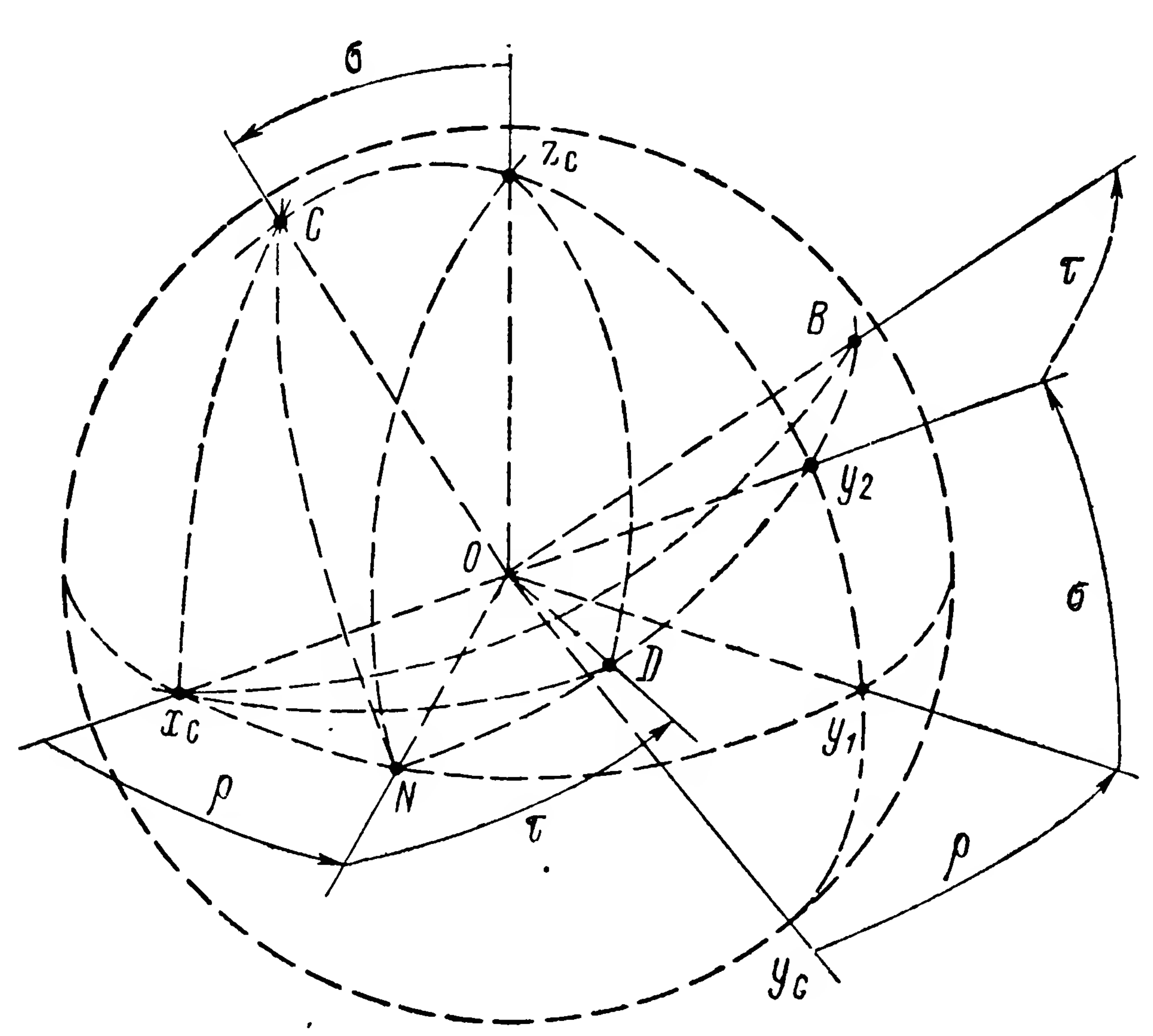


Рис. 88. Положение астатического гироскопа на подвижном объекте.

(см. § 41). В общем случае положение системы координат $ODBC$, неизменно связанной с наружным кардановым кольцом гироскопа, [1] относительно координатной системы $Ox_cy_cz_c$, неизменно связанной с объектом, может быть оценено тремя эйлеровыми углами ϱ, σ и τ (рис. 88).

[1] Напомним, что ось OD является перпендикуляром к плоскости BOC наружного карданова кольца (рис. 52).

Первый эйлеров угол ϱ образован в плоскости $x_c O y_c$ линией узлов ON с осью Ox_c. Второй угол σ расположен в плоскости $y_1 OC$, перпендикулярной линии узлов ON, и образован пересечением осей OC и Oz_c. Наконец, третий угол τ расположен в плоскости NOy_2 и составлен пересечением линии узлов ON и осью OD. Зная указанные углы, можно определить косинусы углов, составляемых осями двух координатных систем $Ox_c y_c z_c$ и $ODBC$.

Согласно уравнению (30) для сферического треугольника $x_c DN$ можем записать

$$\cos(D, x_c) = \cos\varrho\cos\tau + \sin\varrho\sin\tau\cos(\tau - \sigma).$$

Для сферического треугольника $x_c NB$

$$\cos(B, x_c) = \cos\varrho\cos\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) + \sin\varrho\sin\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right)\cos(\tau - \sigma).$$

Для сферического треугольника $x_c CN$ аналогично находим

$$\cos(C, x_c) = \cos\varrho\cos\frac{\pi}{2} + \sin\varrho\sin\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \sigma\right).$$

Так как угол между линией узлов ON и осью Oy_c равен $\frac{\pi}{2} - \varrho$, то, очевидно, что косинусы углов, составляемых осью Oy_c с осями OD, OB и OC, могут быть легко получены из найденных выражений косинусов углов (D, x_c), (B, x_c) и (C, x_c), если в них угол ϱ заменить, учитывая направления отсчета, величиной $-\left(\frac{\pi}{2} - \varrho\right)$:

$$\cos(D, y_c) = \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \varrho\right)\right]\cos\tau + $$
$$+ \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \varrho\right)\right]\sin\tau\cos(\tau - \sigma);$$

$$\cos(B, y_c) = \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \varrho\right)\right]\cos\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) + $$
$$+ \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \varrho\right)\right]\sin\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right)\cos(\tau - \sigma);$$

$$\cos(C, y_c) = \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \varrho\right)\right]\cos\frac{\pi}{2} + $$
$$+ \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \varrho\right)\right]\sin\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \sigma\right).$$

Для сферического треугольника $Nz_c D$ можем записать

$$\cos(D, z_c) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\tau + \sin\frac{\pi}{2}\sin\tau\cos\left(\frac{\pi}{2} - \sigma\right).$$

Угол, составляемый линией узлов ON с осью OB, равен $\frac{\pi}{2} + \tau$. Поэтому, заменяя в полученной формуле τ величиной $\frac{\pi}{2} + \tau$, найдем выражение для косинуса угла между осями OB и Oz_c:

$$\cos(B, z_c) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right) + \\ + \sin\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \sigma\right).$$

Из рис. 88 видно, что

$$\cos(C, z_c) = \cos\sigma.$$

Производя в полученных выражениях тригонометрические преобразования, находим

$$\left.\begin{aligned} \cos(D, x_c) &= \cos\varrho\cos\tau - \sin\varrho\sin\tau\cos\sigma; \\ \cos(B, x_c) &= -\cos\varrho\sin\tau - \sin\varrho\cos\tau\cos\sigma; \\ \cos(C, x_c) &= \sin\varrho\sin\sigma; \\ \cos(D, y_c) &= \sin\varrho\cos\tau + \cos\varrho\sin\tau\cos\sigma; \\ \cos(B, y_c) &= -\sin\varrho\sin\tau + \cos\varrho\cos\tau\cos\sigma; \\ \cos(C, y_c) &= -\cos\varrho\sin\sigma; \\ \cos(D, z_c) &= \sin\tau\sin\sigma; \\ \cos(B, z_c) &= \cos\tau\sin\sigma; \\ \cos(C, z_c) &= \cos\sigma. \end{aligned}\right\} \quad (268)$$

Проектируя угловые скорости (267) на оси координат $ODBC$ и учитывая найденные значения (268) косинусов, можем записать:

$$\omega_D = (-\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma})(\cos\varrho\cos\tau - \sin\varrho\sin\tau\cos\sigma) + \\ + (\dot{\alpha}\cos\beta\sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma)(\sin\varrho\cos\tau + \cos\varrho\sin\tau\cos\sigma) + \\ + (\dot{\alpha}\cos\beta\cos\gamma - \dot{\beta}\sin\gamma)\sin\tau\sin\sigma;$$

$$\omega_B = (-\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma})(-\cos\varrho\sin\tau - \sin\varrho\cos\tau\cos\sigma) + \\ + (\dot{\alpha}\cos\beta\sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma)(-\sin\varrho\sin\tau + \cos\varrho\cos\tau\cos\sigma) + \\ + (\dot{\alpha}\cos\beta\cos\gamma - \dot{\beta}\sin\gamma)\cos\tau\sin\sigma;$$

$$\omega_C = (-\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma})\sin\varrho\sin\sigma - \\ - (\dot{\alpha}\cos\beta\sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma)\cos\varrho\sin\sigma + \\ + (\dot{\alpha}\cos\beta\cos\gamma - \dot{\beta}\sin\gamma)\cos\sigma,$$

или, производя преобразования:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_D = {} & \dot{\alpha}(-\sin\beta\cos\varrho\cos\tau + \sin\beta\sin\varrho\sin\tau\cos\sigma + \\
& + \cos\beta\sin\gamma\sin\varrho\cos\tau + \cos\beta\sin\gamma\cos\varrho\sin\tau\cos\sigma + \\
& + \cos\beta\cos\gamma\sin\tau\sin\sigma) + \dot{\beta}(\cos\gamma\sin\varrho\cos\tau + \\
& + \cos\gamma\cos\varrho\sin\tau\cos\sigma - \sin\gamma\sin\tau\sin\sigma) + \\
& + \dot{\gamma}(\cos\varrho\cos\tau - \sin\varrho\sin\tau\cos\sigma); \\
\omega_B = {} & \dot{\alpha}(\sin\beta\cos\varrho\sin\tau + \sin\beta\sin\varrho\cos\tau\cos\sigma - \\
& - \cos\beta\sin\gamma\sin\varrho\sin\tau + \cos\beta\sin\gamma\cos\varrho\cos\tau\cos\sigma + \\
& + \cos\beta\cos\gamma\cos\tau\sin\sigma) + \dot{\beta}(-\cos\gamma\sin\varrho\sin\tau + \\
& + \cos\gamma\cos\varrho\cos\tau\cos\sigma - \sin\gamma\cos\tau\sin\sigma) - \\
& - \dot{\gamma}(\cos\varrho\sin\tau + \sin\varrho\cos\tau\cos\sigma); \\
\omega_C = {} & -\dot{\alpha}(\sin\beta\sin\varrho\sin\sigma + \cos\beta\sin\gamma\cos\varrho\sin\sigma - \\
& - \cos\beta\cos\gamma\cos\sigma) - \dot{\beta}(\cos\gamma\cos\varrho\sin\sigma + \\
& + \sin\gamma\cos\sigma) + \dot{\gamma}\sin\varrho\sin\sigma.
\end{aligned}\right\} \quad (269)$$

В зависимости от варианта размещения астатического гироскопа на объекте углы ϱ, σ и τ в каждом конкретном случае будут принимать свои, вполне определенные значения. В связи с этим и выражения (269) получат различный вид для каждого варианта установки гироскопа. Чтобы выяснить, как изменяются выражения (269), в табл. 5 сведены значения углов ϱ, σ и τ при различных вариантах установки астатического гироскопа на объекте. Искомые значения углов вытекают непосредственно из принципиальных схем приборов, описанных в § 41. Поворачивая в каждом конкретном случае координатную систему $Ox_cy_cz_c$ до совмещения с осями $ODBC$, можно определить значения углов ϱ, σ и τ.

Подставив приведенные в табл. 5 значения углов ϱ, σ и τ в выражения (269), найдем угловые скорости вращения объекта вокруг осей OD, OB и OC гироскопа при различных вариантах его размещения. Угловая скорость ω_D, согласно изложенному в § 26, вызывает дрейф гироскопа в пространстве. Естественно, что при знакопеременном изменении величины ω_D, обусловливаемом самим характером колебаний объекта (см. рис. 75), отклонение гироскопа в этом случае будет незначительным. Последнее обстоятельство позволяет пренебрегать влиянием угловой скорости ω_D на изменение углов отклонения объекта. Поэтому, опуская из дальнейшего рассмотрения угловую скорость ω_D, определим для каждого варианта размещения гироскопа на объекте лишь угловые скорости ω_B и ω_C; получаемые при этом выражения сведены в табл. 6.

Из табл. 6 следует, что угловые скорости ω_B и ω_C вращения объекта вокруг осей OB и OC гироскопа при любом варианте его

Таблица 5

Значения углов, характеризующих размещение астатического гироскопа на объекте

Углы поворота объекта, измеряемые гипроскопом	Номер рисунка	Значение углов		
		ϱ	σ	τ
Крен—рыскание	84	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0
	82	0	0	$\frac{\pi}{2}$
Тангаж—рыскание	83	0	$\frac{\pi}{2}$	0
	85	0	0	0
Крен—тангаж	86, *а*	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
	86, *б*	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

Таблица 6

Угловые скорости вращения объекта вокруг осей подвеса астатического гироскопа при различных вариантах его установки на объекте

Углы поворота объекта, измеряемые гироскопом	Номер рисунка	Угловые скорости ω_B и ω_C
Крен—рыскание	84	$\omega_B = \dot{\alpha}\cos\beta\cos\gamma - \dot{\beta}\sin\gamma$ $\omega_C = \dot{\gamma}$
	82	$\omega_B = \dot{\alpha}\sin\beta - \dot{\gamma}$ $\omega_C = \dot{\alpha}\cos\beta\cos\gamma$
Тангаж—рыскание	83	$\omega_B = \dot{\alpha}\cos\beta\cos\gamma - \dot{\beta}\sin\gamma$ $\omega_C = -\dot{\alpha}\cos\beta\sin\gamma - \dot{\beta}\cos\gamma$
	85	$\omega_B = \dot{\alpha}\cos\beta\sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma$ $\omega_C = \dot{\alpha}\cos\beta\cos\gamma - \dot{\beta}\sin\gamma$
Крен—тангаж	86, *а*	$\omega_B = -\dot{\alpha}\cos\beta\sin\gamma - \dot{\beta}\cos\gamma$ $\omega_C = -\dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma}$
	86, *б*	$\omega_B = \dot{\alpha}\sin\beta - \dot{\gamma}$ $\omega_C = -\dot{\alpha}\cos\beta\sin\gamma - \dot{\beta}\cos\gamma$

размещения зависят, как правило, от угловых скоростей вращения объекта одновременно вокруг каких-либо двух его осей Ox_c, Oy_c и Oz_c. Поэтому углы поворота астатического гироскопа вокруг осей подвеса OB и OC по отношению к объекту не будут в точности соответствовать углам поворота объекта вокруг той или иной пары осей Ox_c, Oy_c и Oz_c. Однако, зная пределы изменения углов α рыскания, β тангажа и γ крена, в каждом отдельном случае по табл. 6 можно выбрать такой вариант размещения гироскопа, при котором ошибки измерений будут наименьшими.

§ 43. КАРДАНОВЫ ОШИБКИ АСТАТИЧЕСКИХ ГИРОСКОПОВ

В общем случае движения центр тяжести объекта перемещается в пространстве по сложной траектории. При этом углы поворотов объекта по курсу, тангажу и крену могут принимать весьма большие значения. Вот почему во многих случаях практического использования астатического гироскопа нельзя ограничиваться только качественной оценкой возможных ошибок. Для определения искажений при измерении углов поворота объектов приходится подробно исследовать так называемые кардановы ошибки, обусловливаемые геометрией подвеса гироскопа.

Необходимо особо подчеркнуть, что характер кардановых ошибок меняется в зависимости от принятого варианта размещения гироскопа на объекте. Последнее обстоятельство и вызывает необходимость исследования возможных искажений при измерении углов поворота объекта для каждого типа гироскопических приборов в отдельности.

Анализом кардановых ошибок гироскопических приборов занимались многие авторы [12, 33, 36]. Ознакомление с результатами этих работ выходит за рамки настоящей книги. Поэтому методику исследования кардановых ошибок покажем здесь лишь на одном частном примере. Выберем с этой целью два прибора (рис. 89), предназначенных для измерения всех трех углов поворота объекта. Потенциометры $П_{C1}$ и $П_{B1}$, расположенные по осям O_1C_1 и O_1B_1 подвеса первого гироскопа, предназначены для измерения углов тангажа и крена. Потенциометр $П_{C2}$, установленный по наружной оси O_2C_2 второго гироскопа, предназначен для измерения угла рыскания.

Предположим, что в начальный момент времени оси подвеса гироскопа совмещены с осями неподвижной в пространстве системы координат $O\xi_0\eta_0\zeta_0$. Кроме того, условимся считать, что за время выполнения эволюции главные оси O_1A_1 и O_2A_2 гироскопов сохраняют первоначально заданные направления. При этих условиях в процессе перемещения объекта гироскопы будут фиксировать направления осей той опорной системы координат $O\xi_0\eta_0\zeta_0$, по отношению к которой определяются углы поворота объекта.

Предположим, как и выше (см. рис. 87), что объект совершил три последовательных поворота на углы α, β и γ вокруг осей $O\zeta_0$,

Oy и Ox_c соответственно. В этом случае косинусы углов, составляемых осями координат $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ и $Ox_cy_cz_c$, согласно уравнению (30) будут определяться следующими выражениями:

$$\cos(x_c, \xi_0) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\frac{\pi}{2};$$

$$\cos(x_c, \eta_0) = \cos\beta\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin\beta\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\frac{\pi}{2};$$

$$\cos(x_c, \zeta_0) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right);$$

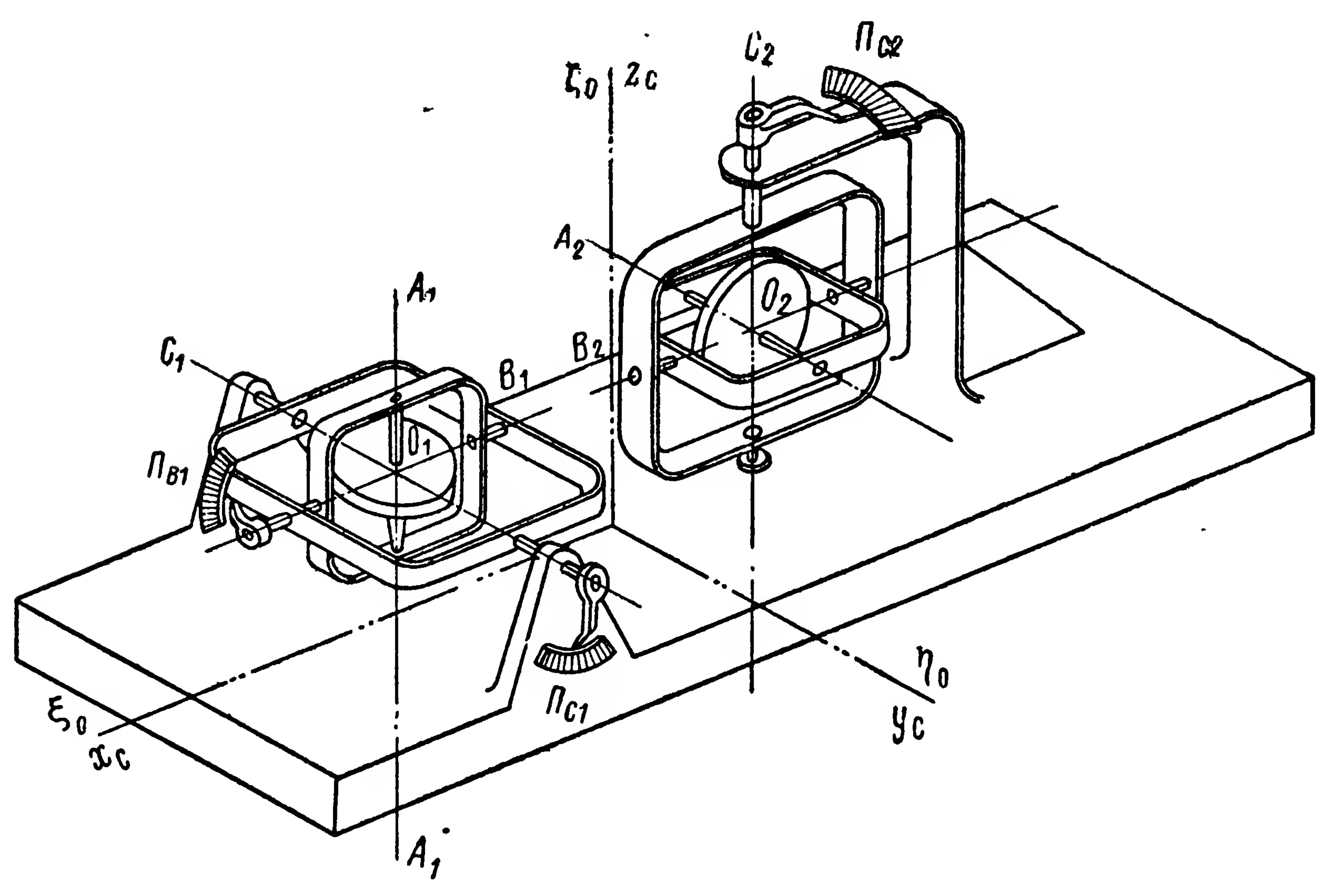


Рис. 89. Система двух астатических гироскопов для измерения углов рыскания, тангажа и крена объекта.

$$\cos(y_c, \xi_0) = \cos\gamma\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right);$$

$$\cos(y_c, \eta_0) = \cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right);$$

$$\cos(y_c, \zeta_0) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)\sin\beta\cos\frac{\pi}{2};$$

$$\cos(z_c, \xi_0) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right);$$

$$\cos(z_c, \eta_0) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)\cos\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)\sin\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right);$$

$$\cos(z_c, \zeta_0) = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\frac{\pi}{2},$$

или после тригонометрических преобразований:

$$\left.\begin{aligned}
\cos(x_c, \xi_0) &= \cos\alpha\cos\beta;\\
\cos(x_c, \eta_0) &= \sin\alpha\cos\beta;\\
\cos(x_c, \zeta_0) &= -\sin\beta;\\
\cos(y_c, \xi_0) &= -\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma;\\
\cos(y_c, \eta_0) &= \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma;\\
\cos(y_c, \zeta_0) &= \cos\beta\sin\gamma;\\
\cos(z_c, \xi_0) &= \sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma;\\
\cos(z_c, \eta_0) &= -\cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma;\\
\cos(z_c, \zeta_0) &= \cos\beta\cos\gamma.
\end{aligned}\right\} \quad (270)$$

При вращении объекта гироскопы, сохраняя направления осей O_1A_1 и O_2A_2 (рис. 89) неизменными в пространстве, вынуждены

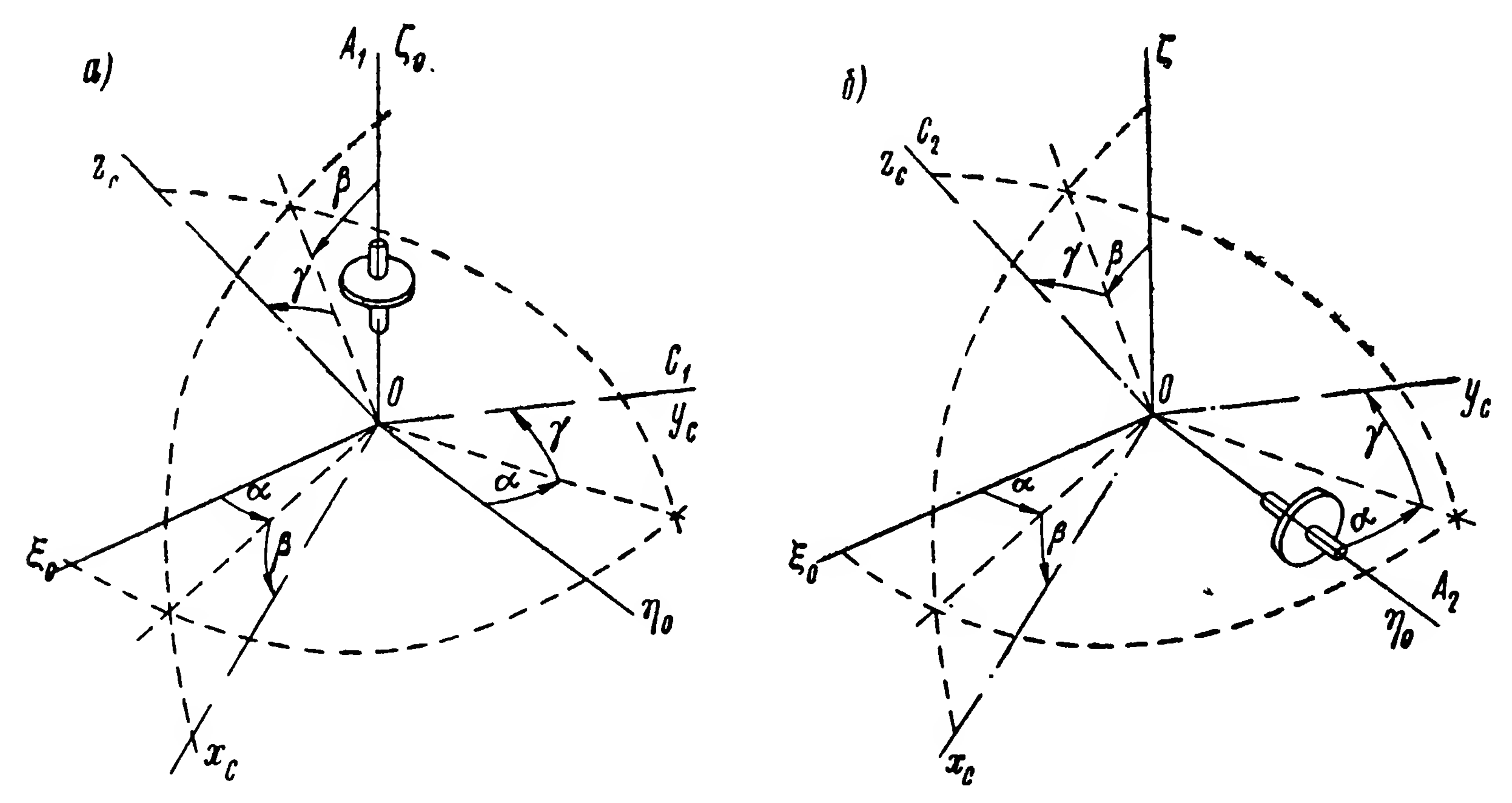


Рис. 90. Положение гироскопов, измеряющих углы рыскания, тангажа и крена, на подвижном объекте.

будут изменить свои положения в системе координат $Ox_cy_cz_c$, неизменно связанной с объектом. Действительно, наружная ось OC_1 первого гироскопа, ось OA_1 которого остается совмещенной с осью $O\zeta_0$, повернется вместе с осью Oy_c объекта в пространстве (рис. 90, *а*). Наружная ось OC_2 второго гироскопа, ось OA_2 которого остается совмещенной с осью $O\eta_0$ (рис. 90, *б*), повернется в пространстве вместе с осью Oz_c объекта. В обоих случаях внутренние оси подвеса O_1B_1 и O_2B_2 гироскопов займут положения: первая — перпендикулярно осям O_1A_1 и O_1C_1, вторая — перпендикулярно осям O_2A_2 и O_2C_2 (рис. 89).

Для определения положений внутренних осей подвеса O_1B_1 и O_2B_2 гироскопов повернем объект относительно неподвижной системы координат $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ вначале на угол α_1 вокруг оси $O\zeta_0$

(рис. 91), затем на угол γ_1 вокруг оси Ox_1 и, наконец, на угол β_1 вокруг оси OC_1 гироскопа. При таком взаимном расположении координатных систем $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ и $Ox_cy_cz_c$ косинусы углов, составляемых их осями, будут определяться из выражений

$$\cos(x_c, \xi_0) = \cos\alpha_1\cos\beta_1 + \sin\alpha_1\sin\beta_1\cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_1\right);$$

$$\cos(x_c, \eta_0) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right)\cos\beta_1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right)\sin\beta_1\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_1\right);$$

$$\cos(x_c, \zeta_0) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta_1\right)\cos\gamma_1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta_1\right)\sin\gamma_1\cos\frac{\pi}{2};$$

$$\cos(y_c, \xi_0) = \cos\gamma_1\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right) + \sin\gamma_1\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right)\cos\frac{\pi}{2};$$

$$\cos(y_c, \eta_0) = \cos\gamma_1\cos\alpha_1 + \sin\gamma_1\sin\alpha_1\cos\frac{\pi}{2};$$

$$\cos(y_c, \zeta_0) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_1\right);$$

$$\cos(z_c, \xi_0) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)\cos\alpha_1 +$$
$$+ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)\sin\alpha_1\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_1\right);$$

$$\cos(z_c, \eta_0) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right) +$$
$$+ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_1\right);$$

$$\cos(z_c, \zeta_0) = \cos\gamma_1\cos\beta_1 + \sin\gamma_1\sin\beta_1\cos\frac{\pi}{2},$$

которые после элементарных тригонометрических преобразований принимают вид

$$\left.\begin{aligned}
\cos(x_c, \xi_0) &= \cos\alpha_1\cos\beta_1 - \sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1;\\
\cos(x_c, \eta_0) &= \sin\alpha_1\cos\beta_1 + \cos\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1;\\
\cos(x_c, \zeta_0) &= -\sin\beta_1\cos\gamma_1;\\
\cos(y_c, \xi_0) &= -\sin\alpha_1\cos\gamma_1;\\
\cos(y_c, \eta_0) &= \cos\alpha_1\cos\gamma_1;\\
\cos(y_c, \zeta_0) &= \sin\gamma_1;\\
\cos(z_c, \xi_0) &= \cos\alpha_1\sin\beta_1 + \sin\alpha_1\cos\beta_1\sin\gamma_1;\\
\cos(z_c, \eta_0) &= \sin\alpha_1\sin\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta_1\sin\gamma_1;\\
\cos(z_c, \zeta_0) &= \cos\beta_1\cos\gamma_1.
\end{aligned}\right\} \quad (271)$$

Поступая аналогичным образом, повернем объект вокруг оси $O\eta_0$ на угол β_2 (рис. 92), вокруг оси Ox_2 на угол γ_2 и вокруг оси Oz_c на угол α_2. При таком взаимном положении координатных систем $Ox_cy_cz_c$ и $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ косинусы углов между их осями будут равны

$$\cos(x_c, \xi_0) = \cos\beta_2\cos\alpha_2 + \sin\beta_2\sin\alpha_2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_2\right);$$

$$\cos(x_c, \eta_0) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right)\cos\gamma_2 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right)\sin\gamma_2\cos\frac{\pi}{2};$$

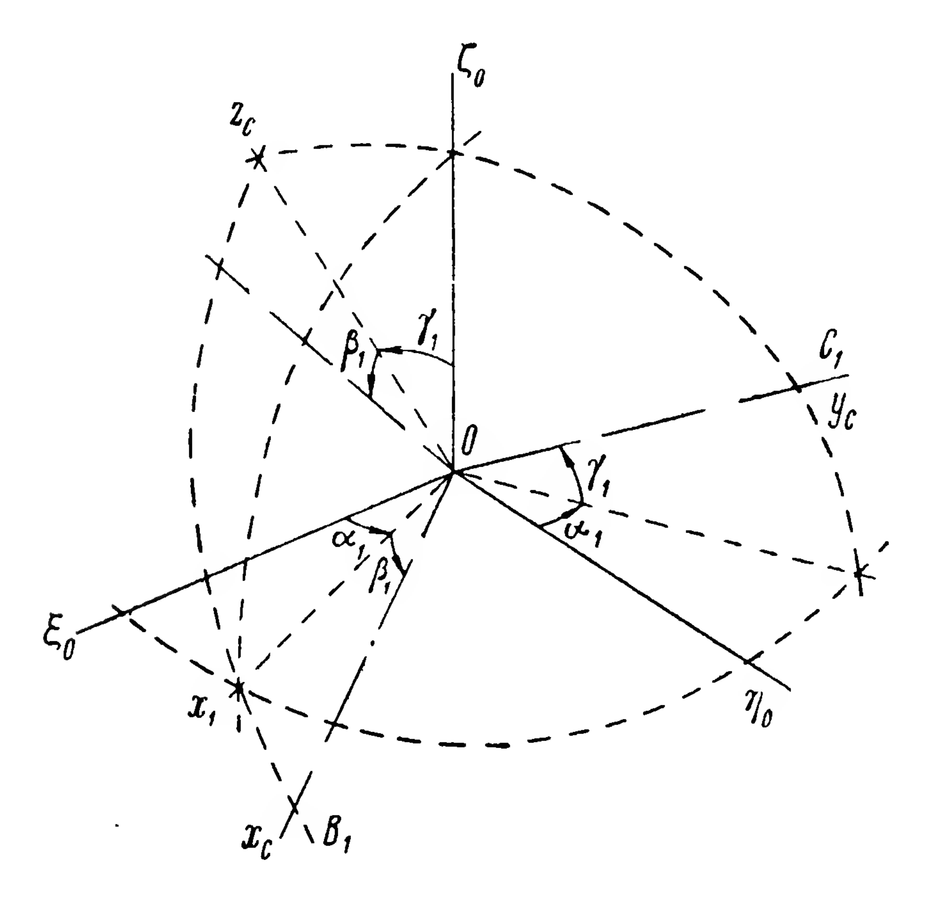


Рис. 91. Положение на объекте осей подвеса гироскопа, измеряющего углы тангажа и крена.

Рис. 92. Положение на объекте осей подвеса гироскопа, измеряющего угол рыскания.

$$\cos(x_c, \zeta_0) = \cos\alpha_2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta_2\right) + \sin\alpha_2\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta_2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_2\right);$$

$$\cos(y_c, \xi_0) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_2\right)\cos\beta_2 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_2\right)\sin\beta_2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_2\right);$$

$$\cos(y_c, \eta_0) = \cos\alpha_2\cos\gamma_2 + \sin\alpha_2\sin\gamma_2\cos\frac{\pi}{2};$$

$$\cos(y_c, \zeta_0) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta_2\right) +$$

$$+ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_2\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta_2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_2\right);$$

$$\cos(z_c, \xi_0) = \cos\gamma_2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right) + \sin\gamma_2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right)\cos\frac{\pi}{2};$$

$$\cos(z_c, \eta_0) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_2\right);$$

$$\cos(z_c, \zeta_0) = \cos\gamma_2 \cos\beta_2 + \sin\gamma_2 \sin\beta_2 \cos\frac{\pi}{2},$$

или после тригонометрических преобразований:

$$\left.\begin{aligned}
\cos(x_c, \xi_0) &= \cos\alpha_2 \cos\beta_2 + \sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2;\\
\cos(x_c, \eta_0) &= \sin\alpha_2 \cos\gamma_2;\\
\cos(x_c, \zeta_0) &= -\cos\alpha_2 \sin\beta_2 + \sin\alpha_2 \cos\beta_2 \sin\gamma_2;\\
\cos(y_c, \xi_0) &= -\sin\alpha_2 \cos\beta_2 + \cos\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2;\\
\cos(y_c, \eta_0) &= \cos\alpha_2 \cos\gamma_2;\\
\cos(y_c, \zeta_0) &= \sin\alpha_2 \sin\beta_2 + \cos\alpha_2 \cos\beta_2 \sin\gamma_2;\\
\cos(z_c, \xi_0) &= \sin\beta_2 \cos\gamma_2;\\
\cos(z_c, \eta_0) &= -\sin\gamma_2;\\
\cos(z_c, \zeta_0) &= \cos\beta_2 \cos\gamma_2.
\end{aligned}\right\} \quad (272)$$

Вполне очевидно, что косинусы углов между осями координат $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ и $Ox_cy_cz_c$ при любой последовательности поворотов (рис. 87, 91 и 92) будут неизменны. Поэтому, приравняв косинусы одних и тех же углов в выражениях (271) и (270), найдем

$$\sin\gamma_1 = \cos\beta \sin\gamma \quad (273)$$

и

$$-\sin\beta_1 \cos\gamma_1 = -\sin\beta;$$

$$\cos\beta_1 \cos\gamma_1 = \cos\beta \cos\gamma.$$

Разделив последние два равенства одно на другое, найдем

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\gamma}. \quad (274)$$

По аналогии из выражений (272) и (270) следует

$$\sin\alpha_2 \cos\gamma_2 = \sin\alpha \cos\beta;$$

$$\cos\alpha_2 \cos\gamma_2 = \cos\alpha \cos\gamma + \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

откуда

$$\operatorname{ctg}\alpha_2 = \operatorname{ctg}\alpha \frac{\cos\gamma}{\cos\beta} + \operatorname{tg}\beta \sin\gamma. \quad (275)$$

Зависимости (273)—(275) позволяют определить значения кардановых ошибок при измерении углов поворота объекта с помощью двух астатических гироскопов (см. рис. 89). Вычитая из действительных значений углов поворота α по курсу, β по тангажу и

γ по крену их величины α_2, β_1 и γ_1, измеренные гироскопическими устройствами, получим разности

$$\left.\begin{aligned} \Delta\alpha &= \alpha - \alpha_2 = \alpha - \operatorname{arc\,ctg}\left(\operatorname{ctg}\alpha \frac{\cos\gamma}{\cos\beta} + \operatorname{tg}\beta\sin\gamma\right); \\ \Delta\beta &= \beta - \beta_1 = \beta - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\gamma}\right); \\ \Delta\gamma &= \gamma - \gamma_1 = \gamma - \arcsin(\cos\beta\sin\gamma), \end{aligned}\right\} \quad (276)$$

которые характеризуют кардановы ошибки, возникающие при измерениях углов поворота объекта с помощью астатических гироскопов.

§ 44. ИССЛЕДОВАНИЕ КАРДАНОВЫХ ОШИБОК АСТАТИЧЕСКИХ ГИРОСКОПОВ

Из анализа выражений (276) следует, что кардановы ошибки являются функциями нескольких переменных. Их величины будут достигать своего максимума или минимума при тех значениях независимых переменных α, β и γ, при которых частные производные первого порядка исследуемых функций (276) обращаются в нуль либо не существуют.[1]

Учитывая сказанное, вычислим частные производные первого порядка функции $\Delta\alpha$ (α, β, γ), определяемой первым выражением (276), и приравняем их нулю. В результате дифференцирования будем иметь

$$\frac{\partial\Delta\alpha}{\partial\alpha} = 1 + \frac{-\dfrac{\cos\gamma}{\cos\beta\sin^2\alpha}}{1 + \left(\operatorname{ctg}\alpha\dfrac{\cos\gamma}{\cos\beta} + \operatorname{tg}\beta\sin\gamma\right)^2} = 0;$$

$$\frac{\partial\Delta\alpha}{\partial\beta} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\cos\gamma\dfrac{\sin\beta}{\cos^2\beta} + \dfrac{\sin\gamma}{\cos^2\beta}}{1 + \left(\operatorname{ctg}\alpha\dfrac{\cos\gamma}{\cos\beta} + \operatorname{tg}\beta\sin\gamma\right)^2} = 0;$$

$$\frac{\partial\Delta\alpha}{\partial\gamma} = -\frac{\operatorname{ctg}\alpha\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} - \operatorname{tg}\beta\cos\gamma}{1 + \left(\operatorname{ctg}\alpha\dfrac{\cos\gamma}{\cos\beta} + \operatorname{tg}\beta\sin\gamma\right)^2} = 0.$$

Полученная система трех уравнений может быть переписана в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} 1 + \left(\operatorname{ctg}\alpha\frac{\cos\gamma}{\cos\beta} + \operatorname{tg}\beta\sin\gamma\right)^2 - \frac{\cos\gamma}{\cos\beta\sin^2\alpha} &= 0; \\ \operatorname{ctg}\alpha\cos\gamma\sin\beta + \sin\gamma &= 0; \\ \operatorname{ctg}\alpha\sin\gamma - \sin\beta\cos\gamma &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (277)$$

---

[1] См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Т. I, Гостехиздат, 1948, стр. 382.

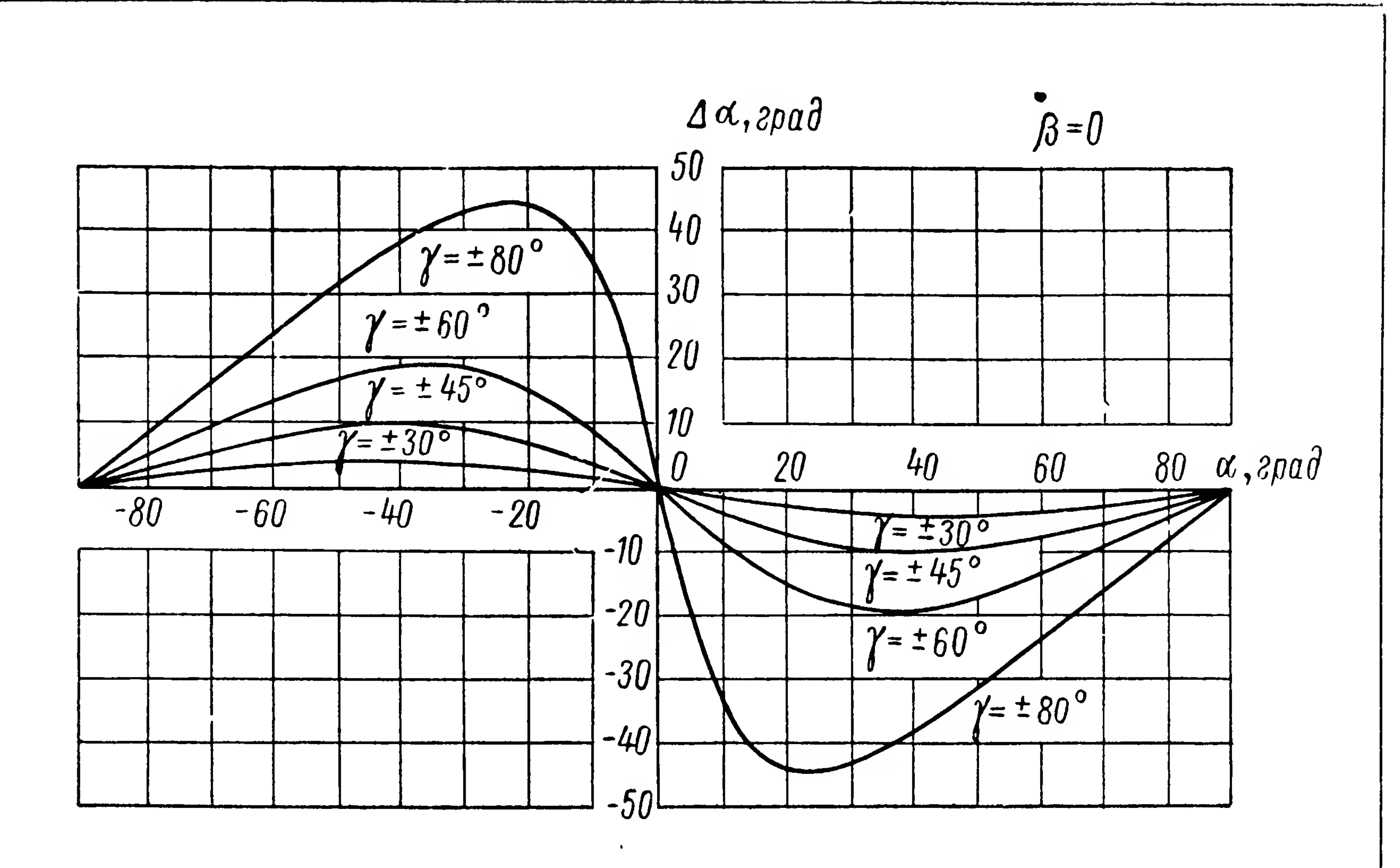


Рис. 93. Графики кардановой ошибки измерения угла рыскания при β = 0.

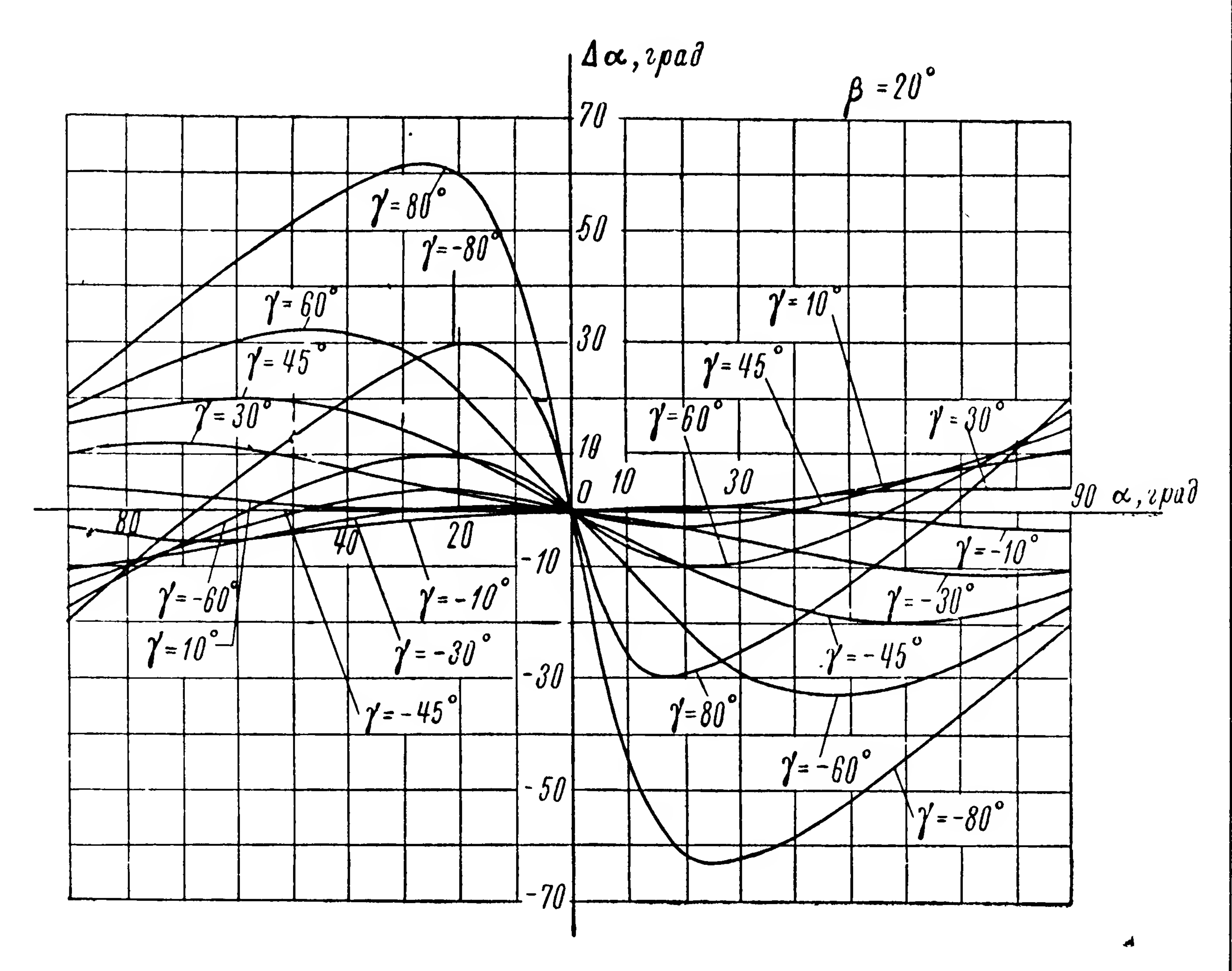


Рис. 94. Графики кардановой ошибки измерения угла рыскания при β = 20°.

Определяя значение $\sin\beta\cos\gamma$ из третьего уравнения (277) и подставляя его во второе, находим равенство $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{-1}$, которое указывает на отсутствие экстремумов функции $\Delta\alpha(\alpha, \beta, \gamma)$ в области вещественных значений независимых переменных. Поэтому для выяснения характера изменения $\Delta\alpha$ по первому выражению (276) построим семейства кривых $\Delta\alpha(\alpha)$ при некоторых

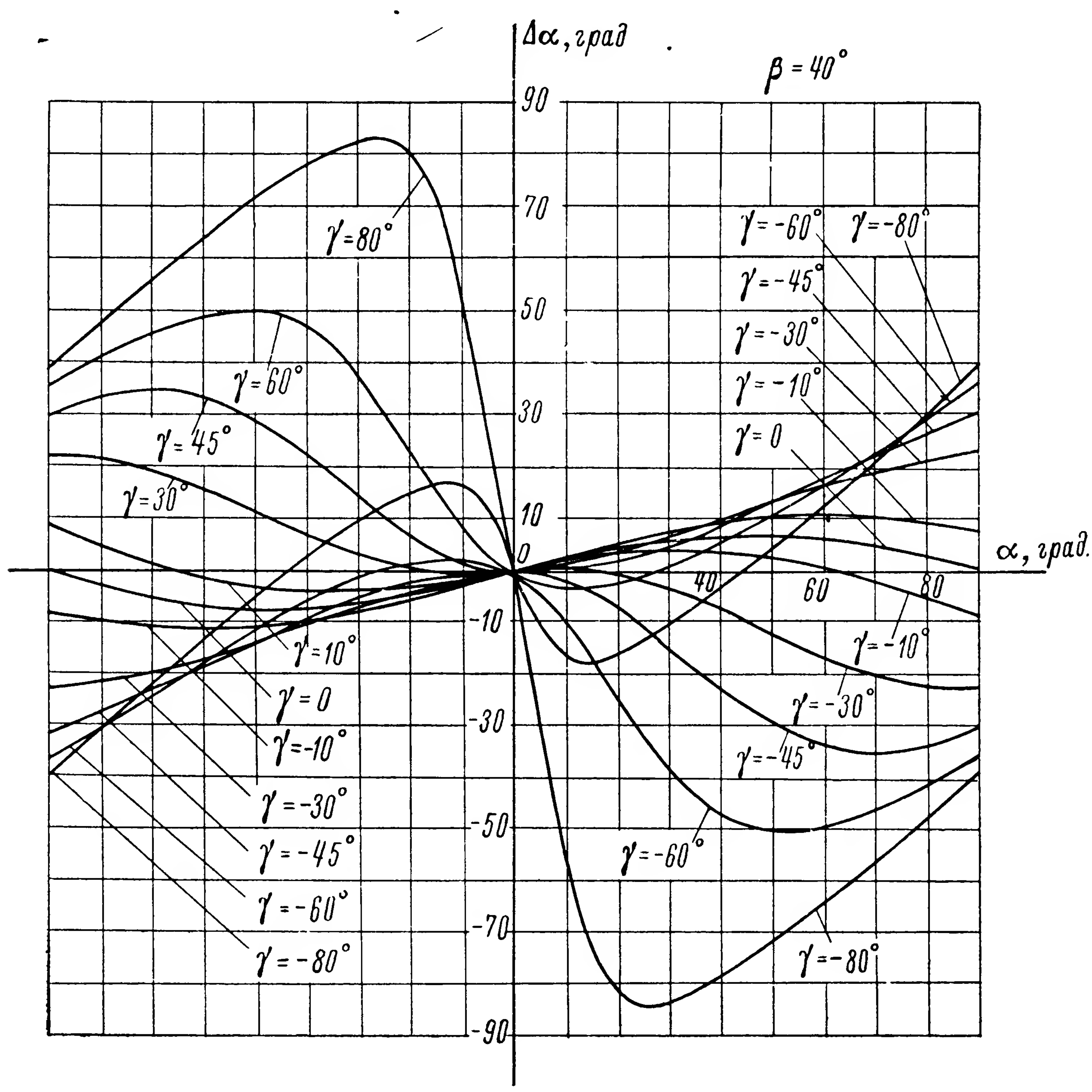


Рис. 95. Графики кардановой ошибки измерения угла рыскания при $\beta = 40°$.

значениях β и γ. Полученные графики[1] для постоянных углов тангажа β, равных 0, 20, 40 и 60°, приведены на рис. 93—96. Как видим, несмотря на отсутствие у функции $\Delta\alpha(\alpha, \beta, \gamma)$ общего экстремума, любое ее сечение при $\beta = \text{const}$ и $\gamma = \text{const}$ имеет свой максимум. При увеличении углов тангажа β и крена γ максимальное значение кардановой ошибки $\Delta\alpha$ будет увеличиваться по абсолютной величине и несколько смещаться вдоль ординаты α к началу координат.

[1] Графики кардановых ошибок получены И. В. Павловым [33].

Карданова ошибка $\Delta\beta$ по тангажу, определяемая вторым выражением (276), является функцией двух переменных β и γ. Вычис-

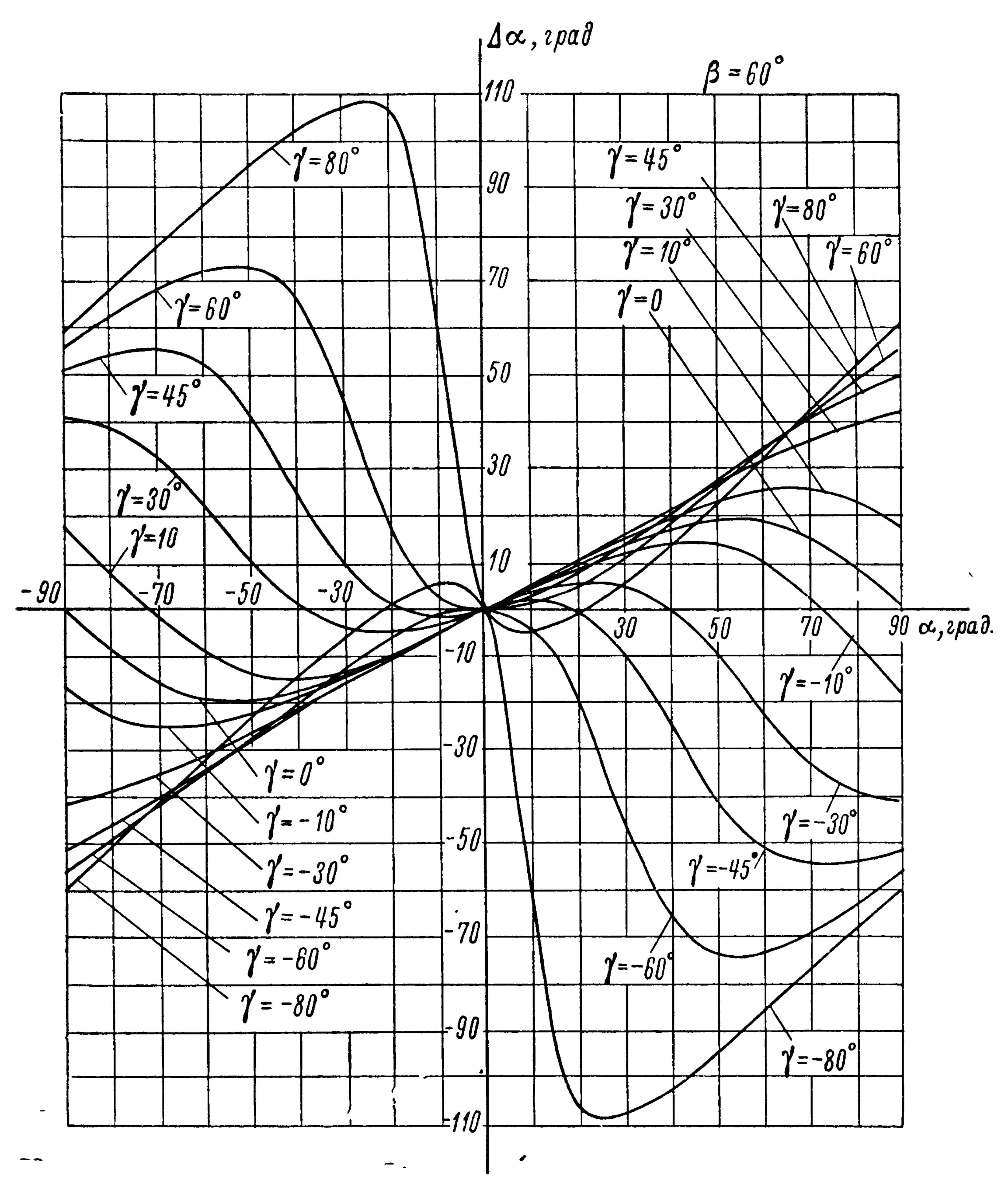


Рис. 96. Графики кардановой ошибки измерения угла рыскания при $\beta = 60°$.

лим частные производные первого порядка функции $\Delta\beta$ (β, γ) и приравняем их нулю:

$$\frac{\partial\Delta\beta}{\partial\beta} = 1 - \frac{\frac{1}{\cos^2\beta\cos\gamma}}{1 + \left(\frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\gamma}\right)^2} = 0;$$

$$\frac{\partial\Delta\beta}{\partial\gamma} = -\frac{\operatorname{tg}\beta\,\frac{\sin\gamma}{\cos^2\gamma}}{1 + \left(\frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\gamma}\right)^2} = 0,$$

откуда

$$1+\frac{\operatorname{tg}^2\beta}{\cos^2\gamma}-\frac{1}{\cos^2\beta\cos\gamma}=0,$$

$$\operatorname{tg}\beta\frac{\sin\gamma}{\cos^2\gamma}=0$$

или окончательно

$$\left.\begin{array}{c}\cos^2\beta\cos^2\gamma+\sin^2\beta-\cos\gamma=0;\\ \operatorname{tg}\beta\sin\gamma=0.\end{array}\right\}\qquad(278)$$

Из второго уравнения системы (278) видно, что $\frac{\partial\Delta\beta}{\partial\gamma}=0$ при $\beta=0$ и при $\gamma=0$. В тех случаях, когда угол крена $\gamma=0$, карданова ошибка $\Delta\beta$ также равна нулю:

$$\Delta\beta=\beta-\operatorname{arc}\operatorname{tg}(\operatorname{tg}\beta)=$$
$$=\beta-\beta=0.$$

Это указывает на то, что частные производные $\frac{\partial\Delta\beta}{\partial\beta}$ и $\frac{\partial\Delta\beta}{\partial\gamma}$ при $\gamma=0$ принимают нулевые значения при любых величинах угла тангажа β. Иными словами, карданова ошибка $\Delta\beta$ в этом случае будет отсутствовать и ее график представит собой прямую линию (рис. 97).

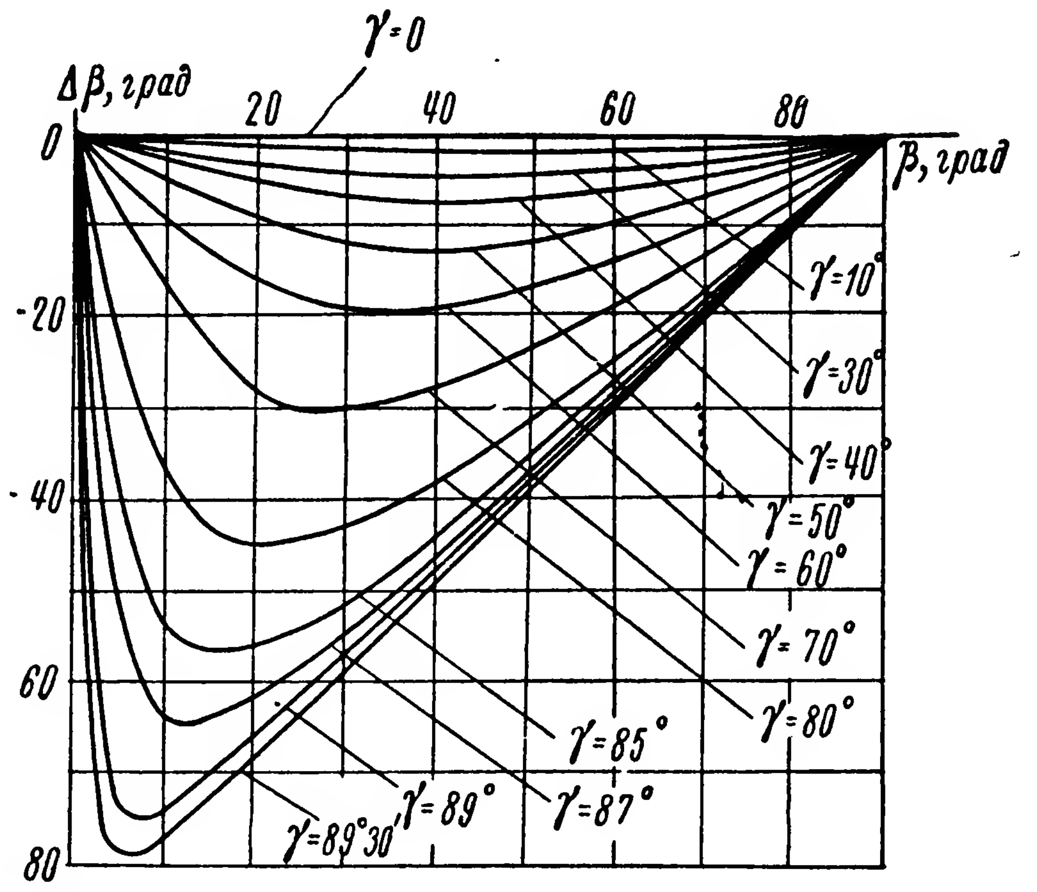


Рис. 97. Графики кардановой ошибки при измерении угла тангажа.

Если же нулю будет равен угол тангажа β, то экстремумы функции $\Delta\beta$ будут соответствовать значениям γ, определяемым из первого уравнения системы (278), которое при $\beta=0$ принимает вид

$$\cos^2\gamma-\cos\gamma=0.$$

Решая последнее уравнение, находим

$$\cos\gamma=0;\ \cos\gamma=1,$$

следовательно,

$$\gamma=\frac{\pi}{2};\quad\gamma=0.$$

В первом случае, когда $\gamma=0$, ошибка $\Delta\beta$ отсутствует. Во втором случае, когда $\gamma=\frac{\pi}{2}$, определение кардановой ошибки при измерении угла тангажа β теряет смысл. Действительно, при

этом условии наружная O_1C_1 и главная O_1A_1 оси гироскопа совместятся между собой (рис. 98) и он перестанет выполнять свои функции (см. § 8).

Для выяснения характера изменений кардановой ошибки $\Delta\beta$ при промежуточных значениях угла крена $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ в пределах изменения угла тангажа β от нуля до $\frac{\pi}{2}$ по второму уравнению (276) построим семейство кривых $\Delta\beta$ (β, γ). Анализ графиков (рис. 97) показывает, что с увеличением угла крена γ карданова ошибка $\Delta\beta$ возрастает, причем ее максимальное значение смещается к оси ординат.

Рис. 98. Совмещение осей подвеса гироскопа при угле крена объекта $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Из третьего равенства выражений (276) определим частные производные $\Delta\gamma$ по переменным β и γ и приравняем их нулю. Дифференцируя, находим

$$\frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \beta} = \frac{\sin\beta \sin\gamma}{\sqrt{1 - \cos^2\beta \sin^2\gamma}} = 0;$$

$$\frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \gamma} = 1 - \frac{\cos\beta \cos\gamma}{\sqrt{1 - \cos^2\beta \sin^2\gamma}} = 0,$$

откуда следует

$$\sin\beta \sin\gamma = 0;$$

$$\sqrt{1 - \cos^2\beta \sin^2\gamma} - \cos\beta\cos\gamma = 0.$$

Возводя последнее равенство в квадрат и производя элементарные преобразования, получим

$$\left.\begin{aligned} \sin\beta \sin\gamma &= 0; \\ \cos^2\beta &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{279}$$

Выражения (279) показывают, что частные производные первого порядка функции $\Delta\gamma$ (β, γ) обращаются в нуль при $\beta = 0$ и любом значении γ. Следовательно, карданова ошибка $\Delta\gamma$ измерения угла крена в этих случаях будет отсутствовать и функция $\Delta\gamma$ $(\beta = 0, \gamma)$ представит на графике прямую линию (рис. 99).

Для характеристики изменения ошибки $\Delta\gamma$ при значениях β, отличных от нуля, на график нанесены также найденные из третьего уравнения (276) кривые зависимости $\Delta\gamma$ и γ для разных β. Как видим, карданова ошибка $\Delta\gamma$ при измерении угла крена монотонно возрастает с увеличением β и γ.

Описанный метод исследования позволяет вычислить кардановы ошибки при измерении углов поворота объектов с помощью астатических гироскопов для каждого конкретного случая.

Пример 22. Объект совершает эволюцию по курсу при углах тангажа $\beta = 20°$ и крена $\gamma = 30°$. Определить максимальную карданову ошибку $\Delta\alpha$ при измерении угла рыскания и значение угла рыскания, при котором $\Delta\alpha$ становится максимальной.

Подставив заданные значения углов β и γ в первое уравнение (277), будем иметь

$$1 + \left(\operatorname{ctg}\alpha \frac{\cos\gamma}{\cos\beta} + \operatorname{tg}\beta \sin\gamma\right)^2 - \frac{\cos\gamma}{\cos\beta \sin^2\alpha} =$$

$$= 1 + \left(\operatorname{ctg}\alpha \frac{\cos 30°}{\cos 20°} + \operatorname{tg} 20° \sin 30°\right)^2 - \frac{\cos 30°}{\cos 20° \sin^2\alpha} =$$

$$= 1 + (0{,}92 \operatorname{ctg}\alpha + 0{,}182)^2 - \frac{0{,}92}{\sin^2\alpha} = 0.$$

Производя преобразования

$$\sin^2\alpha + 0{,}846\,(1 - \sin^2\alpha) + 0{,}335 \sin\alpha\cos\alpha + 0{,}033 \sin^2\alpha - 0{,}92 = 0,$$

получим

$$0{,}187 \sin^2\alpha - 0{,}074 = -0{,}335 \sin\alpha\cos\alpha.$$

Возводя последнее уравнение в квадрат, приходим к биквадратному уравнению

$$0{,}035 \sin^4\alpha - 0{,}028 \sin^2\alpha + 0{,}005 = 0{,}112 \sin^2\alpha\,(1 - \sin^2\alpha)$$

или

$$0{,}147 \sin^4\alpha - 0{,}14 \sin^2\alpha + 0{,}005 = 0.$$

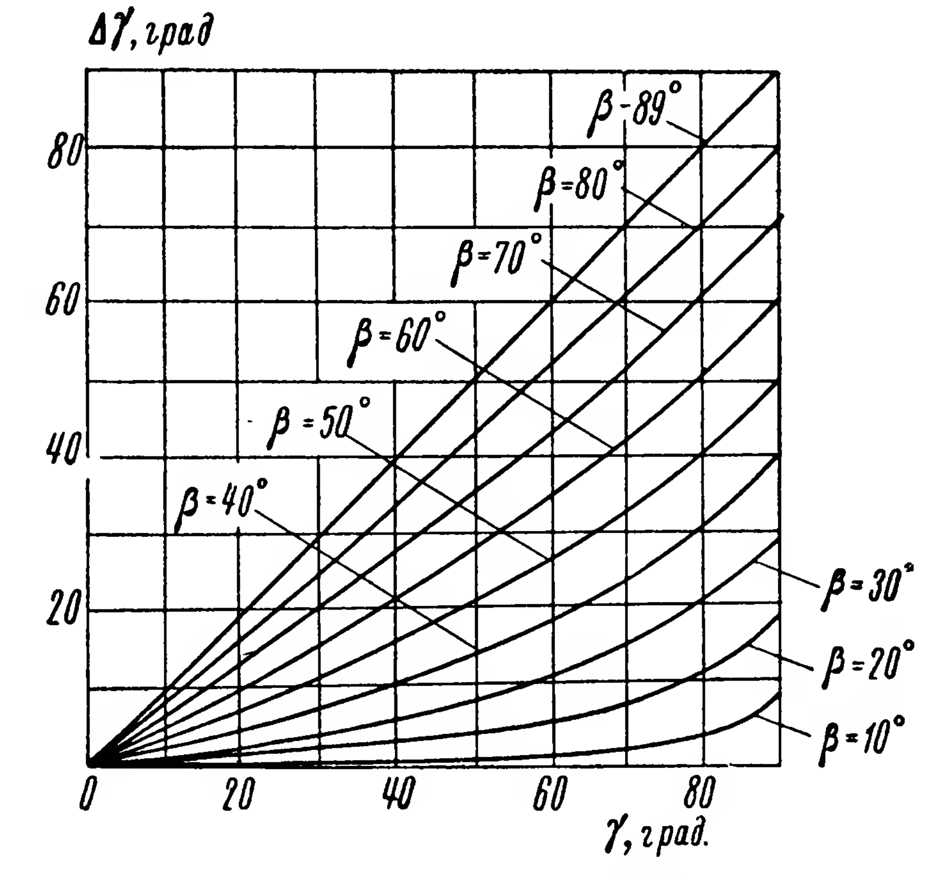


Рис. 99. Графики кардановой ошибки при измерении угла крена.

Решив полученное уравнение, найдем

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{0{,}14 \pm \sqrt{0{,}0196 - 0{,}003}}{0{,}294}},$$

откуда

$$\sin\alpha_1 = 0{,}956; \qquad \sin\alpha_2 = -0{,}956;$$

$$\sin\alpha_3 = 0{,}193; \qquad \sin\alpha_4 = -0{,}193,$$

и, следовательно,

$$\alpha_1 = 72°\,50'; \qquad \alpha_2 = -72°\,50' = 287°\,10';$$

$$\alpha_3 = 11°\,10'; \qquad \alpha_4 = -11°\,10' = 348°\,50'.$$

Для определения величины кардановой ошибки при вычисленных значениях угла рысканья воспользуемся первым выражением (276). Подставив численные значения входящих в него величин, будем иметь

$$\Delta\alpha_1 = 72°50' - \text{arc ctg}\left(\text{ctg}\, 72°50' \frac{\cos 30°}{\cos 20°} + \text{tg}\, 20° \sin 30°\right) =$$

$$= 72°50' - \text{arc ctg}\,(0{,}4662) = 72°50' - 65°00' = 7°50';$$

$$\Delta\alpha_2 = -7°50';$$

$$\Delta\alpha_3 = 11°10' - \text{arc ctg}\left(\text{ctg}\, 11°10' \frac{\cos 30°}{\cos 20°} + \text{tg}\, 20° \sin 30°\right) =$$

$$= 11°10' - \text{arc ctg}\,(4{,}915) = 11°10' - 11°30' = -0°20';$$

$$\Delta\alpha_4 = 0°\,20'.$$

§ 45. УСТАНОВКА АСТАТИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА ПО ЗЕМНЫМ ОРИЕНТИРАМ

В целом ряде случаев до включения в систему автоматического управления объектом астатические гироскопы должны быть вполне определенным образом установлены по отношению к плоскостям горизонта и меридиана. Такое требование обязательно для описанных выше гироскопических приборов вертикант (рис. 82) и горизонт (рис. 83). Для обеспечения движения ракеты-носителя по заданной траектории необходимо еще до старта наружную ось O_1C_1 вертиканта (рис. 100) и главную ось O_2A_2 горизонта точно совместить и с плоскостью полета $\xi_п D\zeta$ и с горизонтальной плоскостью $\xi_п D\,\eta_п$. В свою очередь главную ось O_1A_1 вертиканта и наружную ось O_2C_2 горизонта нужно расположить параллельно оси $D\eta_п$. Тем самым внутренние оси O_1B_1 и O_2B_2 обоих гироскопов направления должны быть совмещены с вертикалью $D\zeta$.

Из анализа схемы (рис. 100) следует, что перечисленные требования будут выполнены, если плоскости $C_1O_1B_1$ и $C_2O_2B_2$ наружных колец обоих гироскопов будут совмещены с вертикальными плоскостями $\xi_п D\zeta$ и $\eta_п D\zeta$, а плоскости $A_1O_1B_1$ и $A_2O_2B_2$ внутренних колец подвеса будут перпендикулярны им. Для автоматического осуществления такой установки астатических гироскопов по земным ориентирам применяются специальные устройства, получившие название корректирующих.

Корректирующее устройство, удерживающее наружное кольцо гироскопа в вертикальной плоскости, а внутреннее — перпендикулярно ему, показано на рис. 101. Для выполнения первой задачи на наружном кардановом кольце *НК* устанавливается маятник L, имеющий свободу вращения вокруг оси C^*C^*, параллельной наружной оси OC подвеса гироскопа. В силу своей природы (см. § 2), маятник L при отсутствии внешних возмущений будет сохранять отвесное положение. Поэтому при любом отклонении

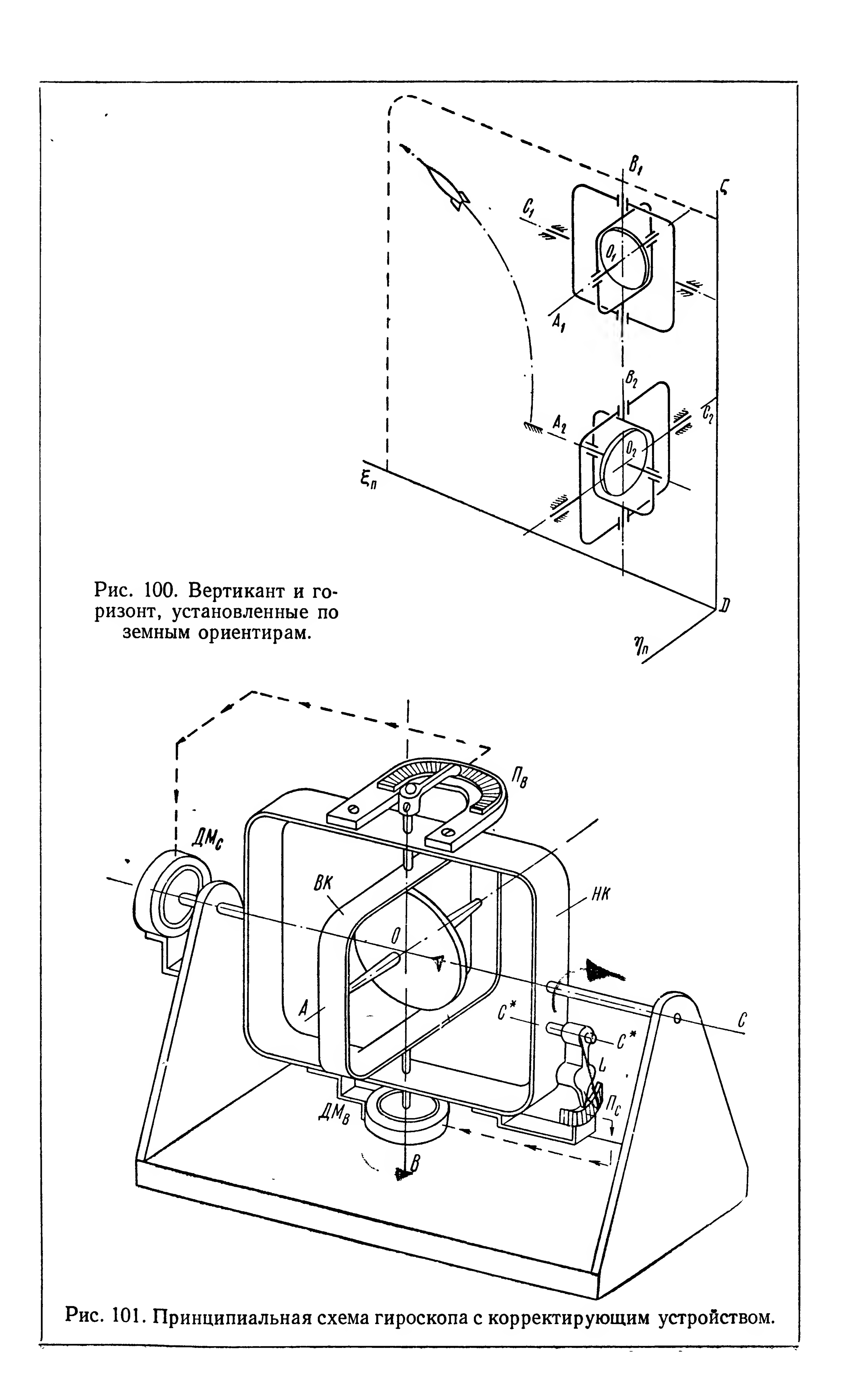


Рис. 100. Вертикант и горизонт, установленные по земным ориентирам.

Рис. 101. Принципиальная схема гироскопа с корректирующим устройством.

наружного кольца *НК* гироскопа от вертикальной плоскости между кольцом *НК* и маятником *L* будет возникать угол рассогласования. Его величина будет равна углу отклонения гироскопа от вертикальной плоскости. Как видим, маятник *L* позволяет измерять угол отклонения гироскопа от задаваемого ему положения, в связи с чем такой маятник часто называют измерительным органом корректирующего устройства или просто измерителем.

Чтобы определить угол отклонения гироскопа от вертикальной плоскости, на его наружном кольце *НК* крепится потенциометр $П_C$, по обмотке которого может перемещаться движок, неподвижно укрепленный на маятнике *L*. При отклонении кольца *НК* от вертикальной плоскости маятник *L*, сохраняющий отвесное положение, переместит движок по обмотке потенциометра $П_C$. При этом движок маятника сместится с нулевой точки потенциометра $П_C$, вследствие чего с его обмотки будет снят электрической сигнал, пропорциональный углу поворота наружного кольца *НК* вокруг оси *ОС* по отношению к вертикальной плоскости. Этот сигнал подается на механизм $ДМ_B$, представляющий собой либо электродвигатель, либо электромагнит, либо какое-нибудь другое устройство, позволяющее создавать реверсируемый момент внешних сил относительно оси подвеса гироскопа. Такое устройство называют обычно датчиком моментов. Устройство, позволяющее определять углы отклонения гироскопа от того или иного положения, принято называть датчиком угла.

Как только сигнал, снимаемый с потенциометра $П_C$, поступит на датчик моментов $ДМ_B$, сразу же на гироскоп относительно его внутренней оси подвеса *ОВ* начнет действовать корректирующий момент. Величина этого момента в данной схеме пропорциональна углу рассогласования, а его направление выбирается таким образом, чтобы вызываемое им прецессионное движение гироскопа приводило к устранению возникшего рассогласования. Таким образом, прецессируя вокруг оси *ОС*, гироскоп будет восстанавливать вертикальное положение своего наружного кольца *НК*. Вместе с кольцом *НК* будет поворачиваться вокруг оси *ОС* и жестко с ним соединенная обмотка потенциометра $П_C$, нулевая точка которого начнет приближаться к совмещению с движком маятника *L*.

В то мгновение, когда наружное кольцо *НК* возвратится к вертикальному положению, движок совместится с нулевой точкой потенциометра $П_C$. Снимаемый с него ток станет равным нулю, и корректирующий момент перестанет действовать на гироскоп относительно его внутренней оси подвеса *ОВ*. Прецессия гироскопа вокруг оси *ОС* прекратится, и его наружное кольцо *НК* останется совмещенным с вертикальной плоскостью. Тем самым главная ось *ОА* гироскопа будет приведена в плоскость горизонта. Если в силу каких-либо причин произойдет новое отклонение гироскопа от плоскости горизонта, описанный процесс повторится вновь,

Чтобы сохранить перпендикулярность между кардановыми кольцами $НК$ и $ВК$, на оси подвеса $ОВ$ внутреннего кольца $ВК$ установлен движок, а на наружном $НК$ — обмотка потенциометра $П_В$. При нарушении перпендикулярности между кольцами, что может произойти лишь в результате поворота внутреннего кольца $ВК$ вокруг оси $ОВ$ по отношению к наружному $НК$, движок потенциометра $П_В$ сместится с нулевой точки его обмотки и с потенциометра будет снят сигнал, пропорциональный углу рассматриваемого поворота гироскопа.

Подавая снимаемый с потенциометра $П_В$ сигнал на датчик момента $ДМ_С$, создают корректирующий момент, действующий на гироскоп относительно наружной оси подвеса $ОС$. Направление действия этого момента выбирается таким образом, чтобы вызываемое им прецессионное движение приводило к восстановлению перпендикулярности между кардановыми кольцами гироскопа.

Зависимость величины корректирующего момента от угла отклонения гироскопа относительно той или иной плоскости может быть не только пропорциональной. В гироскопических приборах используются также релейные и смешанные характеристики коррекции. Каждая из них вносит свою специфику в движение гироскопа к корректируемому положению.

§ 46. ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ПОЛЮСА ГИРОСКОПА К КОРРЕКТИРУЕМОМУ ПОЛОЖЕНИЮ

В целях выяснения характера движения гироскопа под действием корректирующих моментов обратимся вновь к системе уравнений (162), описывающих движение гироскопа в подвижной системе координат. Так как в рассматриваемом случае сохраняется перпендикулярность между кардановыми кольцами, то угол ϑ_0 остается близким нулю, в связи с чем система уравнений (162), если пренебречь величиной $\omega_D\vartheta$, принимает вид

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\left(\dot{\psi} + \omega_C\right) = M_B; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\left(\dot{\vartheta} + \omega_B\right) = M_C. \end{aligned}\right\} \qquad (280)$$

Для определения действующих на гироскоп моментов внешних сил составим кинематическую схему (рис. 102), соответствующую рассматриваемому гироскопическому устройству (рис. 101).

Согласно выбранной ранее (рис. 30) ориентации координатных осей ось Ox системы координат $Oxyz$, неизменно связанной с внутренним кардановым кольцом, будет совмещена с главной осью OA гироскопа и направлена на читателя (рис. 102), ось Oy совмещена с внутренней осью подвеса OB и направлена вниз и, наконец, ось Oz расположена перпендикулярно к осям Ox и Oy.

Если при таком расположении системы координат $Oxyz$ гироскоп повернется вокруг наружной оси подвеса OC на угол ψ в по-

ложительном направлении, корректирующий момент $M_{кB}$, создаваемый датчиком моментов $ДМ_B$, для устранения возникшего поворота, согласно основному закону прецессии (см. § 8), должен быть направлен в сторону отрицательных значений оси Oy. При повороте гироскопа вокруг внутренней оси подвеса OB в положительном направлении на угол ϑ корректирующий момент $M_{кC}$ будет создан датчиком моментов $ДМ_C$. На основании того же закона прецессии для ликвидации возникшего поворота гироскопа вокруг оси OB вектор момента $M_{кC}$ должен быть совмещен с положительным направлением оси OC.

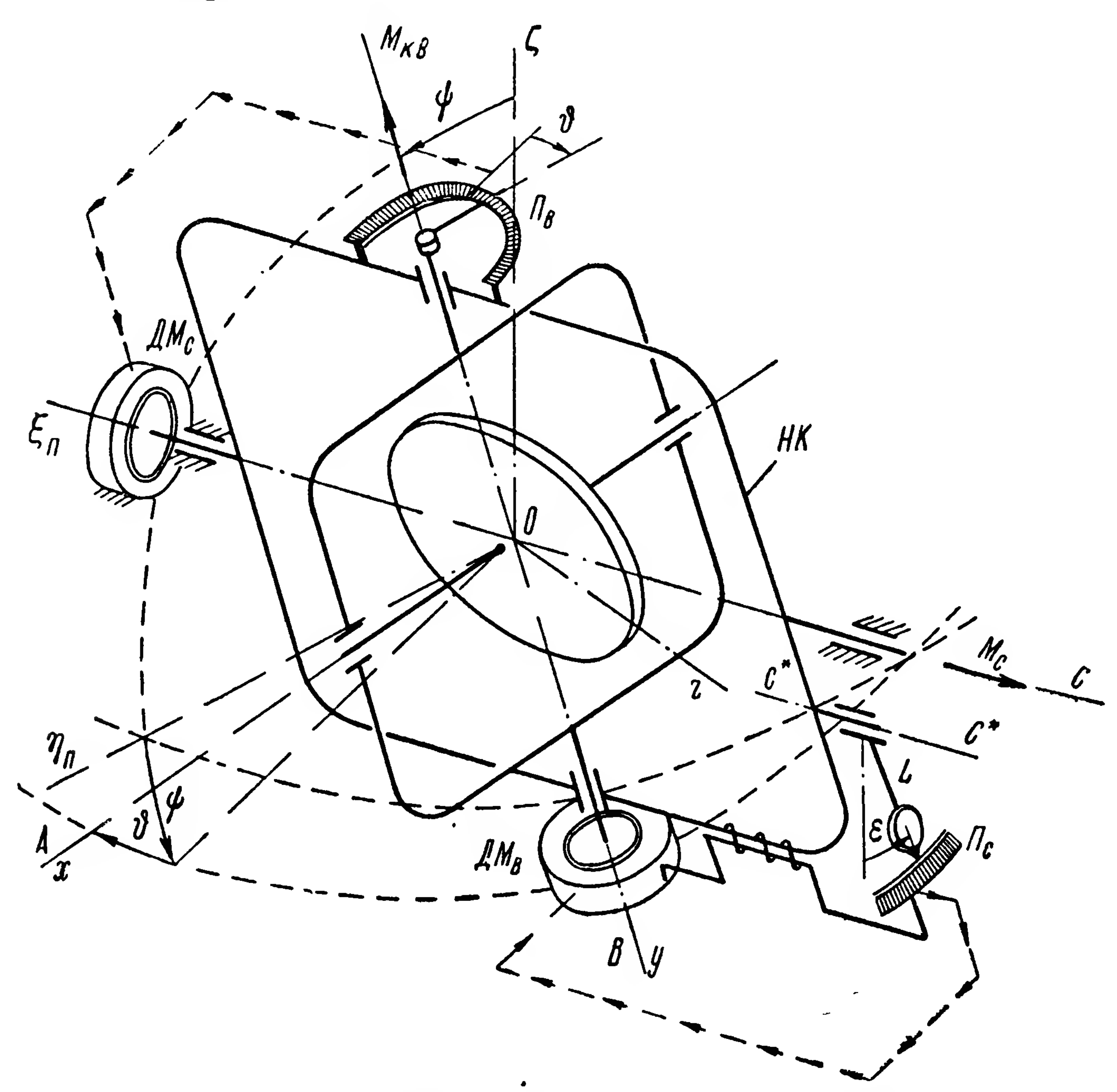


Рис. 102. Кинематическая схема корректируемого гироскопа.

Выше уже говорилось, что величины корректирующих моментов $M_{кC}$ и $M_{кB}$ соответственно пропорциональны углу ϑ поворота гироскопа вокруг оси OB и углу рассогласования между маятником L и наружным кольцом $НК$. Так как маятник под действием возмущающих факторов может отклоняться от вертикальной плоскости $\xi_п O\zeta$ на угол ε, то значения корректирующих моментов в рассматриваемом случае могут быть выражены следующими равенствами:

$$M_{кB} = -K_B(\psi - \varepsilon); \quad M_{кC} = K_C\vartheta,$$

где K_B и K_C — коэффициенты пропорциональности корректирующих моментов соответственно углу поворота ϑ и углу рассогласования $(\psi - \varepsilon)$.

Учитывая в системе уравнений (280) найденные значения корректирующих моментов и моменты сил сухого трения, возникающие в опорах подвеса, в соответствии с зависимостью (208) можем записать

$$\left. \begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\left(\dot{\psi} + \omega_C\right) &= -K_B(\psi - \varepsilon) - M_{0\text{т}B}\,\mathrm{sign}\,\dot{\vartheta}; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\left(\dot{\vartheta} + \omega_B\right) &= K_C\vartheta - M_{0\text{т}C}\,\mathrm{sign}\,\dot{\psi}. \end{aligned} \right\} \quad (281)$$

Для решения системы (281) необходимо знать закон изменения с течением времени угла ε. Обратимся с этой целью к уравнению (4), описывающему движение маятника. Будем полагать, что действующие на маятник моменты внешних сил вызываются лишь силами трения в опоре его подвеса. При этом условии уравнение (4) принимает вид

$$J_\text{и}\ddot{\varepsilon} + K_\text{и}\varepsilon = -M_{0\text{т.\,и}}\,\mathrm{sign}\,\dot{\varepsilon}.$$

Подставив приведенное уравнение маятника в уравнения (281), будем иметь

$$\left. \begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\left(\dot{\psi} + \omega_C\right) &= -K_B(\psi - \varepsilon) - M_{0\text{т}B}\,\mathrm{sign}\,\dot{\vartheta}; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\left(\dot{\vartheta} + \omega_B\right) &= K_C\vartheta - M_{0\text{т}C}\,\mathrm{sign}\,\dot{\psi}; \\ J_\text{и}\ddot{\varepsilon} + K_\text{и}\varepsilon &= -M_{0\text{т.\,и}}\,\mathrm{sign}\,\dot{\varepsilon}. \end{aligned} \right\} \quad (282)$$

В связи с тем, что в рассматриваемом случае исследуется характер движения гироскопа к вполне определенному положению равновесия, вычислим угол застоя, на который маятник-измеритель может не дойти до совмещения с вертикалью. Этот угол будет определяться частным решением третьего уравнения системы (282)

$$\varepsilon_r = \pm \frac{M_{0\text{т.\,и}}}{K_\text{и}}.$$

Подставляя в первое уравнение (282) вместо ε найденное значение ε_r и спуская члены, характеризующие нутационные колебания гироскопа, приходим к двум уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} + \frac{K_B}{J\Omega}\psi &= -\omega_C \pm \frac{K_B M_{0\text{т.\,и}}}{K_\text{и} J\Omega} - \frac{M_{0\text{т}B}}{J\Omega}\,\mathrm{sign}\,\dot{\vartheta}; \\ \dot{\vartheta} + \frac{K_C}{J\Omega}\vartheta &= -\omega_B + \frac{M_{0\text{т}C}}{J\Omega}\,\mathrm{sign}\,\dot{\psi}, \end{aligned} \right\} \quad (283)$$

решение которых позволяет выявить характер исследуемого движения гироскопа.

Для большей наглядности анализа уравнений (283) выберем, следуя проф. Б. В. Булгакову [4, стр. 57], на положительном направлении главной оси гироскопа произвольную точку и назовем ее, как и выше (§ 14). полюсом, Представим себе, что в начальный момент времени главная ось OA гироскопа (рис. 102) отклонена

от оси $O\eta_п$ на положительные углы $\vartheta(0) = \vartheta_н$ и $\psi(0) = \psi_н$. При таком расположении гироскопа относительно осей координат $O\xi_п\eta_п\zeta$ его полюс будет проектироваться на картинную плоскость в точку W (рис. 103), координаты которой в системе $O^*\vartheta\psi$ при малых значениях углов ϑ и ψ будут определяться непосредственно величинами $\vartheta_н$ и $\psi_н$. Вполне очевидно, что проекция полюса гироскопа на картинную плоскость не будет неизменно совмещена с точкой W. Вследствие наличия корректирующего устройства главная ось гироскопа начнет возвращаться к совмещению с осью $O\eta_п$ (рис. 102). При этом углы ϑ и ψ начнут уменьшаться (рис. 103) и, следовательно, угловые скорости $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\psi}$ будут отрицательны.

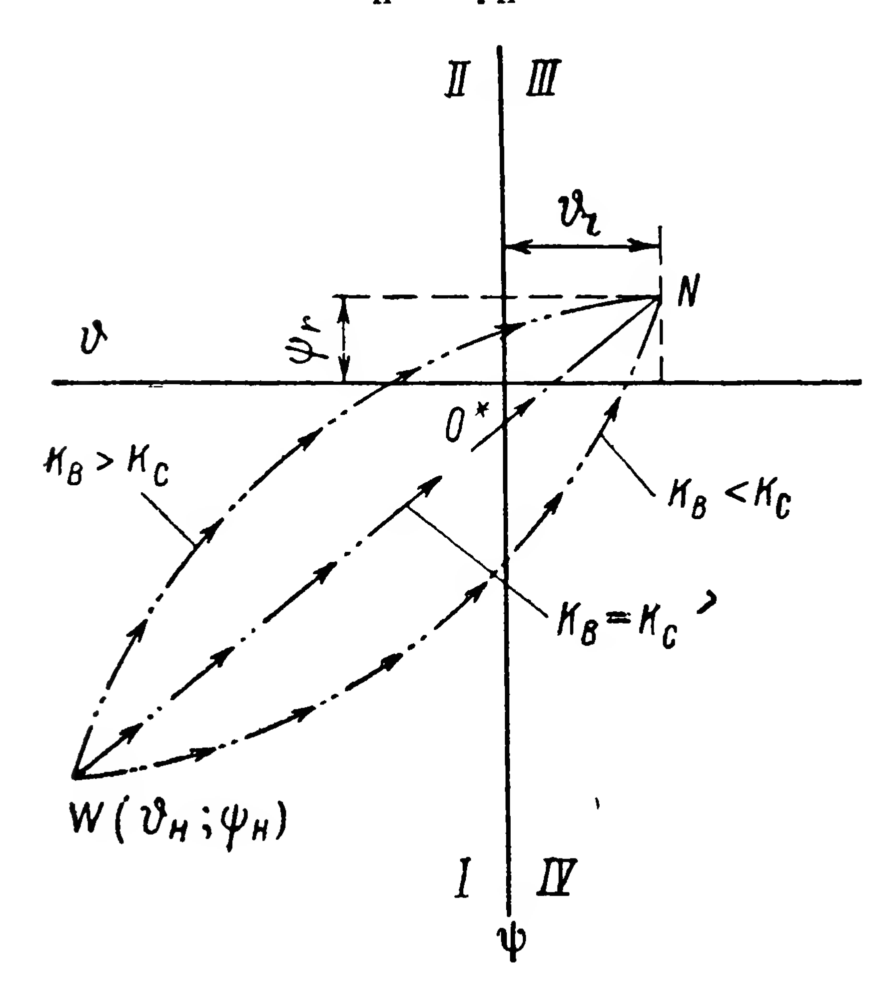


Рис. 103. Траектории движения полюса гироскопа к положению равновесия.

Учитывая в (283), что $\dot{\vartheta} < 0$ и $\dot{\psi} < 0$, получим дифференциальные уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\psi} + \frac{K_B}{J\Omega}\psi = -\omega_C \pm \frac{K_B M_{0\,т.\,и}}{K_и J\Omega} + \frac{M_{0\,т\,B}}{J\Omega}; \\ &\dot{\vartheta} + \frac{K_C}{J\Omega}\vartheta = -\omega_B - \frac{M_{0\,т\,C}}{J\Omega}, \end{aligned}\right\} \qquad (284)$$

которые и будут описывать движение гироскопа к совмещению своей главной оси OA с осью $O\eta_п$ (рис. 102) в том случае, когда отклонение полюса гироскопа от начала координатной системы $O^*\vartheta\psi$ (рис. 103) будет находиться в первом квадранте.

Уравнения (284) будут иметь частные решения

$$\left.\begin{aligned} &\psi_r = -\frac{J\Omega\omega_C - M_{0\,т\,B}}{K_B} \pm \frac{M_{0\,т.\,и}}{K_и}, \\ &\vartheta_r = -\frac{J\Omega\omega_B + M_{0\,т\,C}}{K_C}, \end{aligned}\right\} \qquad (285)$$

характеризующие равновесное положение гироскопа.

Как видим, положение равновесия не совпадает точно с осью $O\eta_п$, а составляет с нею углы ϑ_r и ψ_r. Из решения соответствующих однородных уравнений

$$\dot{\psi} + \frac{K_B}{J\Omega}\psi = 0; \quad \dot{\vartheta} + \frac{K_C}{J\Omega}\vartheta = 0$$

следует, что к указанному положению равновесия гироскоп будет приближаться асимптотически:

$$\psi_р = C_1 e^{-\frac{K_B}{J\Omega}t}; \quad \vartheta_р = C_2 e^{-\frac{K_C}{J\Omega}t}. \qquad (286)$$

Таким образом, общие решения уравнений (284) будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \psi &= C_1 e^{-\frac{K_B}{J\Omega}t} - \frac{J\Omega\omega_C - M_{0\,т\,B}}{K_B} \pm \frac{M_{0\,т.\,и}}{K_и}; \\ \vartheta &= C_2 e^{-\frac{K_C}{J\Omega}t} - \frac{J\Omega\omega_B + M_{0\,т.\,C}}{K_C}. \end{aligned}\right\} \qquad (287)$$

При начальных условиях $\psi(0) = \psi_н$, $\vartheta(0) = \vartheta_н$ постоянные интегрирования C_1 и C_2 будут равны

$$C_1 = \psi_н + \frac{J\Omega\omega_C - M_{0\,т\,B}}{K_B} \pm \frac{M_{0\,т.\,и}}{K_и};$$

$$C_2 = \vartheta_н + \frac{J\Omega\omega_B + M_{0\,т\,C}}{K_C},$$

или, учитывая (285),

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \psi_н + \psi_r = \psi_н^*; \\ C_2 &= \vartheta_н + \vartheta_r = \vartheta_н^*. \end{aligned}\right\} \qquad (288)$$

Для выяснения характера траекторий движения полюса гироскопа к положению равновесия обратимся к выражениям (287), которые, учитывая (288), перепишем в виде

$$\psi = \psi_н^* e^{-\frac{K_B}{J\Omega}t};$$

$$\vartheta = \vartheta_н^* e^{-\frac{K_C}{J\Omega}t},$$

откуда

$$\frac{\psi}{\psi_н^*} = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_н^*}\right)^{\frac{K_B}{K_C}}. \qquad (289)$$

Отношение (289) показывает, что при равенстве коэффициентов K_B и K_C движение полюса гироскопа на картинной плоскости из любого начального положения W к точке N, характеризующей положение равновесия гироскопа, происходит по прямой линии. В случае неодинаковой эффективности корректирующих моментов,

когда $K_B \neq K_C$, траектории движения полюса гироскопа к совмещению с точкой N равновесного положения будут отличны от прямой линии. Они получат характерный изгиб либо в сторону оси $O^*\psi$ при $K_B < K_C$, либо в сторону оси $O^*\vartheta$ при $K_B > K_C$.

Положение равновесия, определяемое из (285), будет зависеть от того, в каком квадранте находится полюс гироскопа в начальный момент времени. Анализ выражений (285) показывает, что

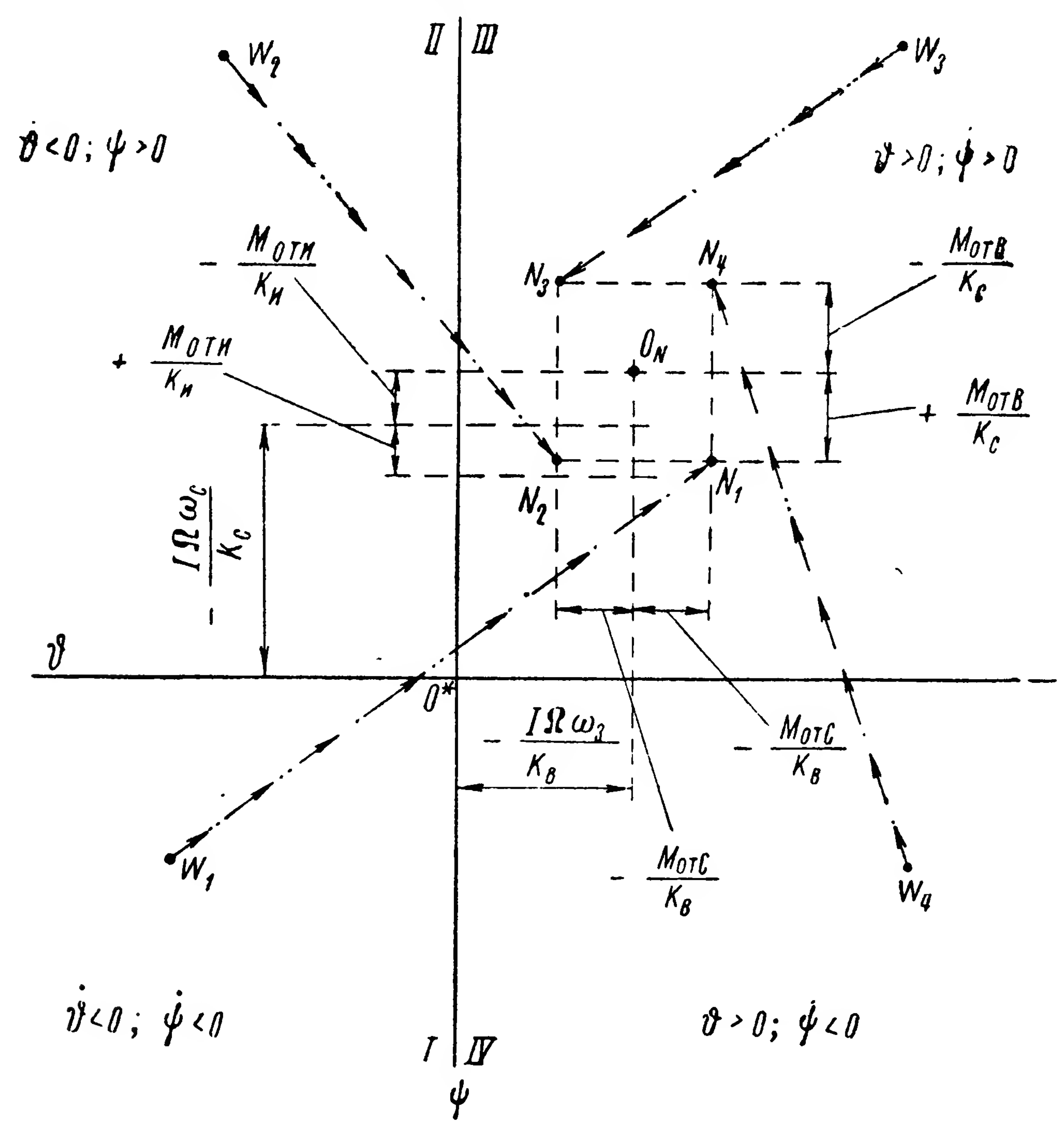


Рис. 104. Положение на картинной плоскости точки, характеризующей равновесное положение корректируемого гироскопа.

точка N изменяет свое положение на картинной плоскости в зависимости от направления действия моментов сил трения $M_{0\,т.\,и}$, $M_{0\,т\,B}$ и $M_{0\,т\,C}$. Знак момента $M_{0т.\,и}$ определяется направлением той угловой скорости, с которой маятник-измеритель будет перемещаться по отношению к наружному карданову кольцу при совмещении с положением равновесия. Так как направление указанной угловой скорости зависит от многих факторов, то естественно, что направление действия момента $M_{0\,т.\,и}$ будет носить случайный характер. Таким образом, влияние момента сил трения $M_{0\,т.\,и}$ будет вызывать перемещение точки N вдоль оси ординат $O^*\psi$ (рис. 104) на величину $\pm \frac{M_{0\,т.\,и}}{K_и}$.

В свою очередь направления действия моментов сил трения $M_{0тB}$ и $M_{0тC}$ в опорах подвеса гироскопа будут зависеть от направления движения полюса гироскопа. При движении полюса гироскопа к совмещению с положением равновесия из первого квадранта обе угловые скорости $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\psi}$ будут отрицательны и, следовательно, моменты сил трения $M_{0тB}$ и $M_{0тC}$ положительны. Таким образом, при отрицательном значении угла застоя маятника $\varepsilon_r = -\frac{M_{0т.и}}{K_и}$ полюс гироскопа из точки W_1, расположенной на картинной плоскости в первом квадранте, придет к совмещению с точкой N_1.

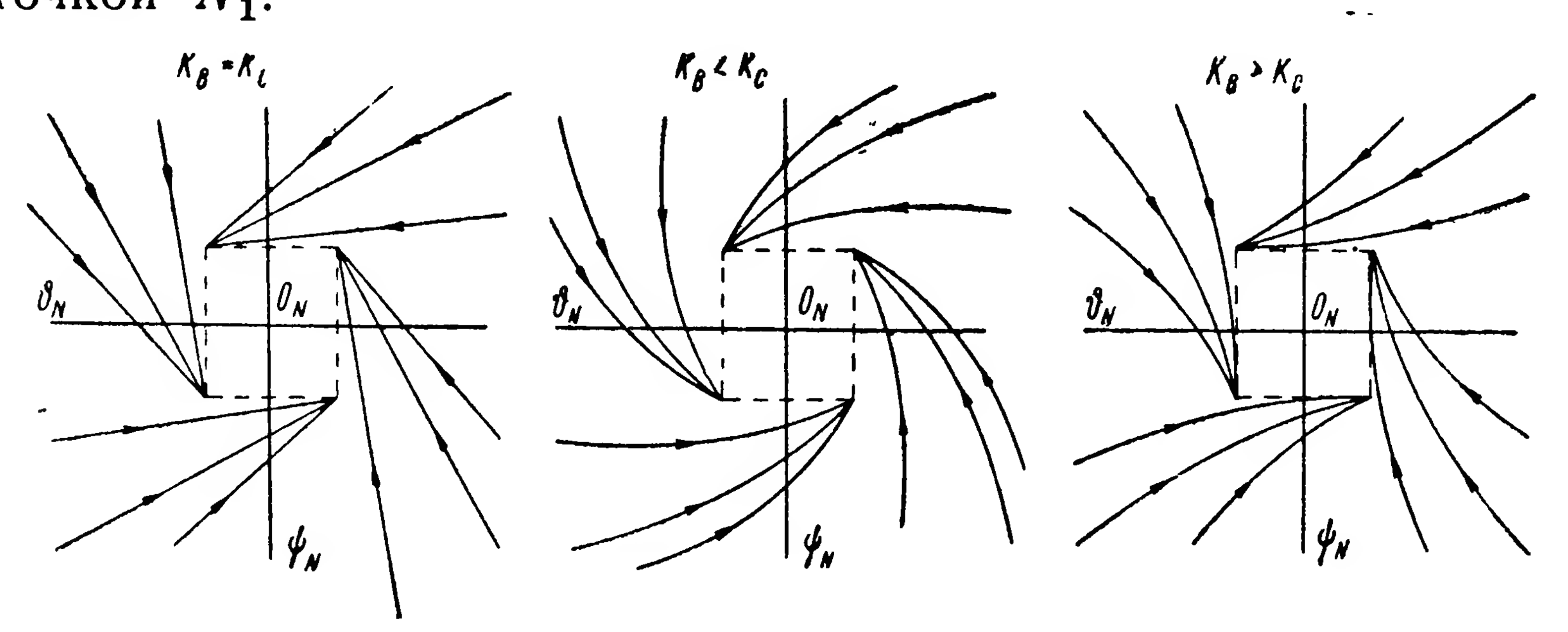


Рис. 105. Спектры траекторий полюса гироскопа.

При движении полюса гироскопа из точки W_2, расположенной во втором квадранте, угловые скорости движения гироскопа $\dot{\vartheta} < 0$ и $\dot{\psi} > 0$ и, следовательно $M_{0тB} > 0$ и $M_{0тC} < 0$. Указанные условия и вызовут приход полюса гироскопа к совмещению с точкой N_2. Движение полюса гироскопа из третьего квадранта будет характеризоваться угловыми скоростями $\dot{\vartheta} > 0$ и $\dot{\psi} > 0$ и соответственно моментами сил трения $M_{0тB} < 0$, $M_{0тC} < 0$. Поэтому, двигаясь из точки W_3, полюс гироскопа придет к совмещению с точкой N_3.

Из четвертого квадранта полюс гироскопа будет двигаться с угловыми скоростями $\dot{\vartheta} > 0$ и $\dot{\psi} < 0$, что обусловит действие на гироскоп моментов сил трения $M_{0тB} < 0$ и $M_{0тC} > 0$. В результате полюс гироскопа, двигаясь из точки W_4, придет к совмещению с точкой N_4.

Как видим, моменты сил трения в опорах подвеса изменяют положение равновесия корректируемого гироскопа, перемещая точку N на картинной плоскости относительно точки O_N, координаты которой в системе $O^*\vartheta\psi$ зависят от угловых скоростей ω_B и ω_C основания прибора и угла застоя маятника. Спектры траекторий движения полюса гироскопа к совмещению с положением равновесия в зависимости от отношения между K_B и K_C показаны на рис. 105. На рисунке начало координат совмещено с точкой O_N.

Пример 23. Астатический гироскоп, снабженный корректирующим устройством (рис. 102), предназначен для стабилизации своей главной оси в плоскости горизонта. Наружная ось подвеса гироскопа горизонтальна и совмещена с вертикальной плоскостью движения объекта, составляющей с плоскостью меридиана угол $\alpha = 150°$. Определить точность установки главной оси гироскопа в требуемом положении, если его корпус установлен неподвижно на земной поверхности под широтой $\varphi = 50°$. Определить также характер движения полюса гироскопа к положению равновесия. Параметры гироскопа $J\Omega = 3200$ *Гсмсек*, $K_B = 140$ *Гсм/рад*, $K_C = 200$ *Гсм/рад*, $M_{0\,\text{т}B} = 0{,}2$ *Гсм*, $M_{0\,\text{т}\,C} = 0{,}4$ *Гсм*. Угол застоя маятника $\frac{M_{0\,\text{т.и}}}{K_\text{и}} = \pm 1$ угл. мин. Угловая скорость $\dot{\varepsilon}$ при подходе маятника к положению вертикали отрицательна. Начальные углы отклонения главной оси гироскопа от корректируемого направления $\psi_\text{н} = 5°$, $\vartheta_\text{н} = 4°$.

Для определения угловых скоростей ω_B и ω_C вращения основания прибора вокруг осей подвеса гироскопа воспользуемся схемой рис. 55. Спроектируем вектор угловой скорости $\Omega_з$ суточного вращения Земли на оси подвеса гироскопа Так как внутренняя ось подвеса в рассматриваемом случае (см. рис. 102) расположена вертикально, а наружная — горизонтально под углом α к плоскости меридиана, то искомые угловые скорости будут определяться из выражений

$$\omega_B = \Omega_з \sin\varphi; \qquad \omega_C = \Omega_з \cos\varphi \cos\alpha,$$

или, учитывая равенство (168) и значения углов φ и α,

$$\omega_B = 7{,}29\cdot 10^{-5} \sin 50° = 5{,}58\cdot 10^{-5}\ \text{сек.}^{-1};$$

$$\omega_C = 7{,}29\cdot 10^{-5} \cos 50° \cos 150° = -4{,}06\cdot 10^{-5}\ \text{сек.}^{-1}.$$

Для вычисления углов отклонения равновесного положения главной оси гироскопа от заданного направления воспользуемся формулами (285). Так как угловая скорость $\dot{\varepsilon} < 0$, то момент сил трения $M_{0\,\text{т.и}} > 0$. В то же время при $\vartheta_\text{н} > 0$ и $\psi_\text{н} > 0$ угловые скорости $\dot{\vartheta} < 0$ и $\dot{\psi} < 0$. Поэтому будем иметь

$$\psi_r = -\frac{J\Omega\omega_C - M_{0\,\text{т}B}}{K_B} + \frac{M_{0\,\text{т.и}}}{K_\text{и}};$$

$$\vartheta_r = -\frac{J\Omega\omega_B + M_{0\,\text{т}C}}{K_C}.$$

Подставив в полученные равенства значения входящих в них величин и выражая угол застоя маятника $\frac{M_{0\,\text{т.и}}}{K_\text{и}}$ в радианах, найдем

$$\psi_r = -\frac{-3200\cdot 4{,}06\cdot 10^{-5} - 0{,}2}{140} + \frac{1}{60\cdot 57{,}3} = 2{,}65\cdot 10^{-3}\ \text{рад.};$$

$$\vartheta_r = -\frac{3200\cdot 5{,}58\cdot 10^{-5} + 0{,}4}{200} = -2{,}89\cdot 10^{-3}\ \text{рад.}$$

или соответственно

$$\psi_r = 2{,}65\cdot 10^{-3}\cdot 57{,}3\cdot 60 = 9{,}2\ \text{угл. мин.};$$

$$\vartheta_r = -2{,}89\cdot 10^{-3}\cdot 57{,}3\cdot 60 = -9{,}95\ \text{угл. мин.}$$

Для выяснения характера траектории движения полюса гироскопа к положению равновесия определим по формулам (288) значения углов:

$$\psi_\text{н}^* = 5\cdot 60 + 9{,}2 = 309{,}20\ \text{угл. мин.};$$

$$\vartheta_\text{н}^* = 4\cdot 60 - 9{,}95 = 230{,}05\ \text{угл. мин.}$$

Учитывая значения коэффициентов K_B и K_C и углов $\vartheta_н^*$ и $\psi_н^*$, из (289) находим

$$\psi = 309{,}2\left(\frac{\vartheta}{230{,}05}\right)^{\frac{140}{200}},$$

или

$$\psi = 309{,}2\left(\frac{\vartheta}{230{,}05}\right)^{0{,}7}.$$

Пользуясь полученной зависимостью, зададим ϑ произвольные значения в пределах от $\vartheta_н^*$ до нуля и определим соответствующие им значения угла ψ:

ϑ, угл. мин.	230,05	180	120	60	0
ψ, угл. мин.	309,20	262	197,5	94,6	0

Анализируя результаты вычислений, убеждаемся в том, что траектория полюса в рассматриваемом случае будет обращена выпуклостью в сторону оси $O^*\psi$, как это и показано на рис. 103 для случая, когда $K_B < K_C$.

§ 47. ТОЧНОСТЬ ВЫДЕРЖИВАНИЯ АСТАТИЧЕСКИМ ГИРОСКОПОМ ЗАДАННОГО ПОЛОЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотренное в § 45 корректирующее устройство обеспечивает совмещение астатического гироскопа с заданным ему положением в системе координат, связанной с плоскостями горизонта и меридиана, только в процессе установки гироскопа по земным ориентирам. При старте ракеты-носителя корректирующее устройство выключается и гироскоп с этого мгновения продолжает работу, не воспринимая никакого воздействия корректирующих моментов. Тем самым с начального момента движения ракеты астатический гироскоп будет выдерживать приданное ему при старте положение стабильным теперь уже в инерциальном пространстве.

Чем с большей точностью гироскоп будет стабилизировать заданное ему положение в пространстве, тем с меньшими отклонениями от заранее намеченной траектории будет двигаться объект. Причины, порождающие систематический дрейф гироскопа, были подробно рассмотрены в предыдущих главах. В общем случае отклонение астатического гироскопа будет порождаться и моментами сил трения в опорах подвеса, и инертностью масс кардановых колец, и вращением основания прибора.

Силы трения в опорах подвеса (см. § 38) обусловливают угловые скорости дрейфа, равные согласно (257) и (258)

$$\dot\psi_1 = -\frac{M_{0\,т\,B}}{J\Omega\cos\vartheta_0}\left[1 - \tau_B(1+\nu)\right];$$

$$\dot\vartheta_1 = \frac{M_{0\,т\,C}}{J\Omega\cos\vartheta_0}\left[1 - \tau_C(1+\nu)\right].$$

Здесь коэффициенты τ_B и τ_C характеризуют отношения между продолжительностью действия на гироскоп моментов сил трения

в положительном и отрицательном направлениях относительно внутренней и наружной осей его подреса. Коэффициент ν характеризует отношение между средними значениями моментов сил сухого трения (см. рис. 77), возникающих при положительном и отрицательном направлениях вращения колец подшипников относительно друг друга.

Однако скорости $\dot{\psi}_1$ и $\dot{\vartheta}_1$, порождаемые силами трения в опорах подвеса, не будут единственными. Величина момента сил сухого трения в шариковых подшипниках (см. рис. 76) при повороте гироскопа вокруг оси подвеса даже на весьма малый угол может в течение бесконечно малого времени получить значительное приращение. Влияние такого изменения момента сил трения на гироскоп будет аналогично рассмотренному выше (§ 14) действию момента мгновенной силы, сообщающему гироскопу новые начальные угловые скорости $\dot{\vartheta}_н$ и $\dot{\psi}_н$, Возникающие при этом нутационные колебания гироскопа вызывают дрейф гироскопа с угловыми скоростями, определяемыми по выражениям (95):

$$\dot{\psi}_2 = \frac{J_B\dot{\vartheta}_н^2 + J_C\dot{\psi}_н^2}{2J\Omega\cos\vartheta_0}\left(\frac{J_н + J_{вx}}{J_C\cos\vartheta_0}\sin\vartheta_0 + \frac{J_D\dot{\psi}_н}{J\Omega\cos\vartheta_0}\cos 2\vartheta_0\right);$$

$$\dot{\vartheta}_2 = -\frac{\sqrt{J_B\dot{\vartheta}_н^2 + J_C\dot{\psi}_н^2}}{2J\Omega\cos\vartheta_0}\cdot\frac{J\dot{\vartheta}_н\sin 2\vartheta_0}{2\sqrt{J_C}}.$$

Наконец, при вращении основания прибора вокруг оси OD гироскопа (см. рис. 54) при отсутствии перпендикулярности между главной и наружной осями подвеса гироскопа ($\vartheta_0 \neq 0$) будет возникать систематический дрейф гироскопа вокруг его наружной оси с угловой скоростью, определяемой в соответствии с изложенным в § 26 выражением

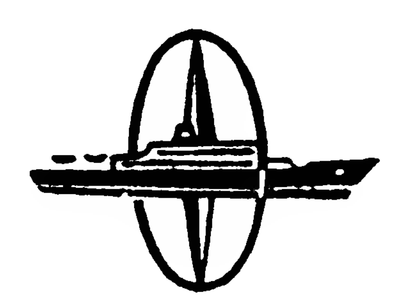
$$\dot{\psi}_3 = -\omega_D \operatorname{tg}\vartheta_0.$$

Таким образом, в общем случае систематическое отклонение астатического гироскопа от заданного ему в пространстве положения будет происходить с суммарными угловыми скоростями

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\psi}_д = &-\frac{M_{0\,т\,B}}{J\Omega\cos\vartheta_0}[1 - \tau_B(1+\nu)] + \\
&+\frac{J_B\dot{\vartheta}_н^2 + J_C\dot{\psi}_н^2}{2J\Omega\cos\vartheta_0}\left(\frac{J_н + J_{вx}}{J_C\cos\vartheta_0}\sin\vartheta_0 + \right.\\
&\left.+\frac{J_D\dot{\psi}_н}{J\Omega\cos\vartheta_0}\cos 2\vartheta_0\right) - \omega_D\operatorname{tg}\vartheta_0; \\
\dot{\vartheta}_д = &\frac{M_{0\,т\,C}}{J\Omega\cos\vartheta_0}[1 - \tau_C(1+\nu)] - \\
&-\frac{\sqrt{J_B\dot{\vartheta}_н^2 + J_C\dot{\psi}_н^2}}{2J\Omega\cos\vartheta_0}\,\frac{J\dot{\vartheta}_н\sin 2\vartheta_0}{2\sqrt{J_C}}.
\end{aligned}\right\} \quad (290)$$

В общем случае знаки перед отдельными членами выражений (290) зависят от начальных условий. Поэтому по формулам (290) можно определить лишь максимальные величины угловых скоростей дрейфа гироскопа, считая, что все их составляющие, порождаемые рассмотренными выше факторами, имеют одинаковый знак. Для более точного анализа возможных уходов астатического гироскопа приходится обращаться уже к вероятностным методам [36, 38].

Кроме того, необходимо иметь в виду, что на систематическое отклонение астатического гироскопа от первоначального положения в пространстве будут оказывать влияние как конструктивные, так и технологические ошибки, допущенные в процессе проектирования и изготовления прибора. Эти ошибки имеют общий характер для всех гироскопических приборов независимо от их назначения. Влияние указанных конструктивных и технологических погрешностей на точность работы гироскопа будет рассмотрено в разделе, посвященном проектированию гироскопических приборов.



Глава VII

ГИРОСКОП НАПРАВЛЕНИЯ

§ 48. ПРИНЦИП УСТРОЙСТВА ГИРОСКОПА НАПРАВЛЕНИЯ

При движении по заданной траектории положение объекта весьма часто определяют не по отношению к неподвижному в инерциальном пространстве направлению, а по отношению к земным ориентирам. Так, при перемещениях объектов по земной поверхности или в непосредственной близости от нее, например корабля в открытом море или летательного аппарата в земной атмосфере, наиболее рационально ориентировать их по плоскостям горизонта и меридиана.

В тех случаях, когда отсутствует возможность визирования земных ориентиров, характеризующих положение плоскостей горизонта и меридиана, для обеспечения движения объектов по заданной траектории широко используются гироскопические приборы. В частности, для выдерживания объекта под заданным курсом к плоскости меридиана может быть использован гироскоп с тремя степенями свободы.

Представим, что на корабле установлен гироскоп с тремя степенями свободы так, что его наружная ось подвеса OC расположена перпендикулярно палубе (рис. 106). В процессе движения корабля при отсутствии качки ось OC будет совмещена с вертикалью $O\zeta$. Тем самым будет получена возможность регистрировать изменения курса объекта. Действительно, при сообщении ротору гироскопа вращения с достаточно большой угловой скоростью вокруг его главной оси OA положение последней, как известно, будет оставаться стабильным в пространстве. Вследствие этого направление движения объекта можно оценивать величиной угла $\alpha_к$, образуемого продольной осью O_cx_c объекта с плоскостью xOC гироскопа и называемого компасным курсом.

Для удобства измерения компасного курса $\alpha_к$ наружное кольцо $НК$ гироскопа снабжают диском N (со шкалой, разделенной на 360°), а корпус прибора — индексом L, остающимся неподвижным относительно объекта. Нулевую черту, соединяющую деления «0» и «180» шкалы диска, или так называемой картушки N, совмещают с плоскостью xOC гироскопа, которой всегда находится его главная ось OA. Поэтому в тех случаях, когда величина угла ψ отклонения главной оси OA гироскопа от плоскости мери-

диана $\xi O \zeta$ известна, гироскопом может быть измерен и истинный курс α, равный сумме двух углов:

$$\alpha = \psi + \alpha_к.$$

Однако пользоваться подобным методом измерения истинного курса α в течение более или менее продолжительного времени

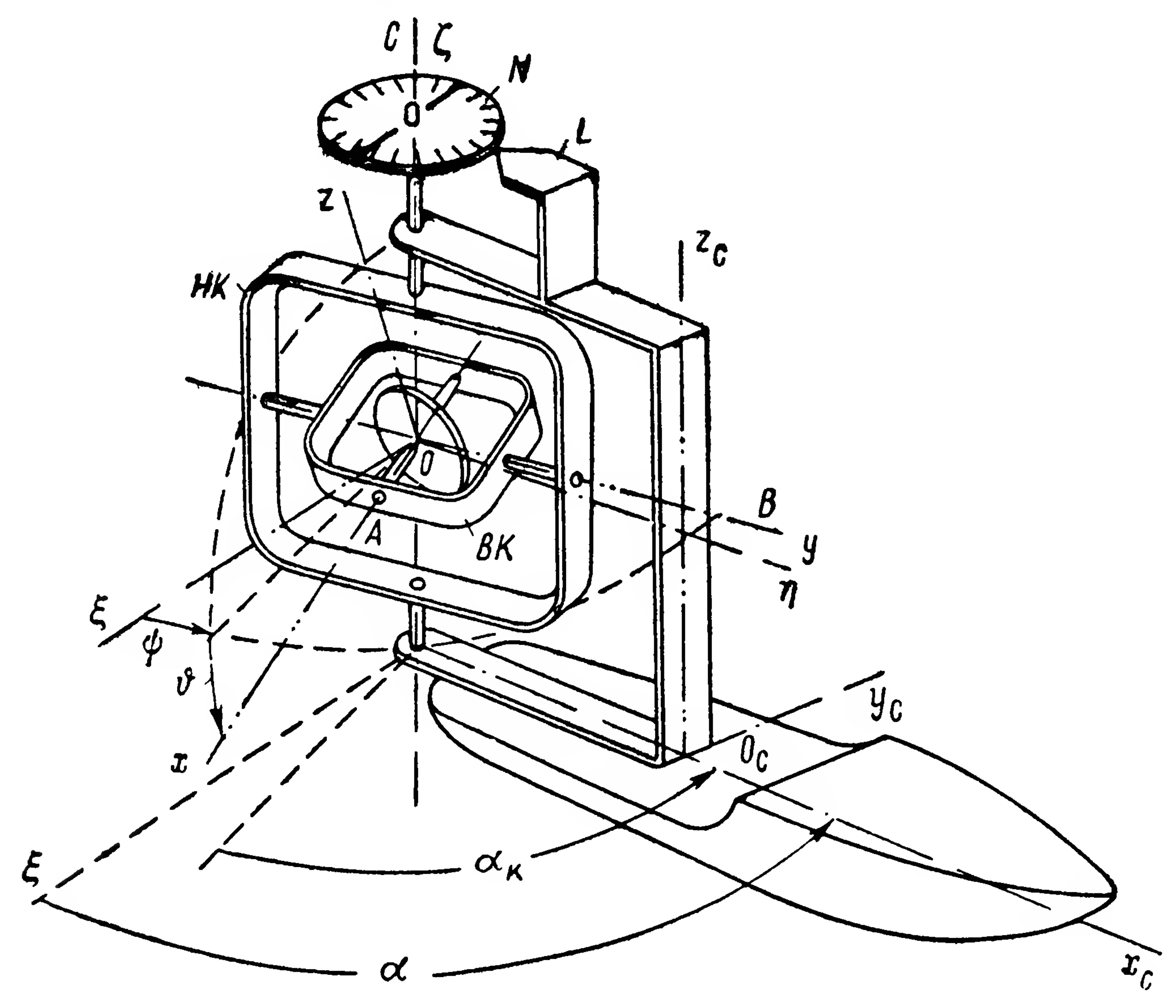


Рис. 106. Принципиальная схема гироскопа направления.

нельзя. Непрерывное отклонение гироскопа от плоскости меридиана $\xi O \zeta$ вызывает непрерывное изменение угла ψ, в результате чего появляется необходимость введения поправок в величину измеренного угла $\alpha_к$ для определения истинного курса α. Избежать этого неудобства можно только в том случае, если положение главной оси OA гироскопа, а следовательно, и нулевой черты картушки будет оставаться неизменным относительно плоскости меридиана $\xi O \zeta$. Для выяснения возможностей выполнения указанного требования обратимся вновь к системе уравнений (162), описывающей движение гироскопа в подвижной системе координат.

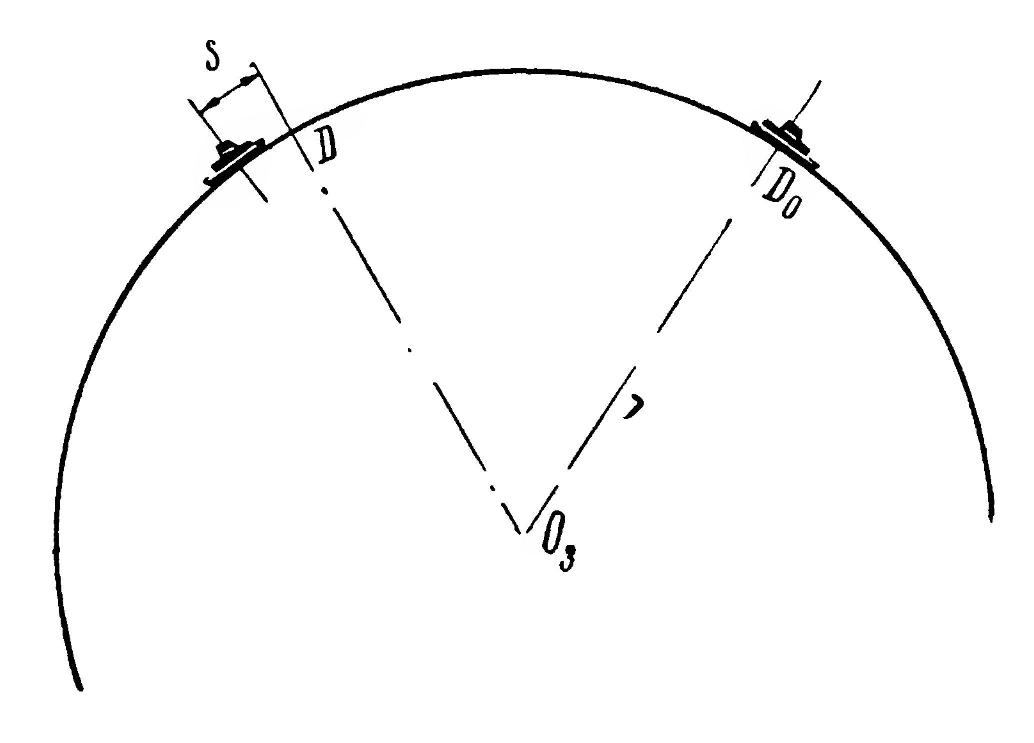


Рис. 107. Схема перемещения объекта вместе с Землей в мировом пространстве.

Предположим, что в начальный момент времени корабль находился в пункте D_0 (рис. 107) земной поверхности. По прошествии времени t вследствие суточного вращения Земли пункт D_0 переместится в пространстве и займет положение D. Однако корабль в этот момент уже не будет находиться в точке D: за время t он удалится от пункта D на расстояние S. Так как движение корабля происходит с относительно малыми скоростями, то можно утверждать, что путь S, пройденный кораблем, будет мал по сравнению с дугой D_0D, на величину которой переместится пункт D_0 в мировом пространстве. Поэтому можно приближенно считать, что на протяжении довольно продолжительного времени угловые скорости ω_B, ω_C и ω_D вращения основания гироскопа зависят только от угловой скорости суточного вращения Земли. При таком допущении ω_B, ω_C и ω_D будут определяться по выражениям (171), и система уравнений (162) примет вид

$$\left.\begin{aligned} &J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega(\dot{\psi} + \Omega_3 \sin\varphi)\cos\vartheta_0 + \\ &+ J\Omega\Omega_3 \cos\varphi\cos\psi_0 \sin\vartheta_0 = M_B; \\ &J_C\ddot{\psi} - J\Omega(\dot{\vartheta} - \dot{\Omega}_3 \cos\varphi\sin\psi_0)\cos\vartheta_0 = M_C. \end{aligned}\right\} \quad (291)$$

Пренебрегая в уравнениях (291) членами, оказывающими влияние на параметры нутационных колебаний, находим угловые скорости прецессионного движения гироскопа

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{M_B}{J\Omega\cos\vartheta_0} - \Omega_3(\sin\varphi + \cos\varphi\cos\psi_0 \operatorname{tg}\vartheta_0); \\ \dot{\vartheta} &= -\frac{M_C}{J\Omega\cos\vartheta_0} + \Omega_3\cos\varphi\sin\psi_0, \end{aligned}\right\} \quad (292)$$

с которыми его главная ось будет перемещаться относительно плоскостей меридиана и горизонта.

Необходимо иметь в виду, что выражения (292) действительны лишь при неподвижном положении точки опоры гироскопа или медленном ее перемещении относительно земной поверхности.

Из анализа (292) следует, что при совмещении в начальный момент времени главной оси OA гироскопа с плоскостями горизонта ($\vartheta_0 = 0$) и меридиана ($\psi_0 = 0$) одновременно в принципе можно создать такие условия, при которых гироскоп будет сохранять неизменным свое положение относительно плоскостей горизонта и меридиана. Действительно, при нулевых значениях углов ϑ_0 и ψ_0 выражения (292) принимают вид

$$\dot{\psi} = \frac{M_B}{J\Omega} - \Omega_3\sin\varphi;$$

$$\dot{\vartheta} = -\frac{M_C}{J\Omega},$$

откуда следует, что для обеспечения стабильного положения гироскопа относительно плоскостей горизонта и меридиана, когда $\dot{\psi} = 0$, $\dot{\vartheta} = 0$, необходимо, чтобы моменты действующих на него внешних сил были равны

$$M_B = J\Omega\Omega_з \sin\varphi; \quad M_C = 0. \tag{293}$$

Внешний момент M_B, постоянно действующий на гироскоп относительно внутренней оси OB его подвеса и удовлетворяющий условию (293), может быть создан весьма простыми средствами. Одним из них является смещение центра тяжести гироскопа относительно точки O подвеса вдоль главной оси OA (рис. 108). В этом случае сила G веса гироскопа, действуя на плече l, создает момент относительно оси OB. Регулируя величину l, при $\vartheta_0 = 0$ подбирают такое значение момента M_B, которое удовлетворяло бы условию (293)

$$M_B = Gl = J\Omega\Omega_з \sin\varphi \tag{294}$$

и обеспечивало бы нулевое значение угловой скорости

$$\dot{\psi} = \frac{Gl}{J\Omega} - \Omega_з \sin\varphi = 0.$$

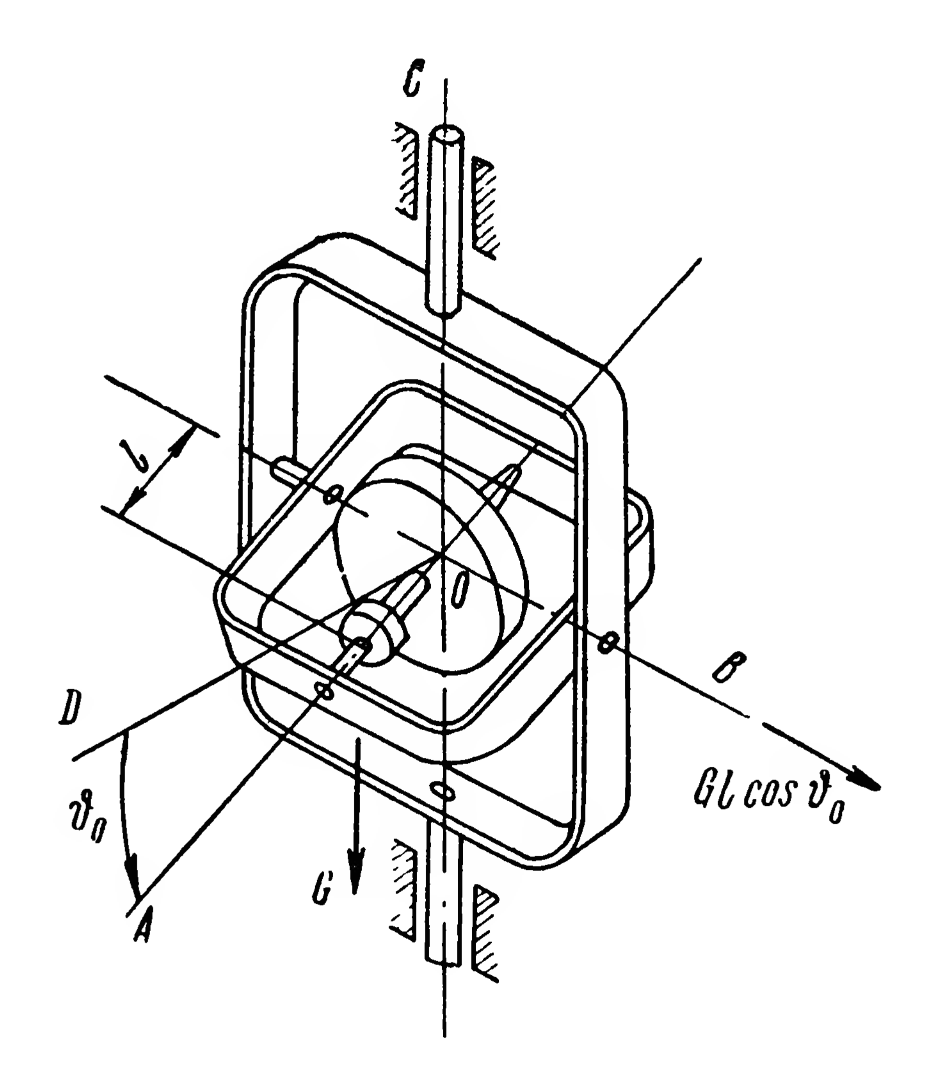


Рис. 108. Гироскоп направления со смещенным центром тяжести.

Если условие (294) будет обеспечено, то главная ось гироскопа сохранит свое положение совмещенным с неизменным азимутальным направлением относительно плоскости меридиана. Поэтому такие гироскопы и получили название азимутальных или гироскопов направления.

Создатели первых гироскопов направления полагали, что силы трения в опорах подвеса мало влияют на движение гироскопа, вследствие чего условие (294) практически легко осуществимо. Между тем, в действительности указанные силы трения оказывали значительное влияние. Условие (294) не выполнялось, и гироскопы направления, построенные по описанной схеме (рис. 108), изменяли свое положение относительно плоскости меридиана.

В показаниях прибора возникали ошибки, величина которых за 10—15 минут работы достигала 2—3°.

§ 49. АНАЛИЗ РАБОТЫ ПРОСТЕЙШЕГО ГИРОСКОПА НАПРАВЛЕНИЯ

Чтобы выяснить, в какой мере простейший гироскоп направления сохраняет свое положение неизменным по отношению к плоскостям горизонта и меридиана, обратимся к системе уравнений (291). Будем полагать, что в начальный момент времени созданы наиболее благоприятные условия для сохранения гироскопом неизменного положения относительно плоскости меридиана. Согласно изложенному выше (§ 48), такие условия обеспечиваются горизонтальным положением главной оси при совмещении ее с плоскостью меридиана и действием на гироскоп моментов внешних сил, удовлетворяющих условию (293).

Если осуществить в начальный момент времени требование $\vartheta_0 = 0$ и $\psi_0 = 0$ несложно, то обеспечить условия (293) при наличии сил трения в опорах подвеса практически невозможно.

Таким образом, рассматривая систему уравнений (291) и полагая в ней углы ϑ_0 и ψ_0 равными нулю, необходимо учитывать еще и моменты сил трения, неизбежно существующие в опорах подвеса гироскопа. Если указанные моменты порождаются силами сухого трения и центр тяжести гироскопа смещен относительно его точки подвеса вдоль главной оси, то уравнения (291) примут вид

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega(\dot{\psi} + \Omega_з \sin\varphi) &= Gl - M_{0\,тB}\,\mathrm{sign}\,\dot{\vartheta}; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\dot{\vartheta} &= -M_{0\,тC}\,\mathrm{sign}\,\dot{\psi}. \end{aligned}\right\} \qquad (295)$$

Если моменты сил трения были бы равны нулю, то систему (295) можно было бы переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\psi} &= Gl - J\Omega\Omega_з \sin\varphi; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\dot{\vartheta} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (296)$$

Ее частное решение определится по выражениям

$$\dot{\vartheta}_r = 0; \quad \dot{\psi}_r = \frac{Gl - J\Omega\Omega_з \sin\varphi}{J\Omega},$$

откуда, учитывая, что $\vartheta(0) = \psi(0) = 0$, получим

$$\vartheta_r = 0; \quad \psi_r = \frac{Gl - J\Omega\Omega_з \sin\varphi}{J\Omega}\,t. \qquad (297)$$

Решение однородной системы дифференциальных уравнений, соответствующей (296), будет определяться по выражениям (57). Таким образом, общее решение системы (296) будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= C_1 \cos nt + C_2 \sin nt + C_3; \\ \psi &= \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\,(C_1 \sin nt - C_2 \cos nt) + C_4 + \frac{Gl - J\Omega\Omega_з \sin\varphi}{J\Omega}\,t \end{aligned}\right\}. \qquad (298)$$

Выражения (298) показывают, что при отсутствии сил трения в опорах подвеса, совмещении главной оси с полуденной линией и соблюдении условия (294) положение гироскопа остается неизменным относительно плоскостей горизонта и меридиана. Гироскоп лишь совершает нутационные колебания вокруг оси, сохраняющей стабильным свое направление в системе координат, связанной с земными ориентирами.

Однако силы трения в опорах подвеса неизбежно существуют, и создаваемые ими моменты не могут не влиять на характер движения гироскопа. Моменты сил сухого трения сохраняют свое среднее значение и знак неизменными на протяжении одной четверти периода нутационных колебаний (см. § 36). Поэтому условимся влияние сил сухого трения на поведение простейшего гироскопа направления рассматривать отдельно в каждой четверти периода нутационных колебаний. В этом случае моменты сил сухого трения будут постоянными, в связи с чем уравнения (295) для первой четверти периода нутационных колебаний примут вид

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\psi} &= Gl - M_{0\,\text{т}\,B} - J\Omega\Omega_з \sin\varphi; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\dot{\vartheta} &= -M_{0\,\text{т}\,C}. \end{aligned}\right\} \tag{299}$$

Система (299) будет иметь частное решение

$$\dot{\psi}_r = \frac{Gl - M_{0\,\text{т}\,B} - J\Omega\Omega_з \sin\varphi}{J\Omega};$$

$$\dot{\vartheta}_r = \frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega},$$

а ее общее решение по аналогии с (298) определится выражениями

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= C_1\cos nt + C_2\sin nt + C_3 + \frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega}\,t; \\ \psi &= \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\,(C_1\sin nt - C_2\cos nt) + C_4 + \\ &\quad + \frac{Gl - M_{0\,\text{т}\,B} - J\Omega\Omega_з \sin\varphi}{J\Omega}\,t. \end{aligned}\right\} \tag{300}$$

Чтобы определить постоянные интегрирования, входящие в выражения (300), обратимся к начальным условиям рассматриваемого движения. В начальный момент при $t = 0$ главная ось гироскопа горизонтальна и совмещена с плоскостью меридиана; следовательно $\vartheta(0) = 0$; $\psi(0) = 0$. Для компенсации азимутального ухода гироскопа создается корректирующий момент Gl, действующий относительно оси OB подвеса. Если при действии моментов Gl и сил трения $M_{0\,\text{т}\,B}$ соблюдается условие

$$Gl - M_{0\,\text{т}\,B} - J\Omega\Omega_з \sin\varphi = 0, \tag{301}$$

то движение гироскопа вокруг оси OC в начальный момент времени будет отсутствовать.

Также будет отсутствовать в начальный момент времени и скорость поворота гироскопа вокруг оси OB. Следовательно, начальные значения угловых скоростей $\dot{\vartheta}(0) = 0$; $\dot{\psi}(0) = 0$.

При указанных начальных условиях из выражения (300) и их первых производных следует:

$$\vartheta(0) = C_1 + C_3 = 0;$$

$$\psi(0) = -\sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\, C_2 + C_4 = 0;$$

$$\dot{\vartheta}(0) = nC_2 + \frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega} = 0;$$

$$\dot{\psi}(0) = \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\, nC_1 + \frac{Gl - M_{0\,\text{т}\,C} - J\Omega\Omega_3 \sin\varphi}{J\Omega} = 0.$$

Учитывая (53) при $\vartheta_0 = 0$ и условие (301), из последних равенств определяем:

$$C_1 = C_3 = 0;$$

$$C_2 = -\frac{\sqrt{J_B J_C}\, M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2}; \quad C_4 = -\frac{J_B M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2}.$$

Подставив значения постоянных интегрирования в выражения (300) и принимая во внимание (301), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= -\frac{\sqrt{J_B J_C}\, M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2} \sin nt + \frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega}\, t; \\ \psi &= \frac{J_B M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2} \cos nt - \frac{J_B M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2}. \end{aligned}\right\} \tag{302}$$

К концу первой четверти периода нутационных колебаний при $t = \frac{T}{4}$, когда nt станет равным $\frac{\pi}{2}$ (см. § 36), углы ϑ и ψ поворота гироскопа вокруг внутренней и наружной осей подвеса достигнут значений

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1 &= -\frac{\sqrt{J_B J_C}\, M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2} + \frac{M_{0\,\text{т}\,C} T}{4J\Omega}; \\ \psi_1 &= -\frac{J_B M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2}. \end{aligned}\right\} \tag{303}$$

Так как в выражении для ϑ_1 второй член заведомо больше первого, то проекция полюса гироскопа на картинной плоскости (рис. 109) к концу первой четверти периода нутационных колебаний совместится с точкой a, координаты которой в системе $O^*\vartheta\psi$ будут характеризоваться выражениями (303). К этому же моменту

времени угловые скорости $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\psi}$, определяемые первыми производными выражений (302), достигнут значений

$$\dot{\vartheta}_1 = \frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega}; \quad \dot{\psi}_1 = -\sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\,\frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega}. \tag{304}$$

Рассматривая движение гироскопа во второй четверти периода его нутационных колебаний, будем как и в § 36, отсчитывать

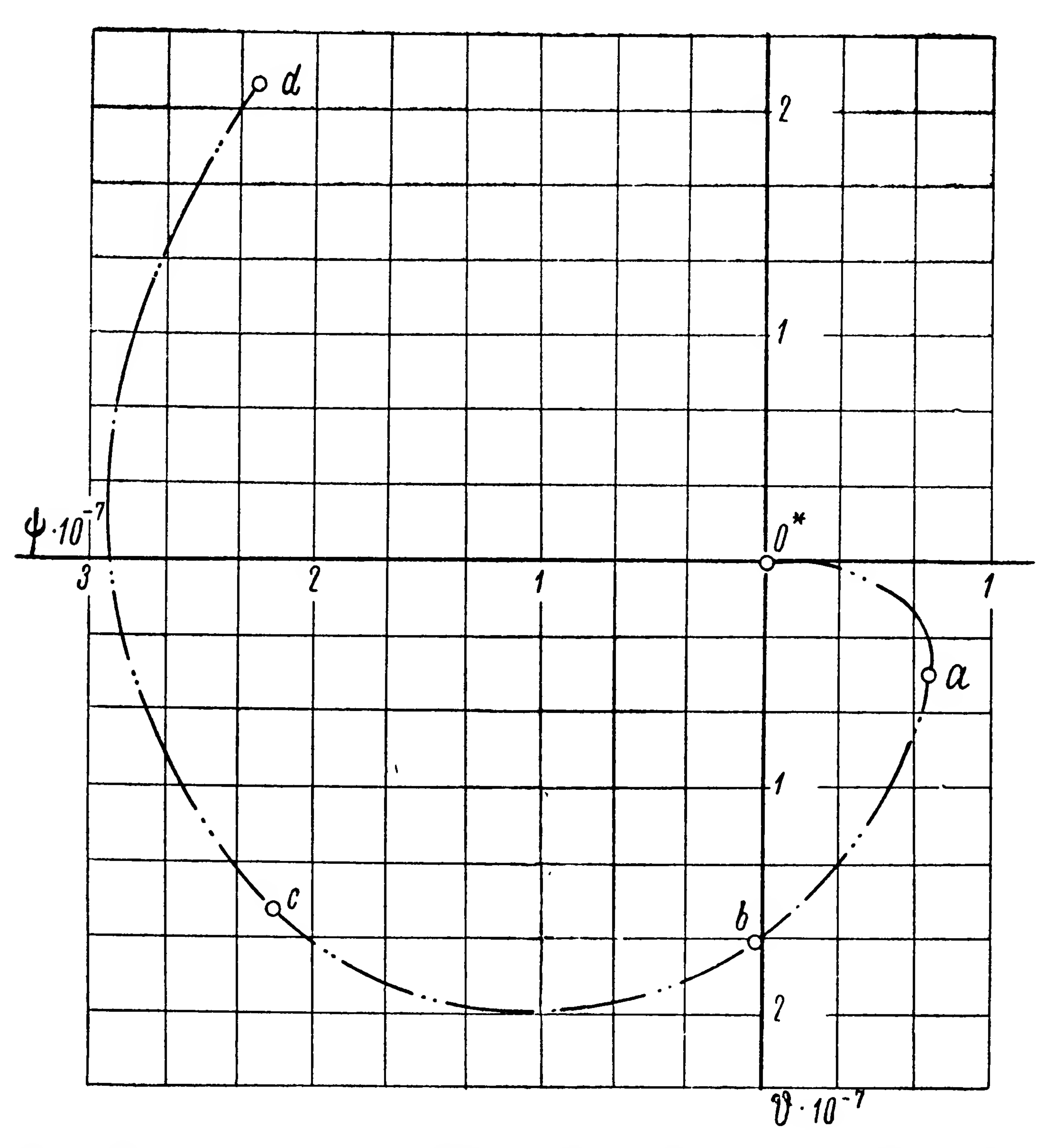


Рис. 109. Траектория перемещения проекции полюса гироскопа направления на картинной плоскости.

время $t^* = t - \frac{T}{4}$ от момента окончания первой четверти. Во второй четверти момент $M_{\text{т}C}$ меняет свой знак на обратный и одновременно может изменить свою величину пропорционально коэффициенту ν (см. рис. 77). В результате выражения (300) с учетом равенства (301) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= C_1 \cos nt^* + C_2 \sin nt^* + C_3 - \frac{\nu M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega}\,t^*; \\ \psi &= \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\,(C_1 \sin nt^* - C_2 \cos nt^*) + C_4. \end{aligned}\right\} \tag{305}$$

В начальный момент при $t^* = 0$ положение гироскопа характеризовалось на картинной плоскости (рис. 109) точкой a, а условия его движения, согласно (303) и (304), зависимостями

$$\vartheta(0) = -\frac{\sqrt{J_B J_C}\, M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2} + \frac{M_{0\,\text{т}\,C}T}{4J\Omega} = \vartheta_1;$$

$$\psi(0) = -\frac{J_B M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2} = \psi_1; \quad \dot\vartheta(0) = \frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega} = \dot\vartheta_1;$$

$$\dot\psi(0) = -\sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\,\frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega} = \dot\psi_1.$$

При этих условиях постоянные интегрирования, входящие в (305), определятся из уравнений

$$\vartheta(0) = C_1 + C_3 = -\frac{\sqrt{J_B J_C}\, M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2} + \frac{M_{0\,\text{т}\,C}T}{4J\Omega};$$

$$\psi(0) = -\sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\,C_2 + C_4 = -\frac{J_B M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2};$$

$$\dot\vartheta(0) = nC_2 - \frac{\nu M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega} = \frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega};$$

$$\dot\psi(0) = \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\,nC_1 = -\sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\,\frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega}.$$

Учитывая значение круговой частоты n (53) при $\vartheta_0 = 0$, находим

$$C_1 = -\frac{\sqrt{J_B J_C}\, M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2}; \quad C_2 = \frac{\sqrt{J_B J_C}\, M_{0\,\text{т}\,C}(1+\nu)}{J^2\Omega^2};$$

$$C_3 = \frac{M_{0\,\text{т}\,C}T}{4J\Omega}; \quad C_4 = \frac{J_B \nu M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2}.$$

Подставив вычисленные значения постоянных интегрирования в (305), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= -\frac{\sqrt{J_B J_C}\, M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2}\cos nt^* + \frac{\sqrt{J_B J_C}\, M_{0\,\text{т}\,C}(1+\nu)}{J^2\Omega^2}\sin nt^* + \\ &\quad + \frac{M_{0\,\text{т}\,C}T}{4J\Omega} - \frac{\nu M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega}t^*; \\ \psi &= -\frac{J_B M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2}\sin nt^* - \frac{J_B M_{0\,\text{т}\,C}(1+\nu)}{J^2\Omega^2}\cos nt^* + \\ &\quad + \frac{J_B \nu M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2}. \end{aligned}\right\} \quad (306)$$

Следовательно, к концу второй четверти, по прошествии времени $t^* = \frac{T}{4}$, углы поворота гироскопа вокруг соответствующих

осей подвеса достигнут значений

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_2 &= \frac{\sqrt{J_B J_C}\, M_{0\,\text{т}\,C}(1+\nu)}{J^2\Omega^2} + \frac{M_{0\,\text{т}\,C}(1-\nu)T}{4J\Omega}; \\ \psi_2 &= -\frac{J_B M_{0\,\text{т}\,C}(1-\nu)}{J^2\Omega^2} \end{aligned}\right\} \qquad (307)$$

и проекция полюса гироскопа на картинной плоскости (см. рис. 109) перейдет в точку b.

К этому моменту угловые скорости $\dot\vartheta$ и $\dot\psi$, определяемые первыми производными выражений (306), станут равными

$$\dot\vartheta_2 = \frac{M_{0\,\text{т}\,C}(1-\nu)}{J\Omega}; \quad \dot\psi_2 = \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\,\frac{M_{0\,\text{т}\,C}(1+\nu)}{J\Omega}. \qquad (308)$$

При движении гироскопа в третьей четверти периода его нутационных колебаний (рис. 109) изменятся и знак, и величина момента $M_{\text{т}B}$. Момент $M_{\text{т}C}$ сохранит свое значение неизменным. При этих условиях выражения (300), учитывая равенство (301), примут вид

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= C_1\cos nt^{**} + C_2\sin nt^{**} + C_3 - \frac{\nu M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega}\,t^{**}; \\ \psi &= \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\,(C_1\sin nt^{**} - C_2\cos nt^{**}) + C_4 + \\ &\quad + \frac{M_{0\,\text{т}\,B}(1+\nu)}{J\Omega}\,t^{**}, \end{aligned}\right\} \qquad (309)$$

где $t^{**} = t - \frac{T}{2}$.

В соответствии с начальными условиями движения гироскопа в третьей четверти (307) и (308) из выражений (309) и их первых производных следует:

$$\vartheta(0) = C_1 + C_3 = \frac{\sqrt{J_B J_C}\, M_{0\,\text{т}\,C}(1+\nu)}{J^2\Omega^2} + \frac{M_{0\,\text{т}\,C}(1-\nu)T}{4J\Omega};$$

$$\psi(0) = -\sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\,C_2 + C_4 = -\frac{J_B M_{0\,\text{т}\,C}(1-\nu)}{J^2\Omega^2};$$

$$\dot\vartheta(0) = nC_2 - \frac{\nu M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega} = \frac{M_{0\,\text{т}\,C}(1-\nu)}{J\Omega};$$

$$\dot\psi(0) = \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\,nC_1 + \frac{M_{0\,\text{т}\,B}(1+\nu)}{J\Omega} = \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\,\frac{M_{0\,\text{т}\,B}(1+\nu)}{J\Omega},$$

откуда находим

$$C_1 = \left(\sqrt{J_B J_C} - J_C\right)\frac{M_{0\,\text{т}\,C}(1+\nu)}{J^2\Omega^2}; \quad C_2 = \frac{\sqrt{J_B J_C}\, M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2};$$

$$C_3 = \frac{J_C M_{0\,\text{т}\,C}(1+\nu)}{J^2\Omega^2}; \quad C_4 = \frac{J_B \nu M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2}.$$

Подставив найденные значения постоянных интегрирования в выражения (309), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= \left(\sqrt{J_B J_C} - J_C\right) \frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2} \cos nt^{**} + \\ &+ \frac{\sqrt{J_B J_C}\, M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2} \sin nt^{**} + \frac{J_C M_{0\,\text{т}\,C}(1+\nu)}{J^2\Omega^2} - \frac{\nu M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega} t^{**}; \\ \psi &= \left(J_B - \sqrt{J_B J_C}\right) \frac{M_{0\,\text{т}\,C}(1+\nu)}{J^2\Omega^2} \sin nt^{**} - \\ &- \frac{J_B M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2} \cos nt^{**} + \frac{J_B \nu M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2} + \frac{M_{0\,\text{т}\,B}(1+\nu)}{J\Omega} t^{**}. \end{aligned}\right\} \quad (310)$$

Проанализировав выражения (310), нетрудно заметить, что к концу третьей черверти периода нутационных колебаний, когда время t^{**} станет равным $\frac{T}{4}$, углы ϑ и ψ поворота гироскопа вокруг осей подвеса достигнут значений

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_3 &= \frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2}\left[J_C(1+\nu) + \sqrt{J_B J_C}\right] - \frac{\nu M_{0\,\text{т}\,C} T}{4J\Omega}; \\ \psi_3 &= \frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2}\left[J_B(1+2\nu) - \sqrt{J_B J_C}(1+\nu)\right] + \frac{M_{0\,\text{т}\,B}(1+\nu)T}{4J\Omega}, \end{aligned}\right\} \quad (311)$$

при которых проекция полюса гироскопа совместится на картинной плоскости с точкой c.

К этому моменту времени угловые скорости $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\psi}$ движения гироскопа, определяемые первыми производными выражений (310), достигнут значений

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vartheta}_3 &= -\frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega}\left(1 + \nu + \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\right); \\ \dot{\psi}_3 &= \frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega}\left(1 + \nu + \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\right). \end{aligned}\right\} \quad (312)$$

При исследовании движения гироскопа в четвертой четверти периода нутационных колебаний необходимо учитывать, что момент сил трения в опорах по наружной оси подвеса вновь поменяет свой знак и величину. Так как величина момента сил трения в опорах по внутренней оси не изменяется, то выражения (300), характеризующие изменения углов ϑ и ψ в четвертой четверти рассматриваемого периода, примут вид

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= C_1 \cos nt^{***} + C_2 \sin nt^{***} + C_3 + \frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega} t^{***}; \\ \psi &= \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\left(C_1 \sin nt^{***} - C_2 \cos nt^{***}\right) + C_4 + \\ &+ \frac{M_{0\,\text{т}\,B}(1+\nu)}{J\Omega} t^{***}, \end{aligned}\right\} \quad (313)$$

где $t^{***} = t - \frac{3T}{4}$.

Постоянные интегрирования, входящие в (313), будут определяться зависимостями (311) и (312), в соответствии с которыми из (313) и их первых производных следует:

$$\vartheta(0) = C_1 + C_3 = \frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2}\left[J_C(1+\nu) + \sqrt{J_B J_C}\right] - \frac{\nu M_{0\,\text{т}\,C} T}{4J\Omega};$$

$$\psi(0) = -\sqrt{\frac{J_B}{J_C}}C_2 + C_4 = \frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2}\left[J_B(1+2\nu) - \sqrt{J_B J_C}(1+\nu)\right] + $$
$$+ \frac{M_{0\,\text{т}\,B}(1+\nu)T}{4J\Omega};$$

$$\dot\vartheta(0) = nC_2 - \frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega} = -\frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega}\left(1+\nu+\sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\right);$$

$$\dot\psi(0) = \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}nC_1 + \frac{M_{0\,\text{т}\,B}(1+\nu)}{J\Omega} = \frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega}\left(1+\nu+\sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\right).$$

Решая совместно полученные зависимости, находим

$$C_1 = \frac{J_C}{J^2\Omega^2}\left[M_{0\,\text{т}\,C}\left(1+\nu+\sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\right) - M_{0\,\text{т}\,B}(1+\nu)\right];$$

$$C_2 = -\frac{\sqrt{J_B J_C}\,M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2}\left(2+\nu+\sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\right);$$

$$C_3 = -\frac{\nu M_{0\,\text{т}\,C}T}{4J\Omega} + \frac{J_C M_{0\,\text{т}\,B}(1+\nu)}{J^2\Omega^2};$$

$$C_4 = -\frac{J_B M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2}(1-\nu) - \frac{\sqrt{J_B J_C}\,M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2}\left(1+\nu+\frac{1}{J_C}\right) + $$
$$+ \frac{M_{0\,\text{т}\,B}(1+\nu)T}{4J\Omega},$$

в соответствии с чем выражения (313) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta &= \frac{J_C}{J^2\Omega^2}\left[M_{0\,\text{т}\,C}\left(1+\nu+\sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\right) - M_{0\,\text{т}\,B}(1+\nu)\right]\times \\
&\times\cos nt^{***} - \frac{\sqrt{J_B J_C}\,M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2}\left(2+\nu+\sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\right)\sin nt^{***} - \\
&- \frac{\nu M_{0\,\text{т}\,C}T}{4J\Omega} + \frac{J_C M_{0\,\text{т}\,B}(1+\nu)}{J^2\Omega^2} + \frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega}t^{***}; \\
\psi &= \frac{\sqrt{J_B J_C}}{J^2\Omega^2}\left[M_{0\,\text{т}\,C}\left(1+\nu+\sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\right) - M_{0\,\text{т}\,B}(1+\nu)\right]\times \\
&\times\sin nt^{***} + \frac{J_B M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2}\left(2+\nu+\sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\right)\cos nt^{***} -
\end{aligned}\right\} \quad (314)$$

$$-\frac{J_B M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2}(1-\nu)-\frac{\sqrt{J_B J_C}\,M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2}\left(1+\nu+\frac{1}{J_C}\right)+ \\ +\frac{M_{0\,\text{т}\,B}(1+\nu)T}{4J\Omega}+\frac{M_{0\,\text{т}\,B}(1+\nu)}{J\Omega}t^{***}. \qquad (314)$$

Из зависимостей (314) следует, что в концу четвертой четверти периода нутационных колебаний углы ϑ и ψ достигнут значений

$$\vartheta_4=\frac{M_{0\,\text{т}\,C}(1-\nu)T}{4J\Omega}+\frac{J_C M_{0\,\text{т}\,B}(1+\nu)}{J^2\Omega^2}- \\ -\frac{\sqrt{J_B J_C}\,M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2}\left(2+\nu+\sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\right); \\ \psi_4=\frac{\sqrt{J_B J_C}\,M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2}\left(\sqrt{\frac{J_B}{J_C}}-\frac{1}{J_C}\right)- \\ -\frac{\sqrt{J_B J_C}\,M_{0\,\text{т}\,B}(1+\nu)}{J^2\Omega^2}-\frac{J_B M_{0\,\text{т}\,C}(1-\nu)}{J^2\Omega^2}+\frac{M_{0\,\text{т}\,B}(1+\nu)T}{2J\Omega}. \qquad (315)$$

Как видим, уже к концу первого периода нутационных колебаний гироскопа, когда проекция его полюса совместится на картинной плоскости с точкой d, углы ϑ и ψ будут отличны от нуля. Из-за наличия сил трения в опорах подвеса гироскоп, совершив одно нутационное колебание, не возвратится в исходное положение. Таким образом, в реальных условиях нутационные колебания гироскопа будут сопровождаться отклонениями его главной оси от первоначального положения. С каждым новым циклом колебаний эти отклонения будут все более увеличиваться, и, хотя приращения углов ϑ и ψ за один период нутационных колебаний ничтожно малы, их значения вследствие большой частоты собственных колебаний гироскопа (см. § 14) в течение одной секунды могут возрасти в сотни раз.

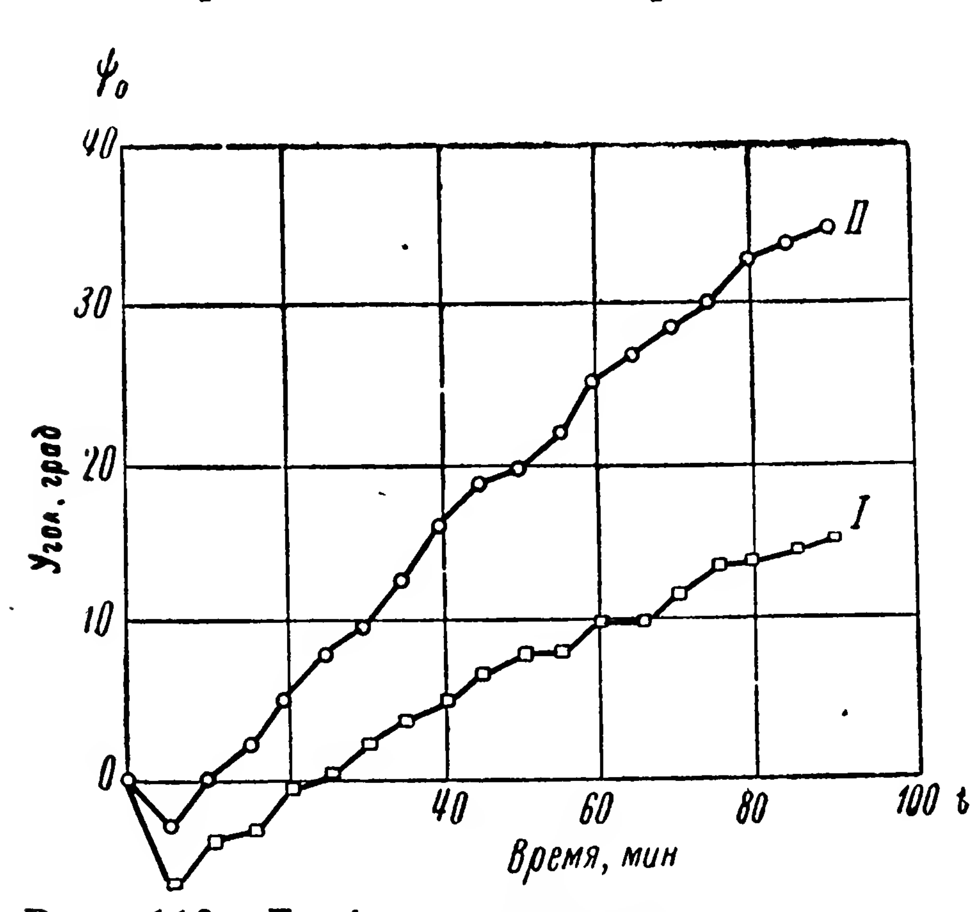


Рис. 110. Графики изменения углов отклонения гироскопа направления от меридиана при неподвижном положении его корпуса на земной поверхности.

Если основание прибора остается неподвижным на земной поверхности, отклонения гироскопа направления, несмотря на непостоянство величин моментов сил трения в опорах подвеса (см. рис. 76), сохраняют некоторую закономерность. Для подтверждения сказанного на рис. 110 приведены графики изменения во вре-

мени угла ψ_0, составляемого главной осью гироскопа направления, точка подвеса которого неподвижна на земной поверхности, с плоскостью меридиана. Приводимые кривые получены экспериментально для двух гироскопов направления (*I* и *II*), параметры которых характеризуются следующими данными:

Гироскоп направления	Кинетический момент $J\Omega$, *Гсмсек*	Вес ротора G, *Г*	Моменты сил трения в опорах подвеса, *Гсм*		Осевой люфт в опорах главной оси, *мм*
			$M_{\text{от } B}$	$M_{\text{от } C}$	
I	6600	700	1,0	1,0	0,005
II	2820	172	0,45	0,6	0,03

Если точка подвеса гироскопа направления перемещается вместе с объектом относительно земной поверхности, то отклонения главной оси гироскопа от плоскости меридиана будут подчиняться более сложному закону. Из-за непостоянства величин моментов сил трения в опорах подвеса (рис. 76) и отличия реальных колебаний объектов от гармонических (рис. 75) рассматриваемые отклонения носят, как правило, случайный характер. В этих случаях при определении угловой скорости отклонения гироскопа направления от плоскости меридиана приходится пользоваться вероятностными методами анализа (см. § 38).

Из выражений (315) следует также, что, уходя от плоскости меридиана, гироскоп одновременно отклоняется и от плоскости горизонта. По прошествии некоторого времени главная ось гироскопа составит с плоскостью горизонта угол ϑ_0, отличный от нуля. При этом его величина с течением времени будет непрерывно увеличиваться.

Вполне очевидно, что при $\vartheta_0 \neq 0$ уже нельзя пользоваться системой (295). Для исследования дальнейшего движения простейшего гироскопа направления приходится снова обращаться к уравнениям (291), частное решение которых приводит к выражениям (292), характеризующим угловые скорости прецессионного движения гироскопа направления.

В рассматриваемом случае на гироскоп направления действует момент силы G его веса, равный в общем случае (см. рис. 108) произведению $Gl \cos \vartheta_0$, и моменты сил трения в опорах подвеса. Учитывая указанные моменты в выражениях (292), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{Gl \cos \vartheta_0 - M_{0\text{т}B} \operatorname{sign} \dot{\vartheta}}{J\Omega \cos \vartheta_0} - \Omega_3 (\sin \varphi + \cos \varphi \cos \psi_0 \operatorname{tg} \vartheta_0); \\ \dot{\vartheta} &= \frac{M_{0\text{т}C} \operatorname{sign} \dot{\psi}}{J\Omega \cos \vartheta_0} + \Omega_3 \cos \varphi \sin \psi_0. \end{aligned}\right\} \quad (316)$$

Из (316) следует, что с увеличением угла наклона ϑ_0 будут возрастать и угловые скорости $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\psi}$ отклонения гироскопа направления от плоскостей горизонта и меридиана. Действительно, если в начальный момент было соблюдено условие (301), то для промежутка времени, в течение которого угловые скорости $\dot{\vartheta}$

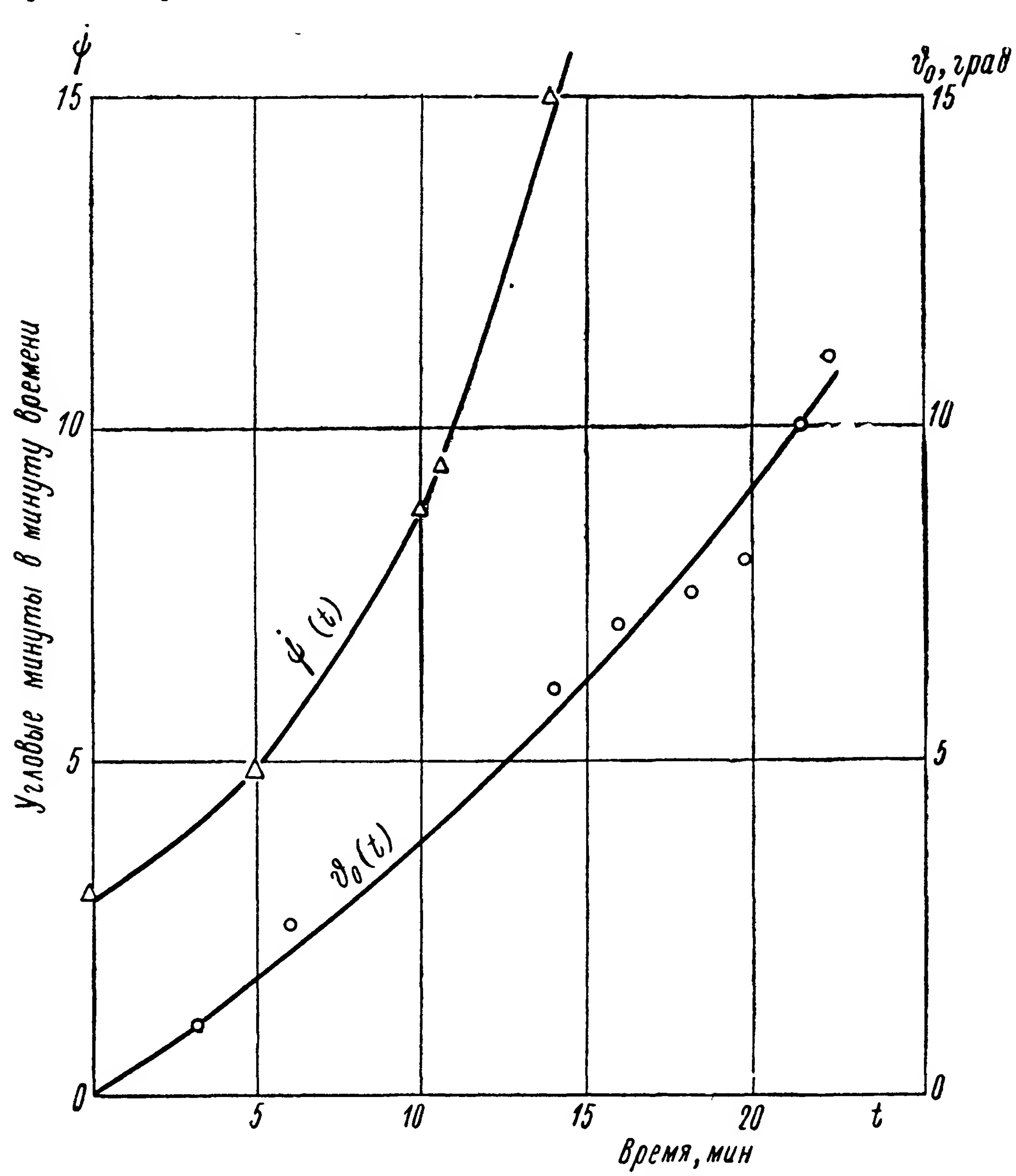


Рис. 111. Кривые изменения угла ϑ_0 и скорости $\dot{\psi}$ во времени

и $\dot{\psi}$ остаются положительными, выражения (316) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\dot{\psi} = \frac{Gl \cos \vartheta_0 - M_{0\,\text{т}\,B}}{J\Omega \cos \vartheta_0} - \frac{M_{0\,\text{г}\,B}}{J\Omega} +$$

$$+ \frac{M_{0\,\text{т}\,B}}{J\Omega} - \Omega_з (\sin \varphi + \cos \varphi \cos \psi_0 \operatorname{tg} \vartheta_0);$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega \cos \vartheta_0} + \Omega_з \cos \varphi \sin \psi_0.$$

Согласно (301)

$$\frac{Gl\cos\vartheta_0}{J\Omega\cos\vartheta_0} - \frac{M_{0\,т\,B}}{J\Omega} - \Omega_з\sin\varphi = 0,$$

в связи с чем угловые скорости прецессии будут равны

$$\dot\psi = \frac{M_{0\,т\,B}}{J\Omega}\cdot\frac{\cos\vartheta_0 - 1}{\cos\vartheta_0} - \Omega_з\cos\varphi\cos\dot\psi_0\,\mathrm{tg}\,\vartheta_0;$$

$$\dot\vartheta = \frac{M_{0\,т\,C}}{J\Omega\cos\vartheta_0} + \Omega_з\cos\varphi\sin\psi_0,$$

что подтверждает сказанное выше об их увеличении при возрастании угла ϑ_0.

Для иллюстрации полученного вывода на рис. 111 приведены экспериментальные графики изменения во времени угла ϑ_0 и угловой скорости $\dot\psi$ поворотов вокруг внутренней и наружной осей подвеса гироскопа направления, обладающего кинетическим моментом $J\Omega = 10\,000$ *Гсмсек* и моментами сил трения $M_{0тB} = 1{,}2$ *Гсм* и $M_{0\,т\,C} = 7{,}0$ *Гсм*.

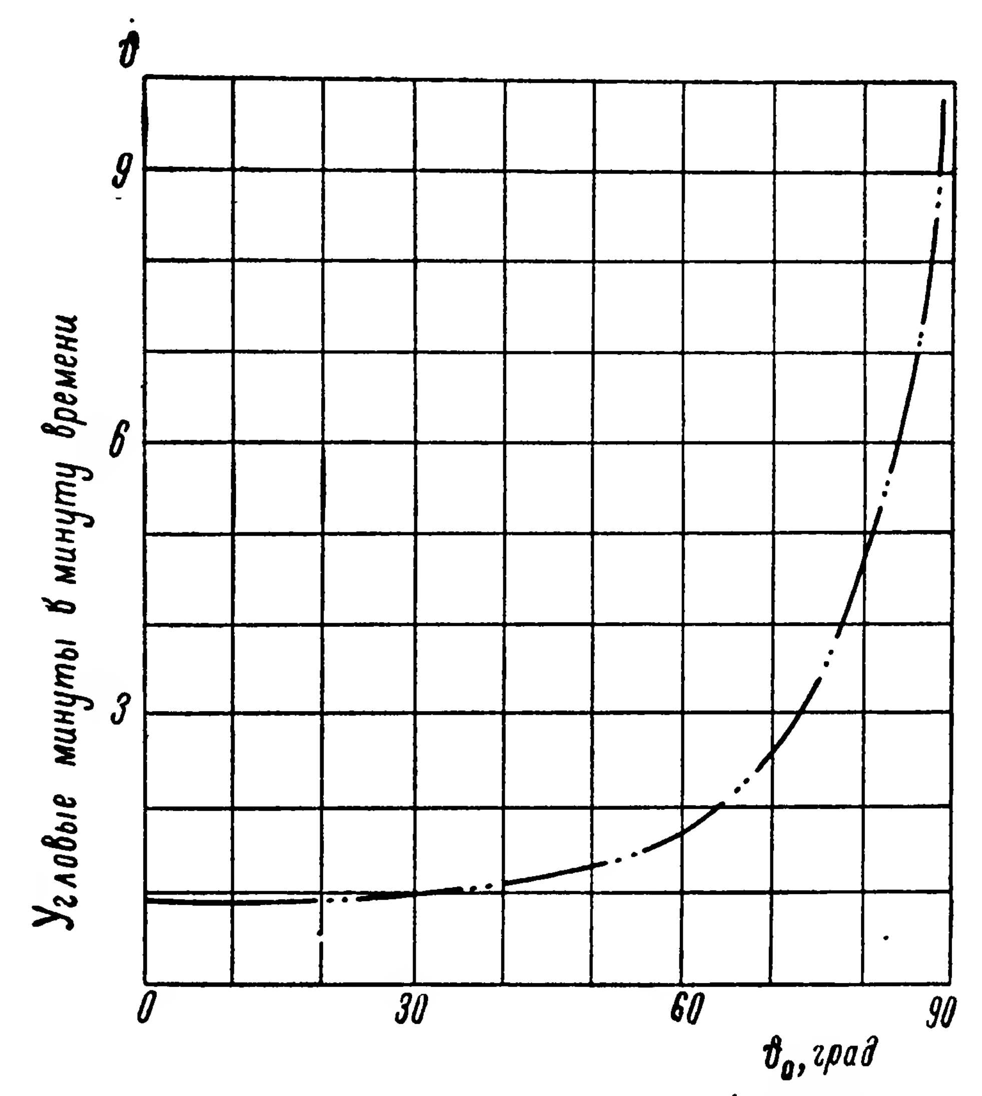


Рис. 112. Зависимость скорости $\dot\vartheta$ от угла ϑ_0.

Особое внимание должно быть обращено на то, что с приближением ϑ_0 к $\frac{\pi}{2}$ (рис. 112) угловая скорость $\dot\vartheta$ прецессионного движения гироскопа вокруг его внутренней оси подвеса стремится к бесконечности. В то мгновение, когда угол ϑ_0 достигнет значения $\frac{\pi}{2}$, главная ось гироскопа совместится с его наружной осью подвеса (см. рис. 23 и 98) и работа прибора как гироскопической системы прекратится.

Таким образом, для обеспечения нормальной работы гироскопа направления в течение достаточно продолжительного времени необходимо прежде всего ограничить изменение угла ϑ_0, не лишая при этом гироскоп свободы вращения вокруг внутренней оси подвеса. Для уменьшения угловой скорости $\dot\psi$ необходимо угол ϑ_0 удерживать близким к нулю. Вот почему во всех современных моделях гироскопов направления его главную ось принудительно удерживают в горизонтальной плоскости.

Пример 24. Определить углы отклонения главной оси простейшего гироскопа направления от плоскостей горизонта и меридиана за время одного периода нутационных колебаний и построить кривую перемещения полюса по картинной плоскости. Вычислить углы отклонения гироскопа от указанных плоскостей к концу первой секунды, полагая, что в течение этого промежутка времени гироскоп имеет одинаковые уходы за каждый период его нутационных колебаний. Параметры гироскопа: $J\Omega = 2800$ *Гсмсек*, $J_B = 0{,}7$ *Гсмсек*^{2}, $J_C = 1{,}0$ *Гсмсек*^{2}, $M_{0\,т\,B} = 0{,}5$ *Гсм*, $M_{0\,т\,C} = 0{,}8$ *Гсм*. Коэффициент изменения величины моментов сил трения при перемене направления движения $\nu = 1{,}07$.

Вычислим период T нутационных колебаний гироскопа. Из формулы (60) при $\vartheta_0 = 0$ находим

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{J_B J_C}}{J\Omega \cos \vartheta_0} = 2\cdot 3{,}14 \frac{\sqrt{0{,}7\cdot 1{,}0}}{2800 \cos 0^\circ} = 1{,}87\cdot 10^{-3} \text{ сек.}$$

Согласно выражениям (303) вычислим значения углов поворота гироскопа к концу первой четверти периода его нутационных колебаний:

$$\vartheta_1 = -\frac{\sqrt{J_B J_C}\, M_{0\,т\,C}}{J^2\Omega^2} + \frac{M_{0\,т\,C} T}{4J\Omega} = -\frac{\sqrt{0{,}7\cdot 1{,}0}\cdot 0{,}8}{2800^2} +$$

$$+ \frac{0{,}8\cdot 1{,}87\cdot 10^{-3}}{4\cdot 2800} = 0{,}48\cdot 10^{-7} \text{ рад.;}$$

$$\psi_1 = -\frac{J_B M_{0\,т\,C}}{J^2\Omega^2} = -\frac{0{,}7\cdot 0{,}8}{2800^2} = -0{,}72\cdot 10^{-7} \text{ рад.}$$

По формулам (307) определим величины рассматриваемых углов к концу второй четверти периода нутационных колебаний:

$$\vartheta_2 = \frac{\sqrt{J_B J_C} M_{0\,т\,C}(1+\nu)}{J^2\Omega^2} + \frac{M_{0\,т\,C}(1-\nu)\, T}{4J\Omega} = \frac{\sqrt{0{,}7\cdot 1{,}0}\cdot 0{,}8\,(1+1{,}07)}{2800^2} +$$

$$+ \frac{0{,}8\,(1-1{,}07)\, 1{,}87\cdot 10^{-3}}{4\cdot 2800} = 1{,}68\cdot 10^{-7} \text{ рад.;}$$

$$\psi_2 = -\frac{J_B M_{0\,т\,C}(1-\nu)}{J^2\Omega^2} = -\frac{0{,}7\cdot 0{,}8\,(1-1{,}07)}{2800^2} = 0{,}05\cdot 10^{-7} \text{ рад.}$$

В соответствии с равенствами (311) найдем значения углов ϑ и ψ в конце третьей четверти периода колебаний гироскопа:

$$\vartheta_3 = \frac{M_{0\,т\,C}}{J^2\Omega^2}\left[J_C(1+\nu) + \sqrt{J_B J_C}\right] - \frac{\nu M_{0\,т\,C} T}{4J\Omega} =$$

$$= \frac{0{,}8}{2800^2}\left[1{,}0\,(1+1{,}07) + \sqrt{0{,}7\cdot 1{,}0}\right] - \frac{1{,}07\cdot 0{,}8\cdot 1{,}87\cdot 10^{-3}}{4\cdot 2800} =$$

$$= 1{,}56\cdot 10^{-7} \text{ рад.;}$$

$$\psi_3 = \frac{M_{0\,т\,C}}{J^2\Omega^2}\left[J_B(1+2\nu) - \sqrt{J_B J_C}(1+\nu)\right] + \frac{M_{0\,т\,B}(1+\nu)\, T}{4J\Omega} =$$

$$= \frac{0{,}8}{2800^2}\left[0{,}7\,(1+2\cdot 1{,}07) - \sqrt{0{,}7\cdot 1{,}0}\,(1+1{,}07)\right] +$$

$$+ \frac{0{,}5\,(1+1{,}07)\, 1{,}87\cdot 10^{-3}}{4\cdot 2800} = 2{,}21\cdot 10^{-7} \text{ рад.}$$

Наконец, по выражениям (315) вычислим углы поворота гироскопа к моменту окончания первого периода его нутационных колебаний:

$$\vartheta_4 = \frac{M_{0\,\text{т}\,C}(1-\nu)\,T}{4J\Omega} + \frac{J_C M_{0\,\text{т}\,B}(1+\nu)}{J^2\Omega^2} -$$

$$-\frac{\sqrt{J_B J_C}\,M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2}\left(2+\nu+\sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\right) =$$

$$= \frac{0{,}8\,(1-1{,}07)\,1{,}87\cdot10^{-3}}{4\cdot2800} + \frac{1{,}0\cdot0{,}5\,(1+1{,}07)}{2800^2} -$$

$$-\frac{\sqrt{0{,}7\cdot1{,}0}\cdot0{,}8}{2800^2}\left(2+1{,}07+\sqrt{\frac{0{,}7}{1{,}0}}\right) = -2{,}1\cdot10^{-7}\ \text{рад.};$$

$$\psi_4 = \frac{\sqrt{J_B J_C}\,M_{0\,\text{т}\,C}}{J^2\Omega^2}\left(\sqrt{\frac{J_B}{J_C}} - \frac{1}{J_C}\right) - \frac{\sqrt{J_B J_C}\,M_{0\,\text{т}\,B}(1+\nu)}{J^2\Omega^2} -$$

$$-\frac{J_B M_{0\,\text{т}\,C}(1-\nu)}{J^2\Omega^2} + \frac{M_{0\,\text{т}\,B}(1+\nu)\,T}{2J\Omega} =$$

$$= \frac{\sqrt{0{,}7\cdot1{,}0}\cdot0{,}8}{2800^2}\left(\sqrt{\frac{0{,}7}{1{,}0}} - \frac{1}{1{,}0}\right) - \frac{\sqrt{0{,}7\cdot1{,}0}\cdot0{,}5\,(1+1{,}07)}{2800^2} -$$

$$-\frac{0{,}7\cdot0{,}8\,(1-1{,}07)}{2800^2} + \frac{0{,}5\,(1+1{,}07)\,1{,}87\cdot10^{-3}}{2\cdot2800} = 2{,}28\cdot10^{-7}\ \text{рад.}$$

Нанося вычисленные к концу каждой четверти периода нутационных колебаний значения углов ϑ и ψ на график (см. рис. 109) и соединяя полученные таким образом точки кривой, находим траекторию перемещения проекции полюса гироскопа на картинной плоскости за время T одного периода. Для определения отклонений гироскопа направления в течение одной секунды вычислим частоту его колебаний:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1{,}87\cdot10^{-3}} = 535\ \textit{гц}.$$

Следовательно, углы отклонения гироскопа направления от плоскости горизонта и меридиана по истечении одной секунды достигнут значений

$$\vartheta = \vartheta_4 f = -2{,}1\cdot10^{-7}\cdot535 = -1{,}12\cdot10^{-4}\ \text{рад.};$$

$$\psi = \psi_4 f = 2{,}28\cdot10^{-7}\cdot535 = 1{,}22\cdot10^{-4}\ \text{рад.}$$

или соответственно

$$\vartheta = -1{,}12\cdot10^{-4}\cdot57{,}3\cdot60 = -0{,}39\ \text{угл. мин.};$$

$$\psi = 1{,}22\cdot10^{-4}\cdot57{,}3\cdot60 = 0{,}53\ \text{угл. мин.}$$

§ 50. НИВЕЛИРОВАНИЕ ГЛАВНОЙ ОСИ ГИРОСКОПА НАПРАВЛЕНИЯ

Для сохранения главной оси гироскопа направления в горизонтальной плоскости, или, как говорят, для ее нивелирования, применяются корректирующие устройства, аналогичные описанным в § 45. Существуют два принципиально различных метода

нивелирования. Один из них основан на предположении, что объект, как правило, перемещается в горизонтальной плоскости. В этом случае наружная ось OC подвеса гироскопа (рис. 106) расположена вертикально. Нетрудно заметить, что в указанных условиях работы гироскопа направления достаточно соблюсти перпендикулярность между кардановыми кольцами, чтобы обеспечить горизонтальное положение его главной оси OA. Такая схема нивелирования, получившая название межрамочной коррекции, нашла широкое применение во многих конструкциях гироскопов направления.

Принцип устройства межрамочной коррекции уже был описан в § 45. По внутренней оси OB (см. рис. 101) устанавливается потенциометр $П_B$, управляющий датчиком моментов $ДМ_C$. При нарушении перпендикулярности между осями OA и OC с потенциометра $П_B$ снимается напряжение, поступающее на датчик моментов $ДМ_C$. Создавая внешний момент относительно наружной оси в соответствующем направлении, датчик обеспечивает восстановление перпендикулярности между осями OA и OC гироскопа.

Для работы нивелирующих устройств часто используется энергия воздуха, сжимаемого вращающимся ротором. С этой целью ротор гироскопа монтируют не во внутреннем кардановом кольце $ВК$, как показано на схеме рис. 106, а в специальной камере (рис. 113). Гироскопическая камера — гирокамера — монтируется так же, как и внутреннее кольцо подвеса, на опорах, расположенных по оси BB в наружном кардановом кольце гироскопа. Выполняя функцию внутреннего карданова кольца, гирокамера является одновременно и кожухом, закрывающим со всех сторон тело ротора.

При вращении ротора с достаточно большой угловой скоростью вокруг оси AA частицы воздуха, находящиеся внутри гирокамеры, вследствие действия сил трения увлекаются вращающимся ротором. При этом, как только частицы воздуха будут приведены во вращение вокруг оси AA, они в силу инерции своей массы начнут перемещаться к периферии ротора, создавая у обода гирокамеры избыточное давление, а вблизи оси AA — вакуум. Вследствие образовавшегося вакуума во внутреннюю полость гирокамеры, через отверстия в ее крышках, начнет поступать атмосферный воздух. Тем самым создается непрерывный «подпор» воздуха между ротором и ободом гирокамеры. На рис. 114 приведена полученная экспериментально кривая изменения перепада давления воздуха внутри гирокамеры на промежутке от оси AA вращения ротора до его обода.

Если по ободу гирокамеры выфрезеровать отверстия той или иной формы (см. рис. 113), то воздух, находящийся под давлением внутри гирокамеры, будет выходить за ее пределы с некоторой скоростью, зависящей от перепада давлений внутри и вне камеры. В некоторых конструкциях гироскопов направления такие от-

верстия осуществляются в непосредственной близости от внутренней оси OB подвеса гироскопа (рис. 115). Наружное карданово кольцо HK также снабжают отверстиями, которые при перпендикулярном положении осей OA и OC находятся точно против

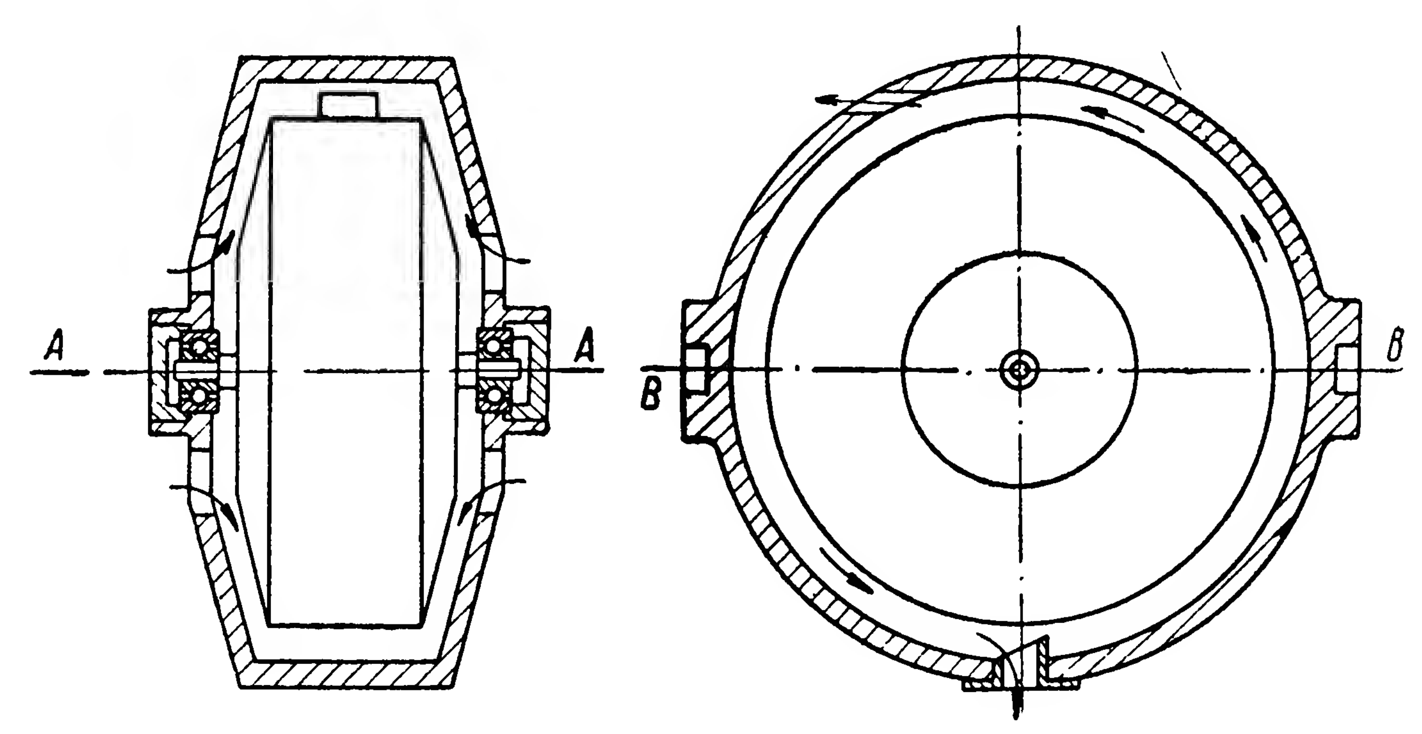


Рис. 113. Гирокамера.

выходных отверстий гирокамеры. С наружной стороны кольца подвеса HK приемные отверстия закрыты специальными полыми резервуарами Q, снабженными струераздельным ножом N. Каждый резервуар Q имеет два выходных отверстия, расположенных строго по оси aa, перпендикулярной к плоскости COB наружного кольца подвеса гироскопа.

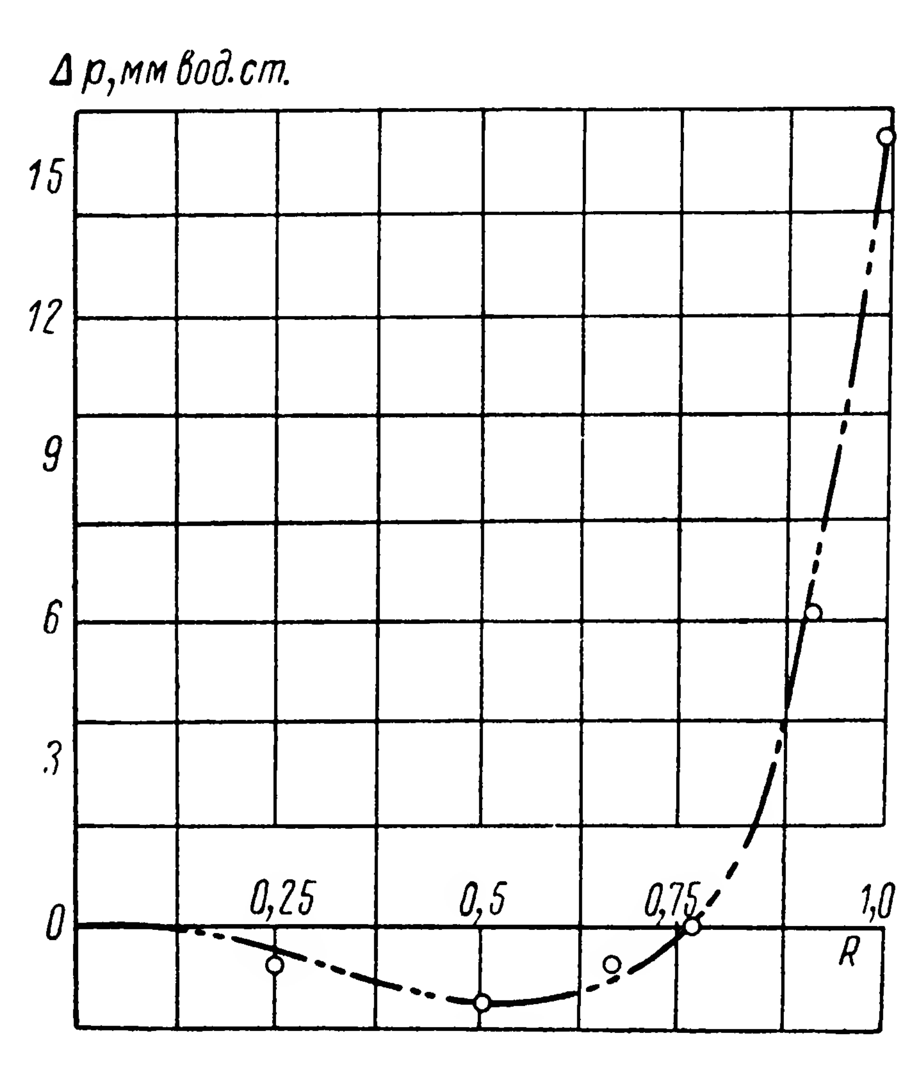


Рис. 114. Кривая перепада давления Δp воздуха внутри гирокамеры (R — радиус ротора).

Если оси OA и OC перпендикулярны, струя воздуха, выходя из гирокамеры и попадая в приемное отверстие наружного кольца, делится струераздельным ножом N точно на две равные части. Равные количества воздуха, выходя из отверстий резервуара, создают одинаковые по величине, но противоположные по направлению реактивные силы. Их сумма будет равна нулю, и, следовательно, реакция струи воздуха никакого влияния на гироскоп оказывать не будет. Но как только главная ось OA гироскопа изменит свое положение относительно наружного кольца, совершив поворот вокруг оси OB, выходное отверстие гирокамеры

сразу же сместится по отношению к приемному отверстию на наружном кольце $НК$. Струя воздуха, выбрасываемая из выходного отверстия гирокамеры, будет теперь попадать в резервуар Q только по одну сторону ножа N и выходить из резервуара Q в атмосферу из одного отверстия, создавая реактивную силу F, направленную перпендикулярно плоскости COB наружного

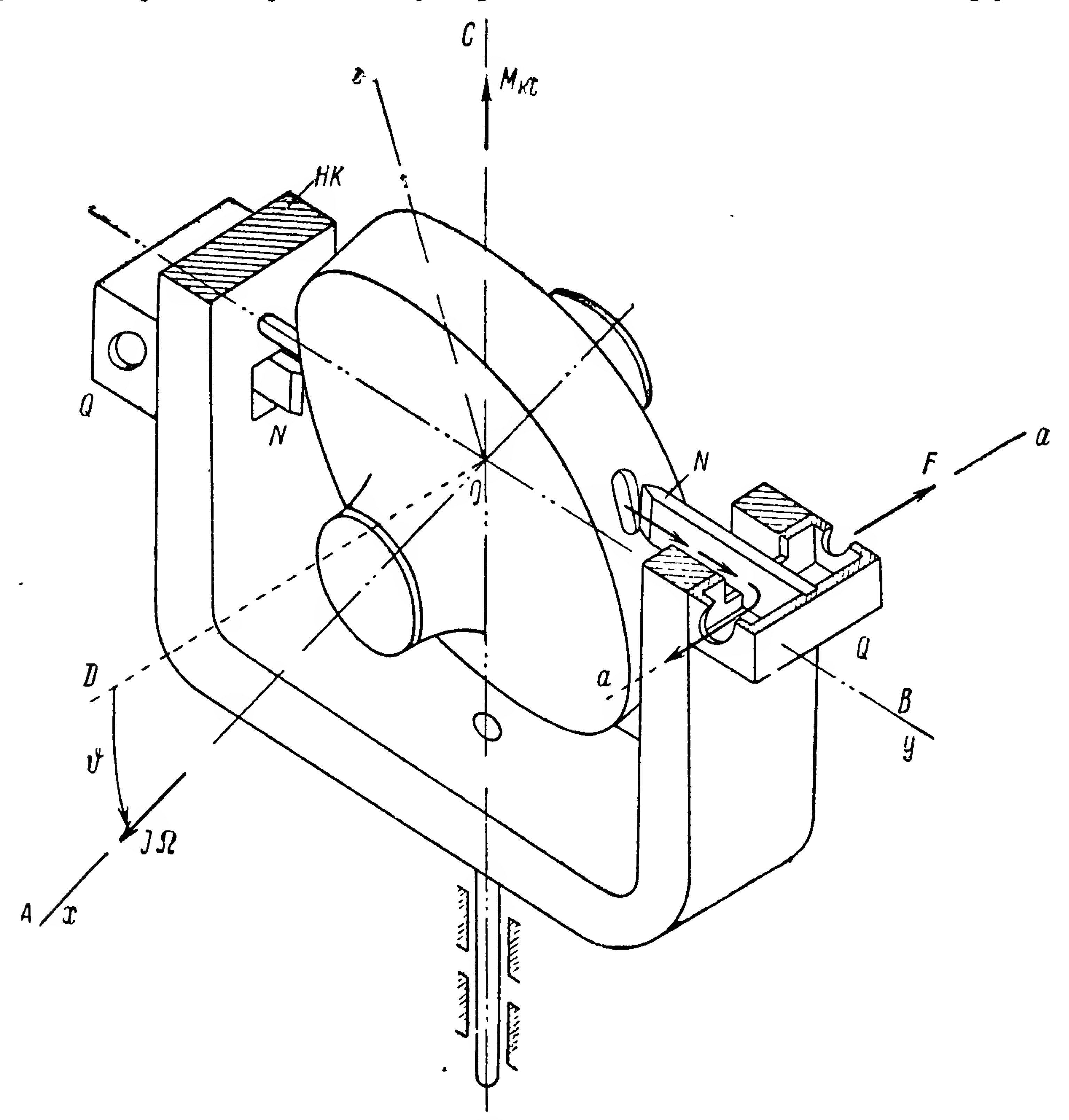


Рис. 115. Пневматическое нивелирующее устройство.

кольца. В результате сила F создаст относительно оси OC реактивный момент $M_{кC}$, который будет являться внешним для гироскопа. Под действием момента $M_{кC}$ гироскоп получит прецессионное движение вокруг оси OB, которое будет продолжаться до тех пор, пока главная ось OA гироскопа вновь не совместится с осью OD. Иными словами, указанная прецессия гироскопа будет продолжаться до того мгновения, пока ось OA вновь не займет перпендикулярное положение по отношению к наружной оси OC подвеса гироскопа направления.

Если выходные отверстия разместить на ободе гирокамеры на значительном расстоянии от оси OB (рис. 116), то выходящий

из них направленными струями воздух будет создавать реактивный момент $2Fl$ относительно оси OA. При перпендикулярности осей OA и OC реактивные силы F воздушных струй будут действовать в плоскости COB наружного кольца подвеса. Поэтому создаваемый ими реактивный момент $2Fl$ будет погашаться реакцией опор, расположенных по наружной оси OC подвеса гироскопа (рис. 116, *а*).

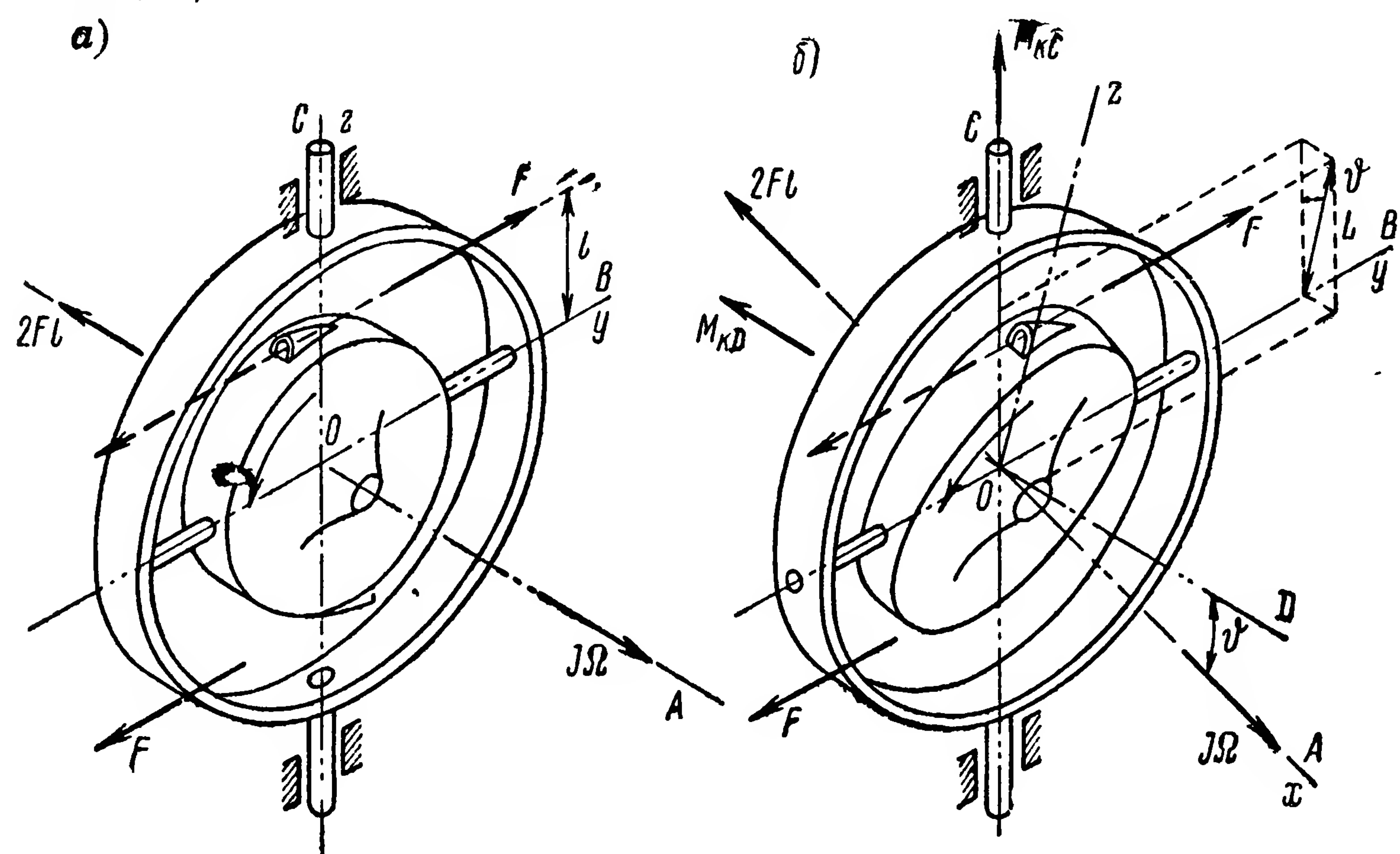


Рис. 116. Принципиальная схема воздушной коррекции.

При повороте гироскопа вокруг оси OB на угол ϑ (рис. 116, *б*) реактивный момент $2Fl$, действующий относительно оси OA, будет проектироваться и на оси OC и OD. Значения этих проекций будут равны

$$M_{\text{к}\,D} = 2Fl\cos\vartheta; \quad M_{\text{к}\,C} = 2Fl\sin\vartheta,$$

где $l\cos\vartheta$ и $l\sin\vartheta$ — расстояния от выходных отверстий до осей OD и OC соответственно.

Так же, как и в предыдущем случае, момент $M_{\text{к}\,D}$ будет погашаться реакцией опор наружной оси OC подвеса, однако момент $M_{\text{к}\,C}$, действующий относительно оси OC, вызовет прецессионное движение гироскопа вокруг оси OB, в процессе которого угол ϑ будет уменьшаться. Соответственно будет уменьшаться и внешний момент $2Fl\sin\vartheta$, а следовательно, и угловая скорость $\dot{\vartheta}$ прецессионного движения, которое прекратится полностью, как только ось Oz вновь совместится с осью OC и угол ϑ станет равным нулю. Для подтверждения сказанного на рис. 117 приведен экспериментальный график зависимости нивелирующего момента $M_{\text{к}\,C}$ корректирующего устройства, выполненного по схеме рис. 116, от угла ϑ поворота гирокамеры.

Устройства для нивелирования главной оси гироскопа в горизонтальной плоскости, выполненные по описанным выше схе-

мам, нормально работают лишь при горизонтальных перемещениях объектов. В тех случаях, когда объект в процессе движения выходит из горизонтального положения, межрамочная коррекция порождает ошибки в показаниях гироскопа направления, возникающие при курсовых эволюциях объекта. В целях предупреждения таких ошибок в некоторых моделях гироскопов направления в нивелирующих устройствах применяют корректирующие маятники, аналогичные использованному в схеме на рис. 101. Подобные системы называют обычно маятниковыми нивелирующими устройствами.

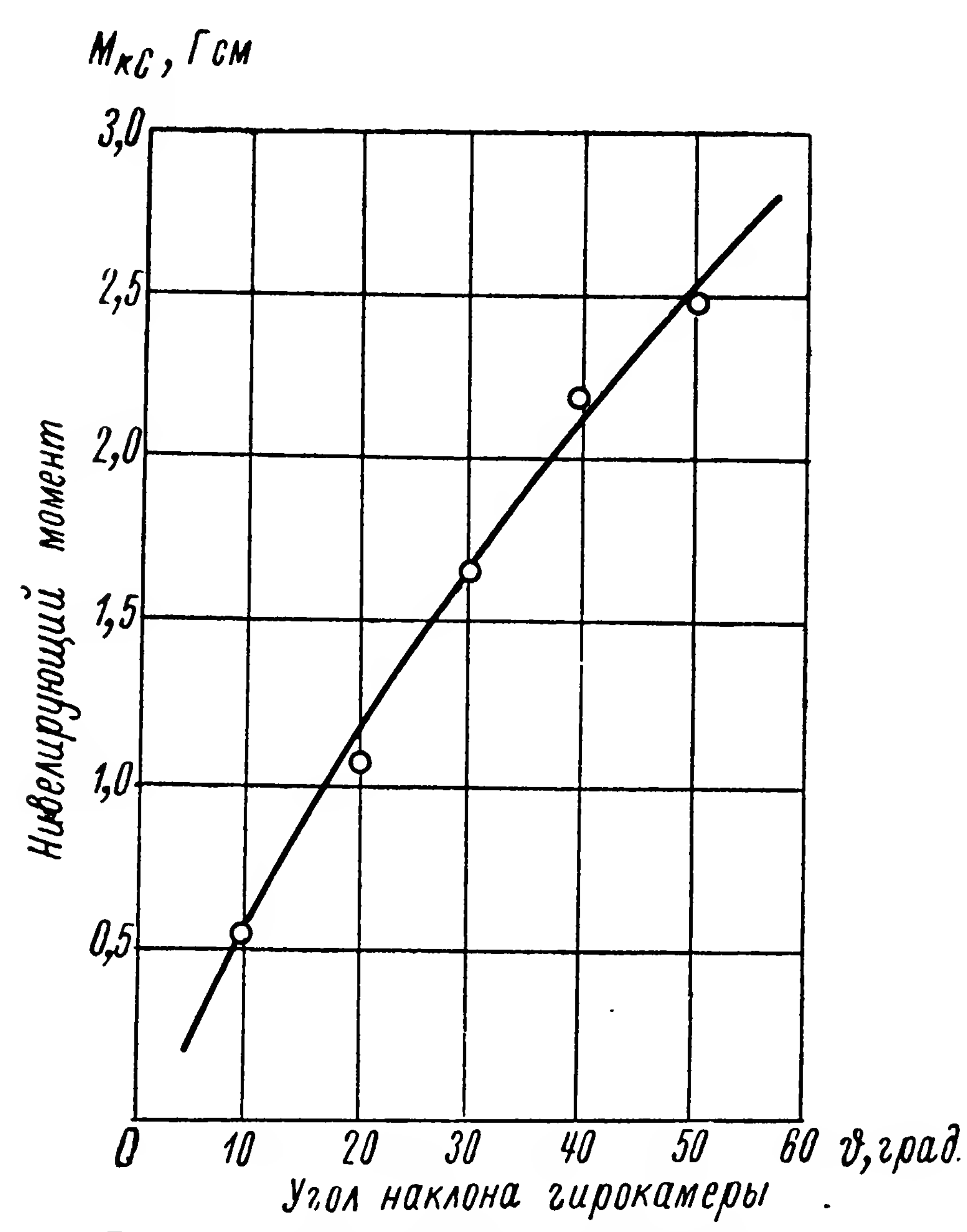


Рис. 117. График зависимости нивелирующего момента $M_{кС}$ от угла ϑ.

Устанавливая маятник-измеритель на внутреннем кардановом кольце или гирокамере гироскопа, получают возможность фиксировать углы наклона его главной оси непосредственно по отношению к плоскости горизонта.

Один из конструктивных вариантов маятникового нивелирующего устройства приведен на рис. 118. В переходной втулке, на которой монтируются подшипники оси подвеса гирокамеры в наружном кардановом кольце, выбраны специальные отверстия, перекрываемые плоским маятником L, ось подвеса которого закреплена в теле гирокамеры. При наклоне главной оси гироскопа относительно плоскости горизонта маятник L откроет одно из отверстий втулки, освободив выход для струи сжатого воздуха по направлению aa. Возникающая в результате истечения воздуха сила реакции F создаст момент $M_{кz} = Fl$, действующий на гироскоп относительно оси Oz. Как и в предыдущих случаях, наличие внешнего момента $M_{кz}$ вызовет у гироскопа прецессионное движение вокруг оси OB, которое будет продолжаться до тех пор, пока его главная ось OA не примет горизонтального положения. В этот момент маятник L вновь перекроет оба отверстия, преградив тем самым выход сжатому воздуху из гирокамеры.

Описанные схемы пневматических устройств нивелирования весьма просты, но создают малую величину реактивного момента.

Увеличение реактивного момента требует повышения давления воздуха внутри гирокамеры, что практически можно осуществить посадив на ротор специальные лопасти и выполняя гирокамеру сплошной, без вентиляционных отверстий. Однако указанные изменения влекут за собой увеличение потребляемой прибором мощности, чрезмерный нагрев прибора, засасывание смазки из опор главной оси внутрь гирокамеры и т. п. Вот почему в тех приборах, где для удержания главной оси гироскопа в плоскости горизонта необходим сравнительно большой корректирующий момент, приходится применять электрические схемы нивелирования.

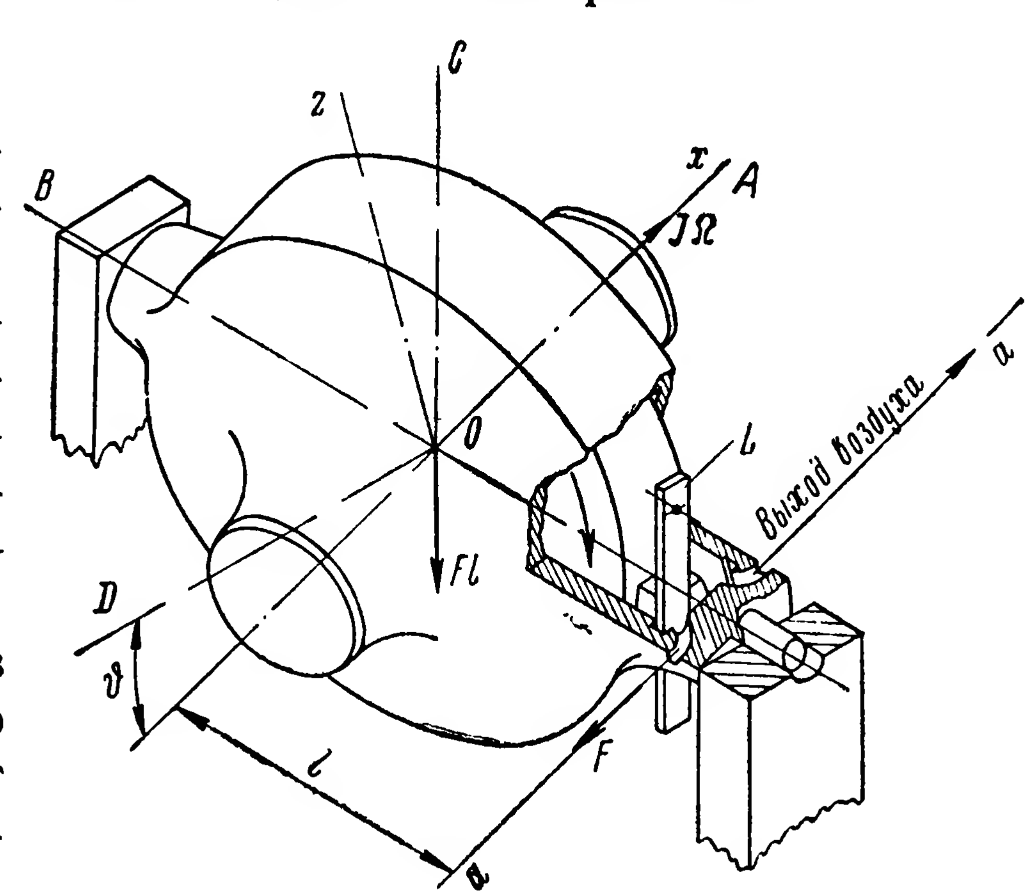


Рис. 118. Маятниковая коррекция.

Так же, как и в предыдущих, в электрических схемах в качестве измерительного органа используется маятник L (рис. 119), который устанавливается на внутреннем кольце или гирокамере прибора. Одновременно на внутреннем кольце устанавливаются либо потенциометр, как это было выполнено в схеме на рис. 101, либо две изолированные друг от друга и корпуса прибора контактные ламели a_1 и a_2. Маятник L является токопроводящей деталью схемы, он соединен электрически с массой внутреннего кольца, а через нее и с корпусом прибора. Таким образом, при наклоне гироскопа относительно плоскости горизонта маятник L, сохраняя отвесное положение, замкнет правый a_2 или левый a_1 контакты и включит ток в обмотку одного из поворотных электромагнитов *ПЭ*. Возникающий при этом магнитный поток стремится повернуть вокруг оси *OC* неподвижно закрепленный на наружном кольце гироскопа якорь *Я*, создавая тем самым в системе гироскопа внешний момент, действующий относительно оси *OC*. В зависимости от наклона гироскопа внешний момент будет либо положительным, либо отрицательным, обеспечивая в каждом случае такое направление прецессионного движения, которое приведет гироскоп в плоскость горизонта.

Чтобы якорь *Я* каждый раз занимал симметричное положение между двумя поворотными электромагнитами, их сердечники монтируют на диске *Д*, имеющем свободу вращения вокруг оси *OC*. На диске *Д* устанавливаются контактные полукольца b_1 и b_2, по которым может перемещаться ролик r, так же как и якорь *Я*, участвующий в поворотах гироскопа вокруг оси *OC*. Вращение

гироскопа вокруг оси *ОС* вызовет смещение ролика *r* от нейтрального положения между контактными полукольцами b_1 и b_2. В результате одно из них будет включено в электрическую сеть прибора, благодаря чему будет подан ток в один из электромагнитов промежуточного реле *ПР*.

Срабатывание промежуточного реле *ПР* вызовет перемещение одного из подвижных контактов *Р* из верхнего положения, в котором он удерживается пружинами f_1 или f_2, в нижнее. Тем

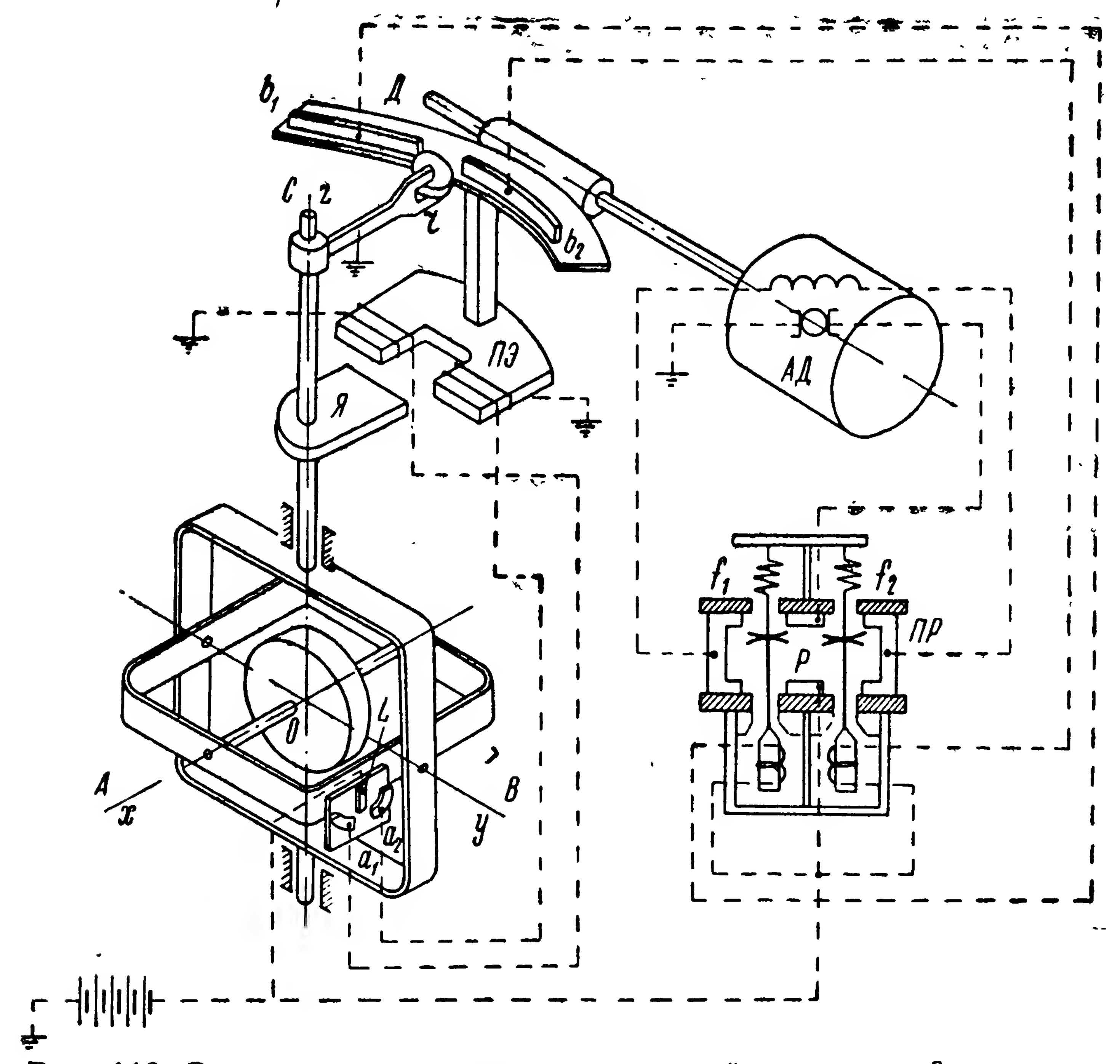


Рис. 119. Электрическая схема маятниковой коррекции гироскопа направления.

самым будет включено питание в цепь электродвигателя *АД*, вал которого связан с диском *Д* посредством червячной передачи. Соединение обмоток двигателя *АД* с контактными пластинами промежуточного реле *ПР* выполнено так, чтобы при смещении ролика *r* относительно зазора между ламелями b_1 и b_2 электродвигатель *АД* поворачивал диск *Д* до нового совмещения ролика *r* с межламельным зазором.

Как только диск *Д* займет положение, при котором ролик *r* вновь установится между ламелями b_1 и b_2, ток, питающий обмотку электромагнита реле *ПР*, прервется и питание двигателя выключится. Поворотные электромагниты в этот момент вновь займут положение, симметричное относительно якоря *Я*.

Как видим, при вращении гироскопа вокруг оси OC диск $Д$ автоматически следит за положением гироскопа, совмещая оси симметрии якоря $Я$ и башмаков электромагнита $ПЭ$. Поэтому указанное устройство получило название следящей системы, а электродвигатель $АД$, поворачивающий следящую систему в азимуте вокруг вертикальной оси OC, — азимут-двигателя.

§ 51. ДВИЖЕНИЕ ГИРОСКОПА НАПРАВЛЕНИЯ С МЕЖРАМОЧНЫМ НИВЕЛИРОВАНИЕМ ПРИ НЕПОДВИЖНОМ ПОЛОЖЕНИИ ЕГО ОСНОВАНИЯ НА ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Включение в схему гироскопа направления нивелирующего устройства оказывает влияние на движение гироскопа. Характер этого влияния зависит от конструкции нивелирующего устройства. Выясним, как влияет на движение гироскопа направления межрамочное нивелирующее устройство, если основание гироскопа неподвижно на земной поверхности. Обращаясь к системе (291), учтем в ней особенности, характеризующие работу рассматриваемого гироскопического прибора.

Из описания схемы межрамочной коррекции следует, что на гироскоп относительно оси OB действует момент Gl (см. рис. 108) и относительно оси OC — момент, создаваемый нивелирующим устройством. Величина последнего пропорциональна углу ϑ рассогласования между осями Oz и OC (см. рис. 115) и равна $K_C\vartheta$, где K_C — коэффициент пропорциональности. Кроме того, при межрамочной коррекции угол $\vartheta_0 = 0$. При этих условиях система (291), если опустить в ней моменты сил трения в опорах подвеса, принимает вид

$$J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\,(\dot{\psi} + \Omega_з \sin\varphi) = Gl;$$

$$J_C\ddot{\psi} - J\Omega\,(\dot{\vartheta} - \Omega_з \cos\varphi \sin\psi_0) = K_C\vartheta,$$

или, если учесть условия (301),

$$\left.\begin{aligned} &J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\psi} = 0; \\ &J_C\ddot{\psi} - J\Omega\dot{\vartheta} - K_C\vartheta = -J\Omega\Omega_з \cos\varphi \sin\psi_0. \end{aligned}\right\} \qquad (317)$$

Система (317) имеет частное решение

$$\vartheta_r = \frac{J\Omega\Omega_з \cos\varphi \sin\psi_0}{K_C}; \quad \psi_r = 0. \qquad (318)$$

Соответствующая ей однородная система дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\psi} = 0, \\ &J_C\ddot{\psi} - J\Omega\dot{\vartheta} - K_C\vartheta = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (319)$$

может быть решена следующим образом. Определим из первого уравнения (319)

$$\dot{\psi} = -\frac{J_B}{J\Omega}\ddot{\vartheta} \tag{320}$$

и подставим значение $\ddot{\psi}$ во второе уравнение системы (319), тогда

$$\frac{J_B J_C}{J\Omega}\dddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\vartheta} + K_C\vartheta = 0.$$

Характеристическое уравнение в этом случае будет иметь вид

$$p^3 + \frac{J^2\Omega^2}{J_B J_C}p + \frac{J\Omega K_C}{J_B J_C} = 0. \tag{321}$$

Для определения корней характеристического уравнения (321) воспользуемся (по аналогии с изложенным в § 23) формулами Кардана (135). С этой целью вычислим вспомогательные величины

$$u = \sqrt[3]{-\frac{J\Omega K_C}{2J_B J_C} + \sqrt{\left(\frac{J\Omega K_C}{2J_B J_C}\right)^2 + \left(\frac{J^2\Omega^2}{3J_B J_C}\right)^3}};$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{J\Omega K_C}{2J_B J_C} - \sqrt{\left(\frac{J\Omega K_C}{2J_B J_C}\right)^2 + \left(\frac{J^2\Omega^2}{3J_B J_C}\right)^3}}.$$

Пользуясь приближенными методами извлечения корней, [1] приведенные равенства можно переписать в следующем виде:

$$u \approx \sqrt[3]{-\frac{J\Omega K_C}{2J_B J_C} + \frac{J^3\Omega^3}{\sqrt{(3J_B J_C)^3}} + \frac{3K_C^2}{8\sqrt{J_B J_C}J\Omega}};$$

$$v \approx \sqrt[3]{-\frac{J\Omega K_C}{2J_B J_C} - \frac{J^3\Omega^3}{\sqrt{(3J_B J_C)^3}} - \frac{3K_C^2}{8\sqrt{J_B J_C}J\Omega}}.$$

Нетрудно заметить, что третье слагаемое полученных выражений представляет собой величину более высокого порядка малости по сравнению с двумя другими членами. Пренебрегая на этом основании третьим слагаемым, будем иметь

$$u \approx \sqrt[3]{\frac{J^3\Omega^3}{\sqrt{(3J_B J_C)^3}} - \frac{J\Omega K_C}{2J_B J_C}};$$

$$v \approx -\sqrt[3]{\frac{J^3\Omega^3}{\sqrt{(3J_B J_C)^3}} + \frac{J\Omega K_C}{2J_B J_C}}.$$

Дальнейшее преобразование дает

$$u \approx \frac{J\Omega}{\sqrt{3J_B J_C}} - \frac{K_C}{2J\Omega}; \quad v \approx -\frac{J\Omega}{\sqrt{3J_B J_C}} - \frac{K_C}{2J\Omega}.$$

[1] См. «Энциклопедический справочник». Машиностроение, т. I, кн. 1, ГНТИ, 1947, стр. 111.

Таким образом, в соответствии с выражениями (135) корни исследуемого характеристического уравнения (321) будут определяться значениями

$$p_{1,2} = \frac{K_C}{2J\Omega} \pm i\frac{J\Omega}{\sqrt{J_B J_C}}; \quad p_3 = -\frac{K_C}{J\Omega}.$$

Согласно изложенному в § 13 решение системы дифференциальных уравнений (317) для переменной ϑ с учетом (318) может быть записано в виде

$$\vartheta = e^{\frac{K_C}{2J\Omega}t}(C_1\cos nt + C_2\sin nt) + \\ + C_3e^{-\frac{K_C}{J\Omega}t} + \frac{J\Omega\Omega_3\cos\varphi\sin\psi_0}{K_C}, \tag{322}$$

где $n = \frac{J\Omega}{\sqrt{J_B J_C}}$ — частота нутационных колебаний.

Для определения угла ψ проинтегрируем зависимость (320):

$$\psi = -\frac{J_B}{J\Omega}\dot{\vartheta} + C_4. \tag{323}$$

Продифференцировав выражение (322), найдем

$$\dot{\vartheta} = \frac{K_C}{2J\Omega}e^{\frac{K_C}{2J\Omega}t}(C_1\cos nt + C_2\sin nt) + \\ + e^{\frac{K_C}{2J\Omega}t}\frac{J\Omega}{\sqrt{J_B J_C}}(-C_1\sin nt + C_2\cos nt) - \frac{K_C}{J\Omega}C_3e^{-\frac{K_C}{J\Omega}t}.$$

После подстановки найденного значения $\dot{\vartheta}$ в уравнение (323) получим

$$\psi = -\frac{J_B K_C}{2J^2\Omega^2}e^{\frac{K_C}{2J\Omega}t}(C_1\cos nt + C_2\sin nt) + \\ + \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}e^{\frac{K_C}{2J\Omega}t}(C_1\sin nt - C_2\cos nt) + \\ + \frac{J_B K_C}{J^2\Omega^2}C_3e^{-\frac{K_C}{J\Omega}t} + C_4. \tag{324}$$

Если в формуле (324) пренебречь первым слагаемым как величиной малой, то зависимости (322) и (324) примут более простой вид:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= e^{\frac{K_C}{2J\Omega}t}(C_1\cos nt + C_2\sin nt) + C_3e^{-\frac{K_C}{J\Omega}t} + \\ &\quad + \frac{J\Omega\Omega_3\cos\varphi\sin\psi_0}{K_C}; \\ \psi &= e^{\frac{K_C}{2J\Omega}t}\sqrt{\frac{J_B}{J_C}}(C_1\sin nt - C_2\cos nt) + \\ &\quad + \frac{J_B K_C}{J^2\Omega^2}C_3e^{-\frac{K_C}{J\Omega}t} + C_4. \end{aligned}\right\} \tag{325}$$

Первые слагаемые (325) описывают нутационные колебания гироскопа направления, вторые — его прецессионное движение. При отсутствии сил трения в опорах подвеса амплитуды нутационных колебаний гироскопа направления с межрамочным нивелирующим устройством постепенно возрастали бы. Между тем, силы трения практически существуют. Поэтому в действительности амплитуды нутационных колебаний не смогут превысить определенного предела, обусловливаемого величиной угловой скорости вращения основания прибора вокруг соответствующей оси подвеса гироскопа (см. § 36). Как только амплитуда угловой скорости нутации превысит значение угловой скорости основания гироскопа (см. рис. 68), знак момента сил трения станет противоположным знаку угловой скорости нутационных колебаний, что и вызовет их демпфирование.

Опуская на этом основании в выражениях (325) слагаемые, описывающие нутационные колебания, рассмотрим лишь прецессионное движение гироскопа:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= C_3 e^{-\frac{K_C}{J\Omega}t} + \frac{J\Omega\Omega_3 \cos\varphi \sin\psi_0}{K_C}; \\ \psi &= \frac{J_B K_C}{J^2\Omega^2} C_3 e^{-\frac{K_C}{J\Omega}t} + C_4. \end{aligned}\right\} \qquad (326)$$

При начальных условиях

$$\vartheta(0) = \vartheta_0, \quad \psi(0) = \psi_0 \qquad (327)$$

постоянные интегрирования C_3 и C_4 определяются зависимостями

$$C_3 = \vartheta_0 - \frac{J\Omega\Omega_3 \cos\varphi \sin\psi_0}{K_C};$$

$$C_4 = \psi_0 - \frac{J_B K_C}{J^2\Omega^2}\left(\vartheta_0 - \frac{J\Omega\Omega_3 \cos\varphi \sin\psi_0}{K_C}\right),$$

или, если пренебречь малыми величинами,

$$C_3 = \vartheta_0 - \frac{J\Omega\Omega_3 \cos\varphi \sin\psi_0}{K_C}; \quad C_4 = \psi_0.$$

Подставив вычисленные значения постоянных интегрирования в выражения (326), будем иметь

$$\vartheta = \left(\vartheta_0 - \frac{J\Omega\Omega_3 \cos\varphi \sin\psi_0}{K_C}\right) e^{-\frac{K_C}{J\Omega}t} + \frac{J\Omega\Omega_3 \cos\varphi \sin\psi_0}{K_C};$$

$$\psi = \frac{J_B K_C}{J^2\Omega^2}\left(\vartheta_0 - \frac{J\Omega\Omega_3 \cos\varphi \sin\psi_0}{K_C}\right) e^{-\frac{K_C}{J\Omega}t} + \psi_0.$$

Из полученных выражений следует, что первое слагаемое второго равенства — величина высшего порядка малости по сравнению с остальными. Поэтому, пренебрегая им, можем записать

$$\left.\begin{aligned}\vartheta &= \left(\vartheta_0 - \frac{J\Omega\Omega_3\cos\varphi\sin\psi_0}{K_C}\right)e^{-\frac{K_C}{J\Omega}t} + \frac{J\Omega\Omega_3\cos\varphi\sin\psi_0}{K_C};\\ \psi &= \psi_0.\end{aligned}\right\} \quad (328)$$

Проследим за движением гироскопа направления с нивелирующим устройством по перемещению его полюса на картинной плоскости. В соответствии с условиями (327) полюс гироскопа в начальный момент времени будет проектироваться на картинную плоскость (рис. 120) в точку a с координатами ϑ_0 и ψ_0. Из этой точки полюс гироскопа начнет перемещаться вдоль оси $O^*\vartheta$ к совмещению с осью $O^*\psi$. Как видим, главная ось гироскопа, поворачиваясь под действием корректирующего момента, создаваемого нивелирующим устройством, будет двигаться к плоскости горизонта. Однако полного совмещения ее с горизонтальной плоскостью не произойдет, и согласно (328) главная ось гироскопа составит с плоскостью горизонта угол

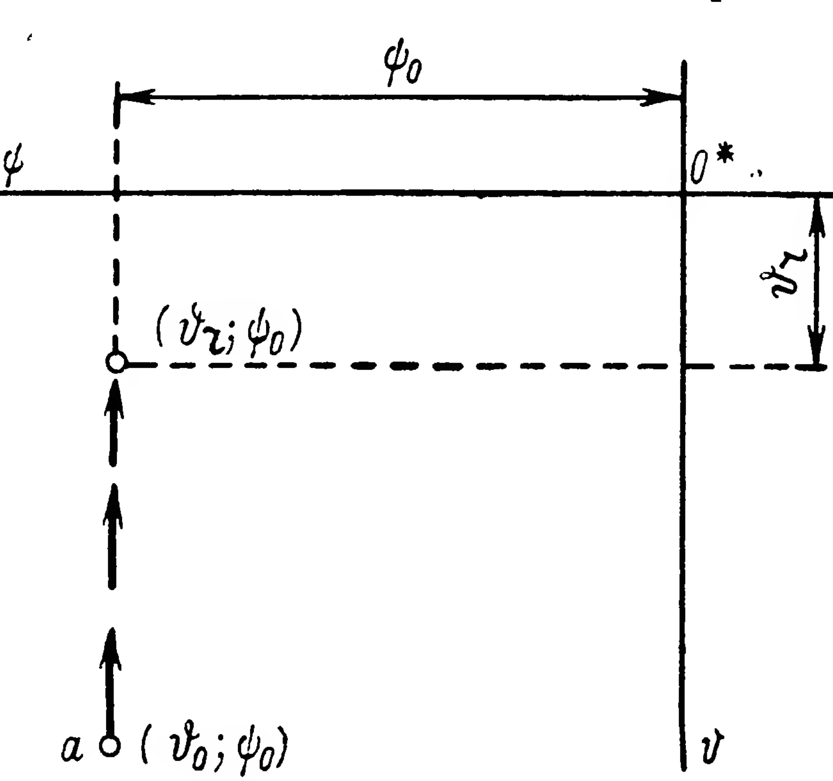


Рис. 120. Траектория перемещения полюса гироскопа направления на картинной плоскости при нивелировании его главной оси.

$$\vartheta_r = \frac{J\Omega\Omega_3\cos\varphi\sin\psi_0}{K_C}.$$

Положение главной оси OA гироскопа относительно плоскости $\xi O\zeta$ меридиана (см. рис. 106) остается неизменным, совмещенным с некоторой азимутальной плоскостью, составляющей с плоскостью меридиана угол ψ_0.

Естественно, что силы трения в опорах гироскопической системы, люфты в сочленениях ее отдельных элементов, упругие и температурные деформации и подобные им факторы будут вызывать отклонения гироскопа относительно плоскости меридиана.

§ 52. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА НАПРАВЛЕНИЯ, УСТАНОВЛЕННОГО НА ОБЪЕКТЕ, ПЕРЕМЕЩАЮЩЕМСЯ ПО ЛОКСОДРОМИИ, И ИХ АНАЛИЗ

Исследование движения гироскопа направления при неподвижном на земной поверхности положении точки его подвеса показало, что силы трения в опорах подвеса вызывают его отклоне-

ния как от плоскости меридиана, так и от плоскости горизонта. Если наклон главной оси гироскопа может быть устранен введением в схему прибора нивелирующего устройства, то возникшее отклонение, или девиацию гироскопа направления, от плоскости меридиана устранить не представляется возможным. Поэтому проблема создания гироскопа направления требуемой точности сводится по существу к разработке таких компенсирующих устройств, при наличии которых отклонение гироскопа за единицу времени от плоскости меридиана, т. е. его азимутальный уход или дрейф, не превышало бы допускаемых значений.

С целью выяснения характера движения гироскопа направления, установленного на объекте, в системе (162) учтем, что при горизонтальных перемещениях объекта и при наличии в гироскопе нивелирующего устройства угол ϑ_0 будет оставаться равным нулю. В связи с этим уравнения движения (162), если пренебречь в них величиной $\omega_D\vartheta$ по сравнению с ω_C, примут вид

$$J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\,(\dot{\psi} + \omega_C) = M_B;$$

$$J_C\ddot{\psi} - J\Omega\,(\dot{\vartheta} + \omega_B) = M_C.$$

Опуская из рассмотрения нутационные члены, находим угловые скорости прецессионного движения:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi} &= -\omega_C + \frac{M_B}{J\Omega}; \\ \dot{\vartheta} &= -\omega_B - \frac{M_C}{J\Omega}. \end{aligned}\right\} \qquad (329)$$

Перемещаясь по локсодромии, объект движется горизонтально с углом тангажа $\beta = 0$ и под курсом $\alpha = \text{const}$. При этом условии проекции векторов $\bar{\omega}_\xi$, $\bar{\omega}_\eta$ и $\bar{\omega}_\zeta$ угловых скоростей объекта (183) на оси подвеса гироскопа, главная ось которого составляет угол ψ_0 с плоскостью меридиана, определяются выражениями

$$\left.\begin{aligned} \omega_B &= -\Omega_з \cos\varphi \sin\psi_0 + \frac{V}{R}\cos(\alpha - \psi_0); \\ \omega_C &= \Omega_з \sin\varphi - \frac{V}{R}\sin\alpha \operatorname{tg}\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (330)$$

Смещение центра тяжести системы вдоль оси OA на величину l (см. рис. 108) порождает действие на гироскоп относительно оси OB постоянного момента Gl и обусловливает возникновение моментов сил инерции при ускорениях объекта. Действительно, движение объекта с ускорением $\dot{\bar{V}}$ (рис. 121) вызывает перемещения точки O подвеса гироскопа вдоль осей OA, OB и OC с ускорениями $\dot{V}_A, \dot{V}_B$ и $\dot{V}_C$, определяемыми проекциями вектора $\dot{\bar{V}}$ на перечисленные оси.

Однако масса m гироскопа вследствие своей инертности будет оказывать сопротивление силам, стремящимся сообщить ей ускоренное движение. Возникнут силы инерции $m\dot{V}_A$, $m\dot{V}_B$ и $m\dot{V}_C$, приложенные в центре тяжести O_m гироскопа и направленные противоположно соответствующим ускорениям. Эти силы инерции создадут относительно осей подвеса моменты, соответственно равные

$$M_{\text{и} A} = 0; \quad M_{\text{и} B} = m\dot{V}_C l; \quad M_{\text{и} C} = -m\dot{V}_B l.$$

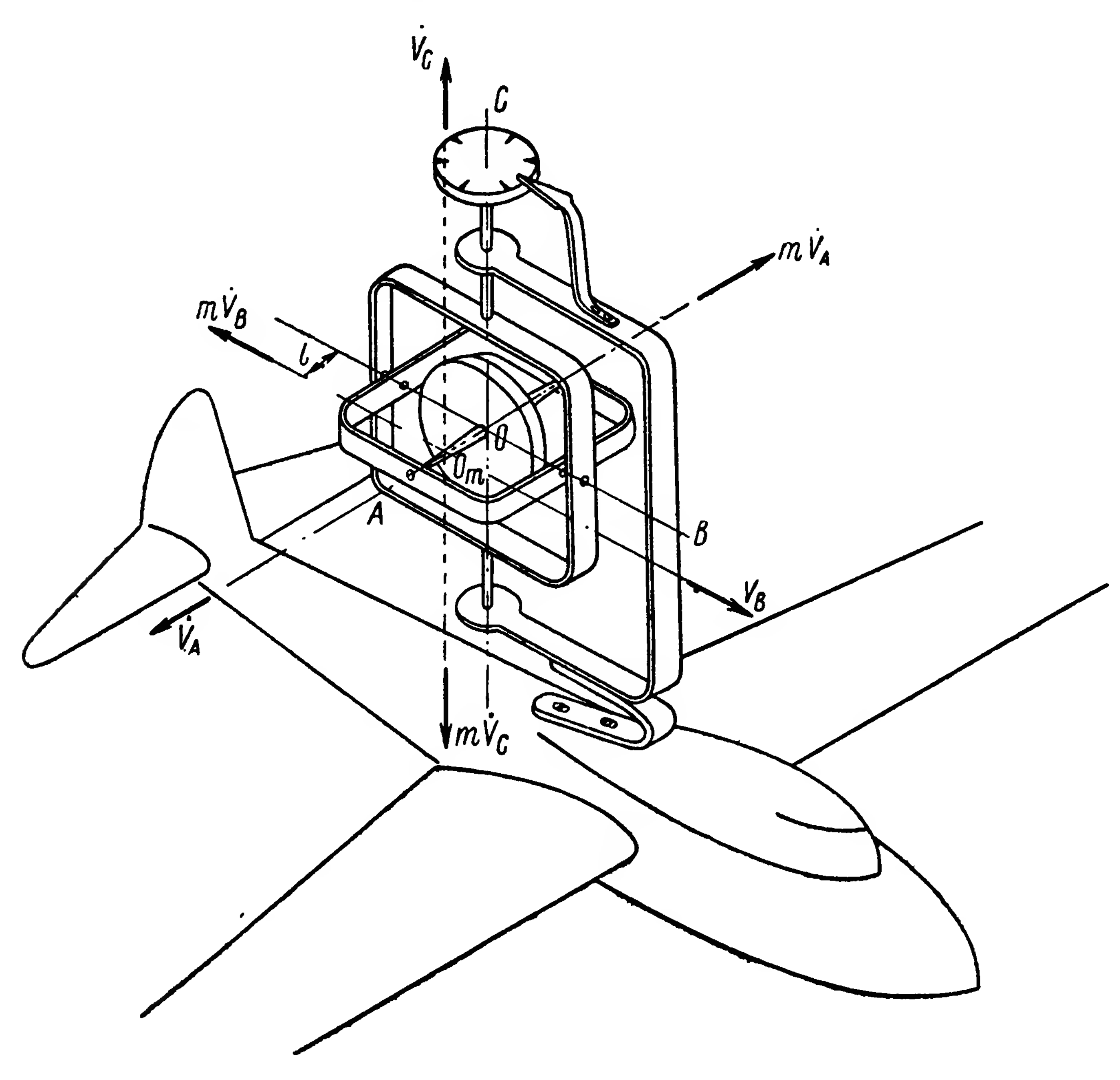


Рис. 121. К определению влияния ускорений объекта на движение гироскопа направления.

При угле ϑ наклона главной оси к плоскости горизонта на гироскоп относительно оси OC начнет действовать корректирующий момент, пропорциональный углу ϑ:

$$M_{\text{к} C} = K_C \vartheta.$$

Наконец, на гироскоп будут действовать моменты сил трения $M_{\text{т} B}$ и $M_{\text{т} C}$ в опорах его подвеса, направленные противоположно угловым скоростям вращения объекта вокруг осей OB и OC (§ 37) и равные

$$M_{\text{т} B} = M_{0\,\text{т} B} \operatorname{sign}(\omega_B); \quad M_{\text{т} C} = M_{0\,\text{т} C} \operatorname{sign}(\omega_C).$$

Суммарные значения моментов внешних сил будут определяться равенствами

$$\left.\begin{aligned} M_B &= Gl + m\dot{V}_C l + M_{0\,\text{т}\,B}\,\text{sign}\,(\omega_B);\\ M_C &= K_C\vartheta - m\dot{V}_B l + M_{0\,\text{т}\,C}\,\text{sign}\,(\omega_C).\end{aligned}\right\} \tag{331}$$

Подставив значения угловых скоростей ω_B и ω_C из (330) и моментов M_B и M_C из (331) в (329), найдем

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi} &= -\Omega_з \sin\varphi + \frac{V}{R}\sin\alpha\,\text{tg}\,\varphi +\\ &+ \frac{Gl + m\dot{V}_C l + M_{0\,\text{т}\,B}\,\text{sign}\,(\omega_B)}{J\Omega};\\ \dot{\vartheta} &= \Omega_з\cos\varphi\sin\psi_0 - \frac{V}{R}\cos(\alpha-\psi_0) -\\ &- \frac{K_C\vartheta - m\dot{V}_B l + M_{0\,\text{т}\,C}\,\text{sign}\,(\omega_C)}{J\Omega}.\end{aligned}\right\} \tag{332}$$

По формулам (332) в каждом конкретном случае можно выяснить изменения во времени угловых скоростей $\dot{\psi}$ и $\dot{\vartheta}$ и тем самым определить отклонения гироскопа направления от плоскостей горизонта и меридиана, порождаемые различными факторами. Зная характер угловых колебаний объекта, можно вычислить (см. гл. V) уход гироскопа, вызываемый моментами $M_{\text{т}\,B}$ и $M_{\text{т}\,C}$ сил трения в опорах подвеса. Закон изменения ускорения $\dot{V}$ позволяет найти угловые скорости

$$\dot{\psi} = \frac{m\dot{V}_C l}{J\Omega}, \qquad \dot{\vartheta} = \frac{m\dot{V}_B l}{J\Omega} \tag{333}$$

отклонения гироскопа от плоскостей меридиана и горизонта, обусловливаемые ускорением объекта.

Для определения уходов гироскопа направления за небольшой промежуток времени можно полагать, что в течение этого времени широта φ практически остается неизменной и равной φ_τ. Такое допущение позволяет переписать выражения (332), пренебрегая в них моментами $M_{0\,\text{т}B}$ и $M_{0\,\text{т}C}$, в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi} &= -\Omega_з\sin\varphi_\tau + \frac{V}{R}\sin\alpha\,\text{tg}\,\varphi_\tau + \frac{Gl + m\dot{V}_C l}{J\Omega};\\ \dot{\vartheta} &= \Omega_з\cos\varphi_\tau\sin\psi_0 - \frac{V}{R}\cos(\alpha-\psi_0) - \frac{K_C\vartheta - m\dot{V}_B l}{J\Omega}.\end{aligned}\right\} \tag{334}$$

Интегрируя первое уравнение системы (334) и полагая ускорение объекта за рассматриваемое время постоянным, находим

$$\psi = \int \dot{\psi}\, dt = -\Omega_3 t \sin\varphi_\tau + \frac{1}{R}\int V\, dt \sin\alpha \operatorname{tg}\varphi_\tau + \frac{G + m\dot{V}_C}{J\Omega} lt + C.$$

Принятое выше допущение требует, чтобы время отсчитывалось от фиксированного момента $t = \tau$. В связи с этим постоянная интегрирования C будет равна начальному значению ψ_0 угла ψ. Таким образом, выражение для угла ψ можно записать в следующем виде:

$$\psi = \psi_0 + \Delta\psi,$$

где

$$\Delta\psi = \left(\frac{G + m\dot{V}_C}{J\Omega} l - \Omega_3 \sin\varphi_\tau\right) t + \frac{1}{R}\int V\, dt \sin\alpha \operatorname{tg}\varphi_\tau. \quad (335)$$

Из второго уравнения (334) следует:

$$\dot{\vartheta} + \frac{K_C}{J\Omega}\vartheta = \Omega_3 \cos\varphi_\tau \sin\psi_0 - \frac{V}{R}\cos(\alpha - \psi_0) + \frac{m\dot{V}_B}{J\Omega} l.$$

Решение последнего уравнения при $\vartheta(0) = \vartheta_0$ будет определяться выражением

$$\vartheta = \vartheta_0 e^{-\frac{K_C}{J\Omega}t} + \frac{J\Omega\Omega_3 \cos\varphi_\tau \sin\psi_0}{K_C} - \frac{J\Omega V}{K_C R}\cos(\alpha - \psi_0) + \frac{m\dot{V}_B}{K_C} l. \quad (336)$$

Как видим, главная ось гироскопа направления с нивелирующим устройством, точка подвеса которого перемещается относительно земной поверхности, удерживается вблизи плоскости горизонта. Угол рассогласования, определяемый тремя последними членами выражения (336), может изменяться во времени в связи с изменениями параметров движения объекта. Однако при правильном выборе конструктивных параметров гироскопической системы угол рассогласования не будет превышать заданного значения при самых неблагоприятных условиях движения объекта.

Как следует из (335), ограничение азимутального ухода гироскопа может быть достигнуто только при соблюдении условия

$$\frac{G + m\dot{V}_C}{J\Omega} l - \Omega_3 \sin\varphi_\tau + \frac{V}{R}\sin\alpha \operatorname{tg}\varphi_\tau = 0.$$

Однако выполнение этого условия связано с определенными трудностями, так как величины V, $\dot{V}_C$, φ_τ, α и R в процессе дви-

жения объекта могут изменяться в широких пределах, в то время как момент $M_{\text{к}B} = Gl$ остается постоянным. Для устранения этого несоответствия в прецизионных гироскопах направления корректирующий момент $M_{\text{к}B}$ регулируют по величине и направлению с тем, чтобы постоянно соблюдалось равенство

$$M_{\text{к}B} = -m\dot{V}_C l + J\Omega\Omega_з \sin\varphi_\tau - J\Omega\frac{V}{R}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi_\tau. \qquad (337)$$

Нетрудно заметить, что в этом случае момент $M_{\text{к}B}$ должен изменяться во времени по весьма сложному закону, зависящему от изменений величин V, α, R и φ_τ. С этой целью в системы современных гироскопов направления весьма часто вводят специальные счетно-решающие устройства, которые и осуществляют необходимое регулирование корректирующего момента $M_{\text{к}B}$, действующего на гироскоп относительно его внутренней оси подвеса.

§ 53. ДВИЖЕНИЕ ГИРОСКОПА НАПРАВЛЕНИЯ С МАЯТНИКОВЫМ НИВЕЛИРУЮЩИМ УСТРОЙСТВОМ

Рассмотренные выше причины, порождающие возникновение ошибок в показаниях гироскопа направления с межрамочной коррекцией, имеют место и в приборах с маятниковым нивелирующим устройством (см. рис. 118 и 119). Для выяснения характера движения такой гироскопической системы будем полагать, что объект, на котором установлен рассматриваемый гироскоп направления, движется с постоянным ускорением $\dot{V}$. Проекции ускорения $\dot{V}$ на неизменно связанные с наружным кардановым кольцом координатные оси $ODBC$ (рис. 122) равны соответственно $\dot{V}_D$, $\dot{V}_B$ и $\dot{V}_C$.

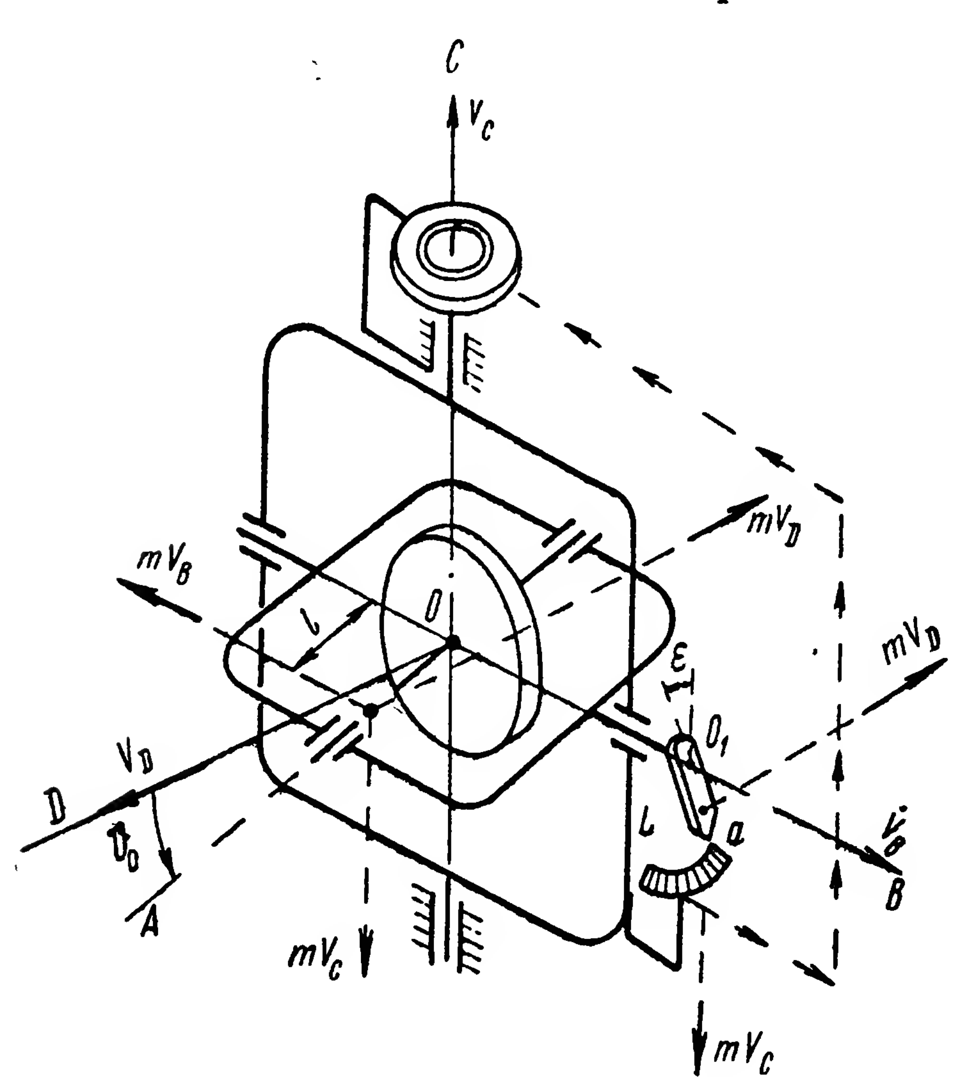


Рис. 122. К определению влияния ускорений объекта на движение гироскопа направления с маятниковым нивелированием.

При маятниковом нивелирующем устройстве (см. рис. 118) ось OA гироскопа направления будет приводиться к совмещению не с осью OD, а с направлением, перпендикулярным продольной оси корректирующего маятника L. Поэтому в общем случае между осями OA и OD может существо-

вать угол рассогласования ϑ_0. (рис. 122). Вследствие смещения центра тяжести гироскопа вдоль его главной оси OA на расстояние l по отношению к точке подвеса O силы инерции массы m гироскопа создадут относительно осей его подвеса моменты

$$M_{\text{и}\,B} = ml(\dot{V}_D \sin\vartheta_0 + \dot{V}_C \cos\vartheta_0);$$
$$M_{\text{и}\,C} = -ml\dot{V}_B.$$

Кроме моментов сил инерции, относительно обеих осей подвеса будут действовать моменты сил сухого трения

$$M_{\text{т}\,B} = -M_{0\,\text{т}\,B}\,\text{sign}(\dot{\vartheta}); \quad M_{\text{т}\,C} = -M_{0\,\text{т}\,C}\,\text{sign}(\dot{\psi}),$$

а также моменты силы веса $Gl \cos\vartheta_0$ относительно оси OB и нивелирующий $M_{\text{к}\,C}$ относительно оси OC.

Рассуждая по аналогии с изложенным в § 46, нетрудно убедиться, что величина момента $M_{\text{к}\,C}$ будет в рассматриваемом случае зависеть не только от угла ϑ между осями OA и OD, но еще и от угла ε отклонения маятника L от вертикали места, которую полагаем параллельной наружной оси OC подвеса гироскопа. Учитывая сказанное, при малой величине угла ε и коэффициенте пропорциональности K_C будем иметь

$$M_{\text{к}\,C} = K_C(\vartheta - \varepsilon).$$

Подставив значения перечисленных моментов в систему уравнений (163), найдем

$$\left.\begin{aligned} &J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega(\dot{\psi} + \omega_C)\cos\vartheta_0 + J\Omega\omega_D \sin\vartheta_0 = \\ &= Gl\cos\vartheta_0 + ml(\dot{V}_D \sin\vartheta_0 + \dot{V}_C\cos\vartheta_0) - M_{0\,\text{т}\,B}\,\text{sign}(\dot{\vartheta}); \\ &J_C\ddot{\psi} - J\Omega(\dot{\vartheta} + \omega_B)\cos\vartheta_0 = K_C(\vartheta - \varepsilon) - ml\dot{V}_B - \\ &\qquad - M_{0\,\text{т}\,C}\,\text{sign}(\dot{\psi}). \end{aligned}\right\} \quad (338)$$

Для решения системы (338) необходимо иметь суждение о характере изменения угла ε. С этой целью обратимся к уравнению (4) и учтем, что, кроме сил трения, относительно оси подвеса маятника будут создавать моменты еще и силы инерции его массы $m_{\text{м}}$. Действуя на плече $l_{\text{м}}$, равном удалению O_1a центра тяжести маятника L от оси OB его подвеса на внутреннем кардановом кольце, силы инерции (рис. 122) будут создавать момент

$$M_{\text{и.\,м}} = m_{\text{м}} l_{\text{м}}(\dot{V}_D \cos\varepsilon - \dot{V}_C \sin\varepsilon),$$

или при малой величине угла ε

$$M_{\text{и.\,м}} = m_{\text{м}} l_{\text{м}}(\dot{V}_D - \dot{V}_C\varepsilon).$$

Таким образом, исходная система уравнений, описывающая движение гироскопа направления с маятниковым нивелирующим устройством, принимает вид

$$\left.\begin{aligned} &J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega(\dot{\psi} + \omega_C)\cos\vartheta_0 + J\Omega\omega_D\sin\vartheta_0 = \\ &= Gl\cos\vartheta_0 + ml(\dot{V}_D\sin\vartheta_0 + \dot{V}_C\cos\vartheta_0) - M_{0\,\text{т}\,B}\,\text{sign}(\dot{\vartheta}); \\ &J_C\ddot{\psi} - J\Omega(\dot{\vartheta} + \omega_B)\cos\vartheta_0 = K_C(\vartheta - \varepsilon) - \\ &\quad - ml\dot{V}_B - M_{0\,\text{т}\,C}\,\text{sign}(\dot{\psi}); \\ &J_\text{м}\ddot{\varepsilon} + m_\text{м}gl_\text{м}\varepsilon = m_\text{м}l_\text{м}(\dot{V}_D - \dot{V}_C\varepsilon) - M_{0\,\text{т.\,и}}\,\text{sign}(\dot{\varepsilon}). \end{aligned}\right\} \quad (339)$$

Выясним характер прецессионного движения гироскопа направления при установившемся режиме его работы. С этой целью из третьего уравнения системы (339) определим его частное решение при $\dot{V}_D = \text{const}$ и $\dot{V}_C = \text{const}$:

$$\varepsilon_r = \frac{\dot{V}_D}{g + \dot{V}_C} \pm \frac{M_{0\,\text{т.\,и}}}{m_\text{м}l_\text{м}(g + \dot{V}_C)}.$$

Подставив найденное значение ε_r в первые два уравнения исследуемой системы и пренебрегая в ней нутационными членами, будем иметь

$$J\Omega(\dot{\psi} + \omega_C)\cos\vartheta_0 + J\Omega\omega_D\sin\vartheta_0 =$$
$$= Gl\cos\vartheta_0 + ml(\dot{V}_D\sin\vartheta_0 + \dot{V}_C\cos\vartheta_0) \pm M_{0\,\text{т}\,B};$$
$$J\Omega(\dot{\vartheta} + \omega_B)\cos\vartheta_0 = -K_C\vartheta + K_C\frac{\dot{V}_D}{g + \dot{V}_C} \pm \frac{K_C M_{0\,\text{т}\,\text{и}}}{m_\text{м}l_\text{м}(g + \dot{V}_C)} +$$
$$+ ml\dot{V}_B \pm M_{0\,\text{т}\,C},$$

откуда находим

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\psi} = -\omega_C - \omega_D\,\text{tg}\,\vartheta_0 + \frac{Gl}{J\Omega} + \frac{ml}{J\Omega}(\dot{V}_D\,\text{tg}\,\vartheta_0 + \dot{V}_C) \pm \\ &\qquad \pm \frac{M_{0\,\text{т}\,B}}{J\Omega\cos\vartheta_0}; \\ &\vartheta_r = -\frac{J\Omega\omega_B}{K_C}\cos\vartheta_0 + \frac{\dot{V}_D}{g + \dot{V}_C} + \frac{ml\dot{V}_B}{K_C} \pm \\ &\qquad \pm \frac{M_{0\,\text{г.\,и}}}{m_\text{м}l_\text{м}(g + \dot{V}_C)} \pm \frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{K_C}. \end{aligned}\right\} \quad (340)$$

Проанализировав первые выражения (340) и (332), убеждаемся, что ускорение $\dot{V}_C$ объекта вдоль наружной оси OC подвеса влияет

на угловую скорость $\dot{\psi}$ азимутального ухода гироскопа направления.

В отличие от гироскопа с межрамочной коррекцией на величину угловой скорости $\dot{\psi}$ гироскопа направления с маятниковым нивелирующим устройством будут оказывать дополнительное влияние угловая скорость ω_D вращения основания вокруг оси OD и ускорение $\dot{V}_D$ объекта вдоль этой оси. Из сопоставления вторых выражений (340) и (332) следует также, что ускорение $\dot{V}_D$ объекта и момент сил трения $M_{0\,т.\,и}$ в опоре подвеса корректирующего маятника будут вызывать дополнительное влияние на величину угла ϑ_r гироскопа направления с маятниковым нивелированием.

§ 54. ГИРОСКОП НАПРАВЛЕНИЯ СО СЧЕТНО-РЕШАЮЩИМ УСТРОЙСТВОМ

Компенсация азимутального ухода гироскопа смещением его центра тяжести вдоль главной оси (см. рис. 108) не во всех случаях приводит к желаемым результатам. Как было показано выше (§ 52), при перемещениях прибора вместе с объектом относительно земной поверхности постоянный корректирующий момент не может обеспечить стабильного положения гироскопа в азимуте. Более того, смещение его центра тяжести относительно точки подвеса порождает при ускоренном движении объекта моменты сил инерции и, как следствие этого, прецессию гироскопа в азимуте.

Для устранения влияния ускорения объекта на точность работы гироскопа направления в приборах центр тяжести гироскопа с максимально возможной точностью совмещают с точкой его подвеса. При этом условии гироскоп, как известно (см. гл. IV), будет непрерывно отклоняться от плоскостей горизонта и меридиана. Для нивелирования главной оси такого гироскопа используются устройства, описанные в § 50. При нарушении перпендикулярности между осями OA и OC электрический сигнал, снимаемый с потенциометра $П_B$ (рис. 123), подается на датчик моментов $ДМ_C$, который создает корректирующий момент относительно оси OC и тем самым восстанавливает нарушенную перпендикулярность.

Для компенсации отклонения гироскопа от плоскости меридиана на оси подвеса наружного карданова кольца жестко крепится диск $Д$, на котором монтируется электрический двигатель $ЭД$ с независимым возбуждением. Угловая скорость вращения вала такого электродвигателя, как известно, [1] пропор-

---

[1] См.: С. П. Колосов. Элементы авиационных автоматических устройств. Оборонгиз, 1958.

циональна величине входного напряжения и может регулироваться в довольно широких пределах. Напряжение, подаваемое на электродвигатель *ЭД*, регулируется таким образом, чтобы его выходной вал вращался вокруг оси *OC* с угловой скоростью, равной по величине, но обратной по направлению угловой скорости азимутального ухода гироскопа. При этом условии курсовая черта картушки *N*, установленной на выходном валу электродвигателя *ЭД*, будет оставаться стабильной по отношению к плоскости меридиана. По положению индекса *L* относительно курсовой черты картушки *N* определяют курс объекта.

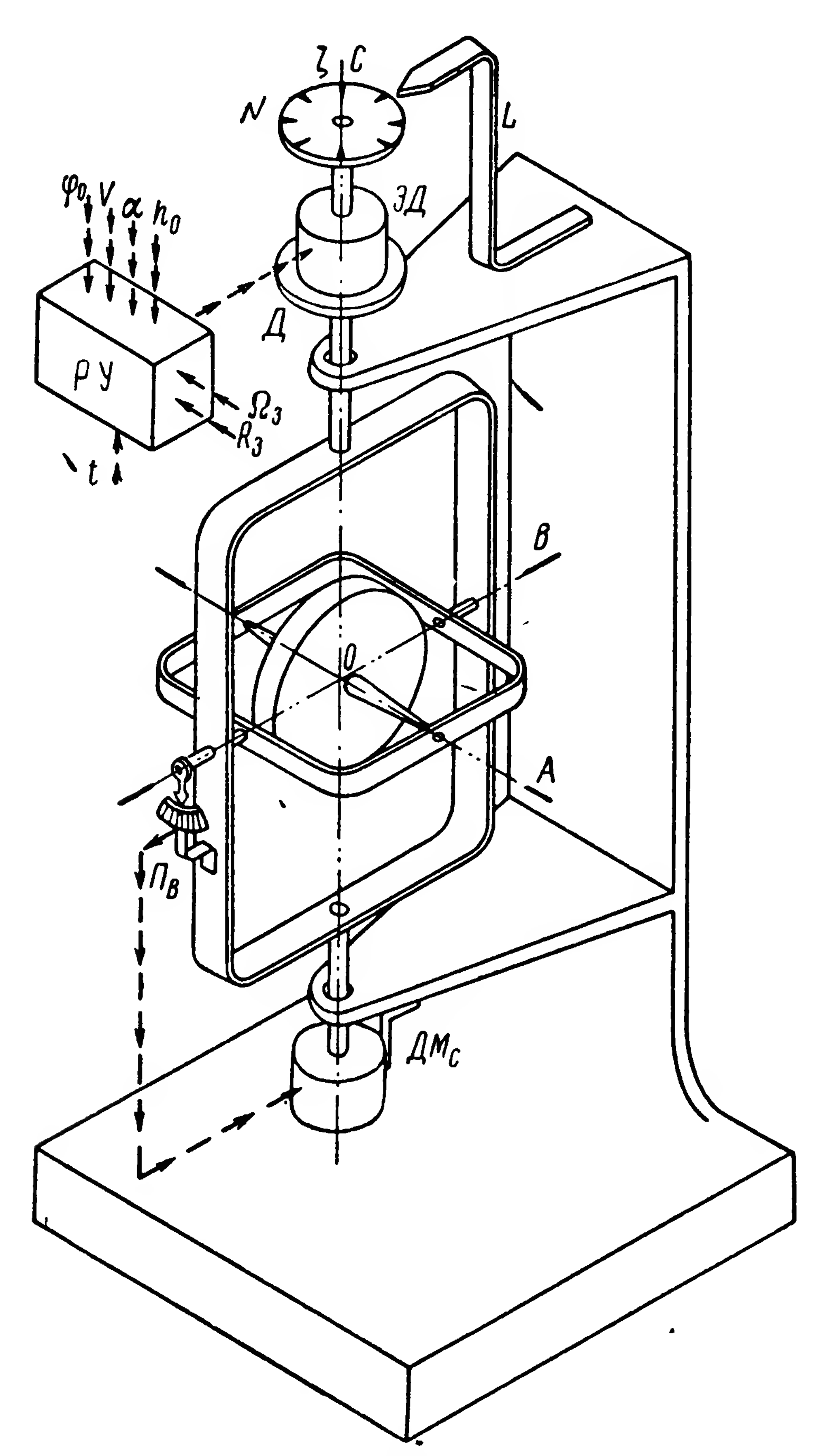


Рис. 123. Гироскоп направления со счетно-решающим устройством.

Если не учитывать действия сил трения в опорах подвеса, то описываемый гироскоп будет отклоняться от плоскости меридиана, поворачиваясь вокруг вертикали $O\zeta$ с угловой скоростью $\dot{\psi} = -\omega_C$. Величина угловой скорости ω_C при движении объекта по локсодромии будет зависеть непосредственно от угловой скорости ω_ζ, определяемой из выражений (183). Таким образом, при $\beta = 0$ отклонение гироскопа от плоскости меридиана будет происходить с угловой скоростью

$$\dot{\psi} = -\Omega_з \sin\varphi + \frac{V}{R} \sin\alpha \operatorname{tg}\varphi.$$

Чтобы курсовая черта картушки *N* оставалась неизменной относительно плоскости меридиана, выходной вал электродвигателя *ЭД* должен вращаться вокруг оси $O\zeta$ с угловой скоростью

$$\omega_N = -\dot{\psi} = \Omega_з \sin\varphi - \frac{V}{R} \sin\alpha \operatorname{tg}\varphi.$$

Для этого необходимо, чтобы напряжение, подаваемое на электродвигатель, регулировалось в зависимости от изменения φ,

V, R и α. Такое регулирование осуществляется в системе описываемого гироскопа направления специальным счетно-решающим устройством *РУ*, на вход которого подаются электрические сигналы, пропорциональные перечисленным параметрам.

В тех случаях, когда скорость V объекта сравнительно невелика, угловая скорость ω_N вращения картушки N вокруг оси *ОС* наружного кольца гироскопа может регулироваться дискретно, через определенные промежутки времени. При указанных условиях работы электрический двигатель *ЭД* в некоторых конструкциях заменяют часовым механизмом. Число оборотов выходного вала часового механизма регулируется таким образом, чтобы угловая скорость ω_N картушки N была равна средней угловой скорости $\dot{\psi}_{ср}$ ухода гироскопа при перемещениях объекта в течение определенного промежутка времени.

При использовании описанного принципа компенсации азимутального ухода гироскопа необходимо иметь в виду, что в этом случае угловая скорость азимутального ухода вследствие наличия сил трения в опорах подвеса не остается постоянной даже при неподвижном положении точки подвеса. В самом деле, угловые скорости отклонения гироскопа от плоскостей горизонта и меридиана при неподвижной относительно земной поверхности точке подвесе будут, как известно, определяться по выражениям (172). При нивелировании оси гироскопа ее положение может отклоняться от плоскости горизонта лишь на незначительные углы. Учитывая, что $\vartheta_0 = 0$, перепишем выражения (172) в виде

$$\dot{\vartheta} = \Omega_з \cos\varphi \sin\psi_0;$$

$$\dot{\psi} = -\Omega_з \sin\varphi.$$

Однако силы трения в опорах подвеса будут искажать приведенные зависимости, и угловые скорости рассматриваемого отклонения гироскопа в этом случае определятся, согласно (232), выражениями

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \Omega_з \cos\varphi \sin\psi_0 + \frac{M_{0\,т\,C}}{J\Omega}\operatorname{sign}\dot{\psi}; \\ \dot{\psi} &= -\Omega_з \sin\varphi - \frac{M_{0\,т\,B}}{J\Omega}\operatorname{sign}\dot{\vartheta}. \end{aligned}\right\} \quad (341)$$

Из анализа (341) следует, что с первого же мгновения работы гироскопа, моменты сил трения в опорах подвеса которого удовлетворяют требованию (212), угловые скорости его отклонения от плоскостей горизонта и меридиана будут

$$\dot{\vartheta} > 0; \quad \dot{\psi} < 0.$$

Гироскоп будет двигаться в указанном направлении до тех пор, пока его главная ось не составит с плоскостью горизонта

некоторый малый по величине угол $\vartheta_з$, при котором нивелирующее устройство создаст корректирующий момент $M_{\text{к}C}$. Если гироскоп наклонится на угол $\vartheta_з$ за время $t = t_1$, то можно утверждать, что в первом интервале от $t = t_0$ до $t = t_1$ (рис. 124), когда угол ϑ изменяется от 0 до $\vartheta_з$, гироскоп будет двигаться с угловыми скоростями

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vartheta}_{\text{I}} &= \Omega_з \cos\varphi \sin\psi_0 + \frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega}; \\ \dot{\psi}_{\text{I}} &= -\Omega_з \sin\varphi - \frac{M_{0\,\text{т}\,B}}{J\Omega}. \end{aligned}\right\} \qquad (342)$$

Как только главная ось гироскопа повернется на угол $\vartheta_з$, равный половине угловой величины зазора между ламелями a_1

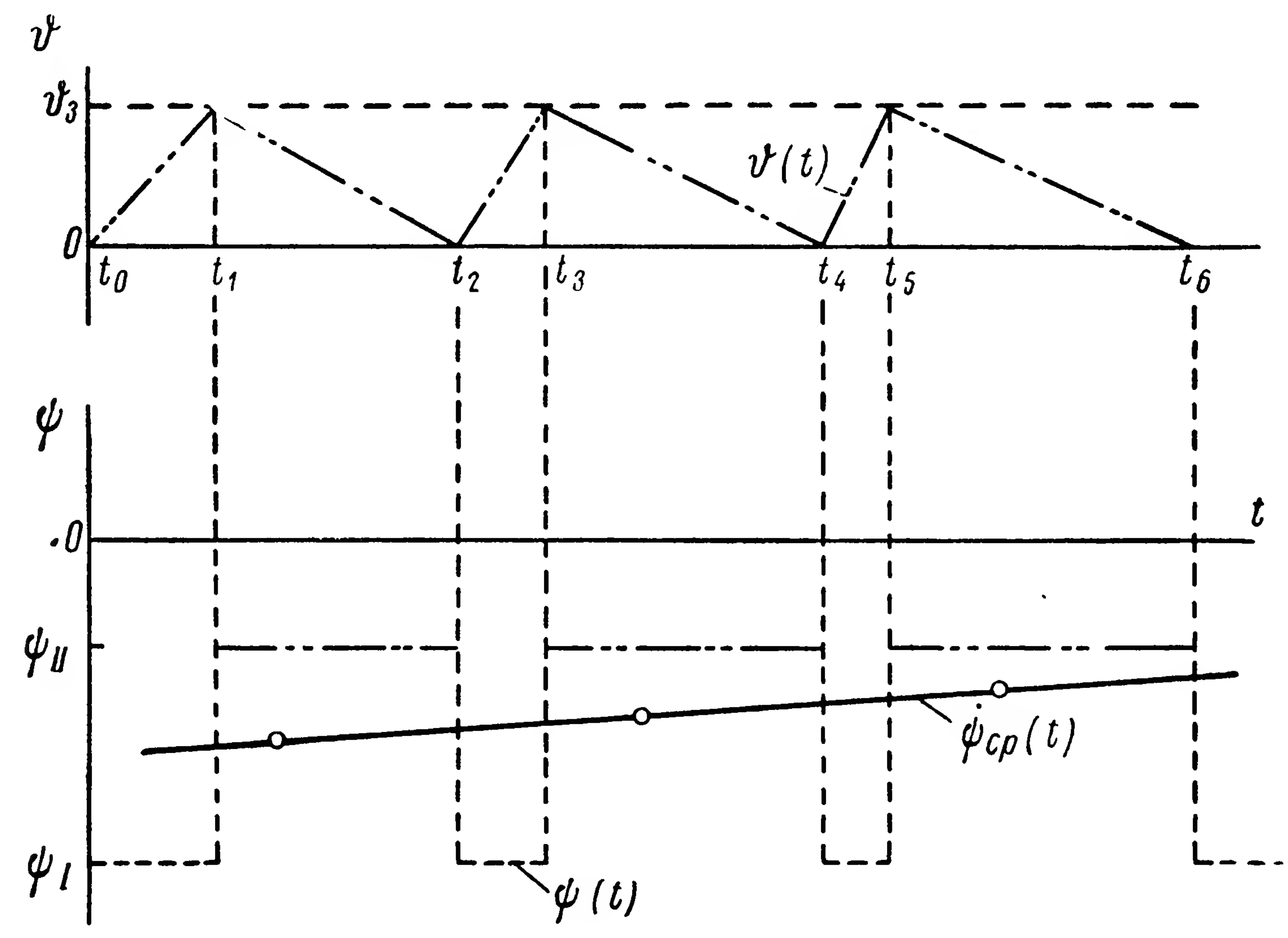


Рис. 124. Графики изменения ϑ и ψ гироскопа направления.

и a_2 (см. рис. 119), маятник L замкнет одну из них и тем самым включит ток в обмотку поворотного электромагнита $ПЭ$. В результате на гироскоп относительно оси OC подействует корректирующий момент $M_{\text{к}C}$, под влиянием которого главная ось гироскопа начнет возвращаться к плоскости горизонта. Таким образом, во втором интервале времени от $t = t_1$ до $t = t_2$ (рис. 124) гироскоп будет вращаться вокруг осей OB и OC с угловыми скоростями, отличными от (342) и равными

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vartheta}_{\text{II}} &= \Omega_з \cos\varphi \sin\psi_0 - \frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega} - \frac{M_{\text{к}\,C}}{J\Omega}; \\ \dot{\psi}_{\text{II}} &= -\Omega_з \sin\varphi + \frac{M_{0\,\text{т}\,B}}{J\Omega}. \end{aligned}\right\} \qquad (343)$$

Под влиянием момента $M_{кC}$ гироскоп начнет двигаться к плоскости горизонта с угловой скоростью $\dot{\vartheta}_{II}$, одновременно продолжая отклоняться от плоскости меридиана, но уже со скоростью $\dot{\psi}_{II}$, отличной от $\dot{\psi}_{I}$. Сравнив выражения (342) и (343), нетрудно заметить, что по величине $\dot{\psi}_{II} < \dot{\psi}_{I}$, так как

$$\left| \Omega_з \sin \varphi - \frac{M_{0\,т\,B}}{J\Omega} \right| < \left| \Omega_з \sin \varphi + \frac{M_{0\,т\,B}}{J\Omega} \right|.$$

Подобное движение гироскопа будет существовать до того момента, пока маятник L не выключит ток в обмотке поворотного электромагнита *ПЭ* (см. рис. 119), что произойдет по истечении времени $t_2 - t_1$ (рис. 124). После этого цикл поворота гироскопа вокруг оси *OB* повторится вновь. Однако интервал времени $t_3 - t_2$, в течение которого гироскоп вторично отклонится от плоскости горизонта на угол $\vartheta_з$, будет меньше времени $t_1 - t_0$, так как с увеличением угла ψ_0 отклонения гироскопа от плоскости меридиана угловая скорость $\dot{\vartheta}_{I}$, как это следует из выражений (342), будет увеличиваться. Вместе с тем интервал времени $t_4 - t_3$ возвращения гироскопа к плоскости горизонта будет больше времени $t_2 - t_1$, так как с увеличением ψ_0 угловая скорость $\dot{\vartheta}_{II}$ уменьшится по модулю.

С каждым новым циклом колебаний время отклонения гироскопа от плоскости горизонта на величину угла $\vartheta_з$ будет уменьшаться:

$$t_1 - t_0 > t_3 - t_2 > t_5 - t_4 > \ldots > t_{n-1} - t_{n-2},$$

а время возвращения к совмещению с плоскостью горизонта — увеличиваться:

$$t_2 - t_1 < t_4 - t_3 < t_6 - t_5 < \ldots < t_n - t_{n-1}.$$

Таким образом, с каждым новым циклом колебаний среднее значение угловой скорости $\dot{\psi}_{ср}$ будет уменьшаться до тех пор, пока $\sin \psi_0$ не достигнет своего максимального значения при $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$. С дальнейшим увеличением ψ_0 угловая скорость увеличивается и достигает максимума при $\psi_0 = \pi$. Затем с увеличением угла ψ_0 от π до $\frac{3}{2}\pi$ угловая скорость начинает уменьшаться, пока при $\psi_0 = \frac{3}{2}\pi$ ее величина не получит минимального значения. Дальнейшее увеличение угла ψ_0 вызовет новое возрастание угловой скорости $\dot{\psi}_{ср}$.

На рис. 125 показана кривая изменения угловой скорости $\dot{\psi}_{ср}$ отклонения от плоскости меридиана гироскопа направления, схема которого приведена на рис. 123. При эксперименте был использован гироскоп, у которого кинетический момент $J\Omega =$

$= 10\,000$ *Гсмсек*, средние значения моментов трения по осям его подвеса $M_{0\,\text{т}\,B} = 1{,}2$ *Гсм* и $M_{0\,\text{т}\,C} = 7{,}0$ *Гсм*, а величина корректирующего момента $M_{\text{к}\,C} = 8{,}0$ *Гсм*. Такое изменение угловой скорости $\dot{\psi}_{\text{ср}}$ отклонения гироскопа направления необходимо учитывать при определении точности его показаний в условиях неподвижного положения точки подвеса гироскопа на земной поверхности.

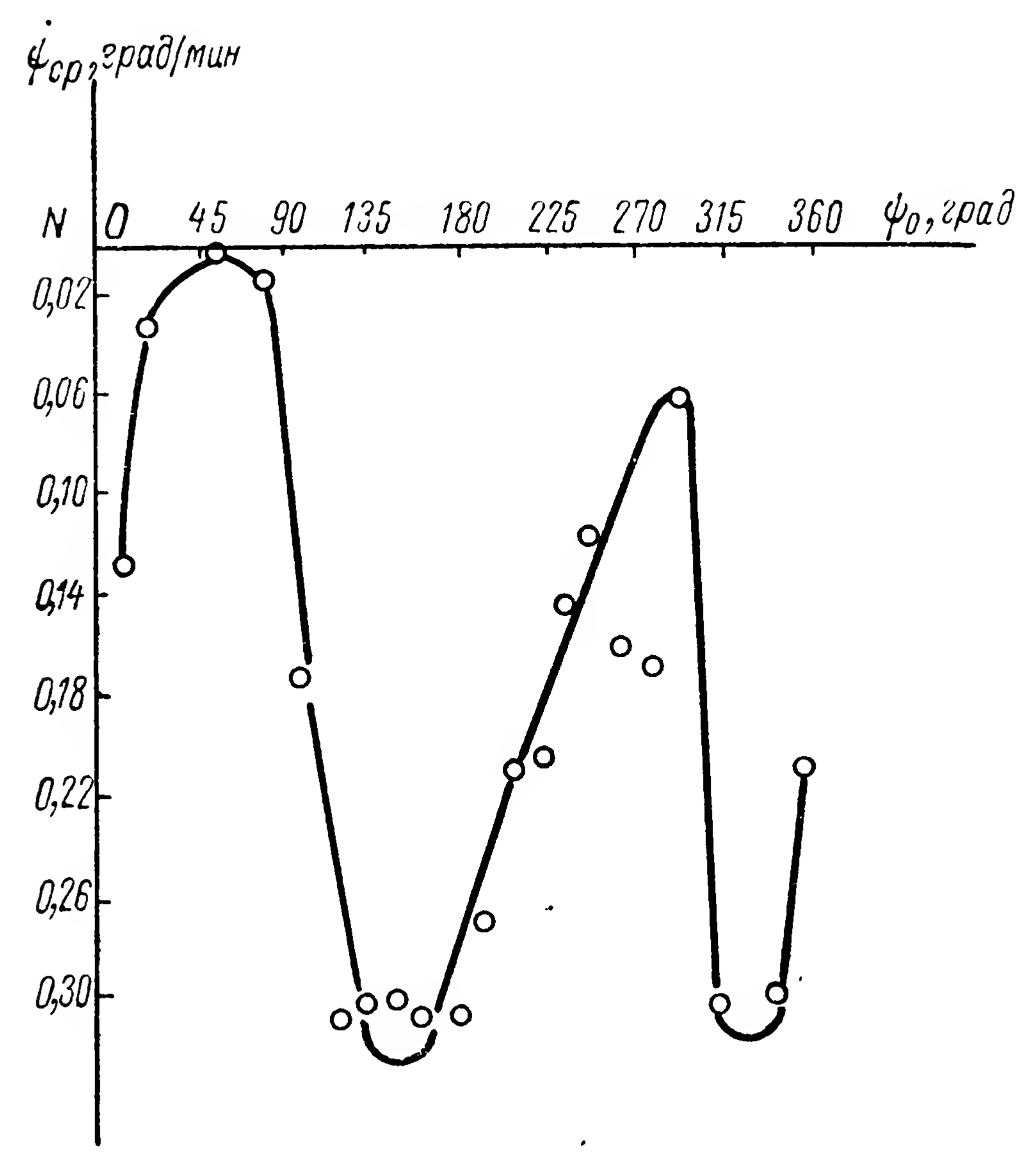


Рис. 125. Кривая изменения $\dot{\psi}_{\text{ср}}$ в зависимости от ψ_0.

Пример 25. Определить период прецессионных колебаний относительно плоскости горизонта и изменение величины угловой скорости отклонения от плоскости меридиана гироскопа направления, уход которого в азимуте корректируется вращением его картушки специальным двигателем. Параметры гироскопа: $J\Omega = 10\,000$ *Гсмсек*, $M_{0\,\text{т}\,B} = 1{,}2$ *Гсм*, $M_{0\,\text{т}\,C} = 7{,}0$ *Гсм*, $M_{\text{к}\,C} = 15{,}0$ *Гсм*, $2\vartheta_3 = 0°{,}5$. В начальный момент времени гироскоп располагался на земной поверхности под географической широтой $\varphi = 60°$, его главная ось составляла с плоскостью меридиана угол $\psi_0 = 30°$.

По выражениям (342) и (343) с учетом величины угловой скорости Ω_3 (168) находим

$$\dot{\psi}_{\text{I}} = -\Omega_3 \sin\varphi - \frac{M_{0\,\text{т}\,B}}{J\Omega} = -0{,}73\cdot 10^{-4}\cdot \sin 60° - \frac{1{,}2}{1\,0000} = -1{,}83\cdot 10^{-4}\ \text{сек.}^{-1};$$

$$\dot{\psi}_{\text{II}} = -\Omega_3 \sin\varphi + \frac{M_{0\,\text{т}\,B}}{J\Omega} = 0{,}57\cdot 10^{-4}\ \text{сек.}^{-1},$$

или

$$\dot{\psi}_{\text{I}} = -1{,}83\cdot 10^{-4}\cdot 57{,}3\cdot 60 = -6{,}29\ \text{град./мин.};$$

$$\dot{\psi}_{\text{II}} = 0{,}57\cdot 10^{-4}\cdot 57{,}3\cdot 60 = 0{,}2\ \text{град./мин.}$$

Угловая скорость $\dot{\vartheta}_{\text{I}}$ при отклонении гироскопа от плоскости меридиана на угол $\psi_0 = 30°$, согласно (342),

$$\dot{\vartheta}_{\text{I}} = \Omega_3 \cos\varphi \sin\psi_0 + \frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega} = 0{,}73\cdot 10^{-4} \cos 60° \sin 30° + \frac{7{,}0}{10\,000} = 7{,}18\cdot 10^{-4}\ \text{сек.}^{-1},$$

или

$$\dot{\vartheta}_I = 7{,}18\cdot 10^{-4}\cdot 57{,}3\cdot 60 = 2{,}47 \text{ град./мин.}$$

Следовательно, время t_1, в течение которого гироскоп наклонится относительно плоскости горизонта на угол $\vartheta_з$

$$t_1 = \frac{\vartheta_з}{\dot{\vartheta}_I} = \frac{0{,}25}{2{,}47} = 0{,}101 \text{ мин.} = 6{,}06 \text{ сек.}$$

Величину угловой скорости $\dot{\vartheta}_{II}$ возвращения гироскопа к плоскости горизонта определяем по формулам (343), учитывая в них положительное значение угловой скорости $\dot{\psi}_{II}$:

$$\dot{\vartheta}_{II} = \Omega_з \cos\varphi \sin\psi_0 - \frac{M_{0\,т\,C}}{J\Omega} - \frac{M_{к\,C}}{J\Omega} =$$

$$= 0{,}73\cdot 10^{-4} \cos 60^\circ \sin 30^\circ - \frac{7{,}0}{10\,000} - \frac{15{,}0}{10\,000} = -0{,}22\cdot 10^{-2} \text{ сек.}^{-1},$$

или

$$\dot{\vartheta}_{II} = -0{,}22\cdot 10^{-2}\cdot 57{,}3\cdot 60 = -7{,}5 \text{ град./мин.}$$

Время $t_2 - t_1$ возвращения гироскопа к плоскости горизонта под действием корректирующего момента $M_{к\,C}$ будет равно:

$$t_2 - t_1 = \frac{\vartheta_з}{\dot{\vartheta}_{II}} = \frac{-0{,}25}{-7{,}5} = 0{,}033 \text{ мин.} = 2{,}01 \text{ сек.},$$

а величина периода колебаний

$$T = (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) = 6{,}06 + 2{,}01 = 8{,}07 \text{ сек.}$$

§ 55. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГИРОСКОПА НАПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОБЪЕКТА ПО ОРТОДРОМИИ

При изучении законов отклонений от плоскостей горизонта и меридиана гироскопа, установленного на объекте, перемещающемся относительно земной поверхности по дуге большого круга — ортодромии (§ 30), — было получено выражение (188), характеризующее в этом случае угловую скорость изменения курса α. В то же время отклонение от плоскости меридиана главной оси гироскопа направления, перемещающегося вместе с объектом в плоскости горизонта (§ 29), происходит с угловой скоростью $\dot{\psi}$, определяемой по выражению (184). Если в гироскопе направления применяется нивелирующее устройство, то $\vartheta_0 = 0$ и угловая скорость $\dot{\psi} = -\omega_\zeta$. Поэтому можем записать

$$\dot{\psi} = -\Omega_з \sin\varphi + \frac{V}{R} \sin\alpha \operatorname{tg}\varphi. \qquad (344)$$

Сравнив выражения (188) и (344), нетрудно заметить, что достаточно скомпенсировать первую составляющую угловой скорости азимутального ухода гироскопа (344), чтобы его отклонения от плоскости меридиана происходили с угловой скоростью

$$\dot{\psi}_V = \frac{V}{R} \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi,$$

равной и по величине и по направлению угловой скорости (188) изменения курса при движении объекта по ортодромии.

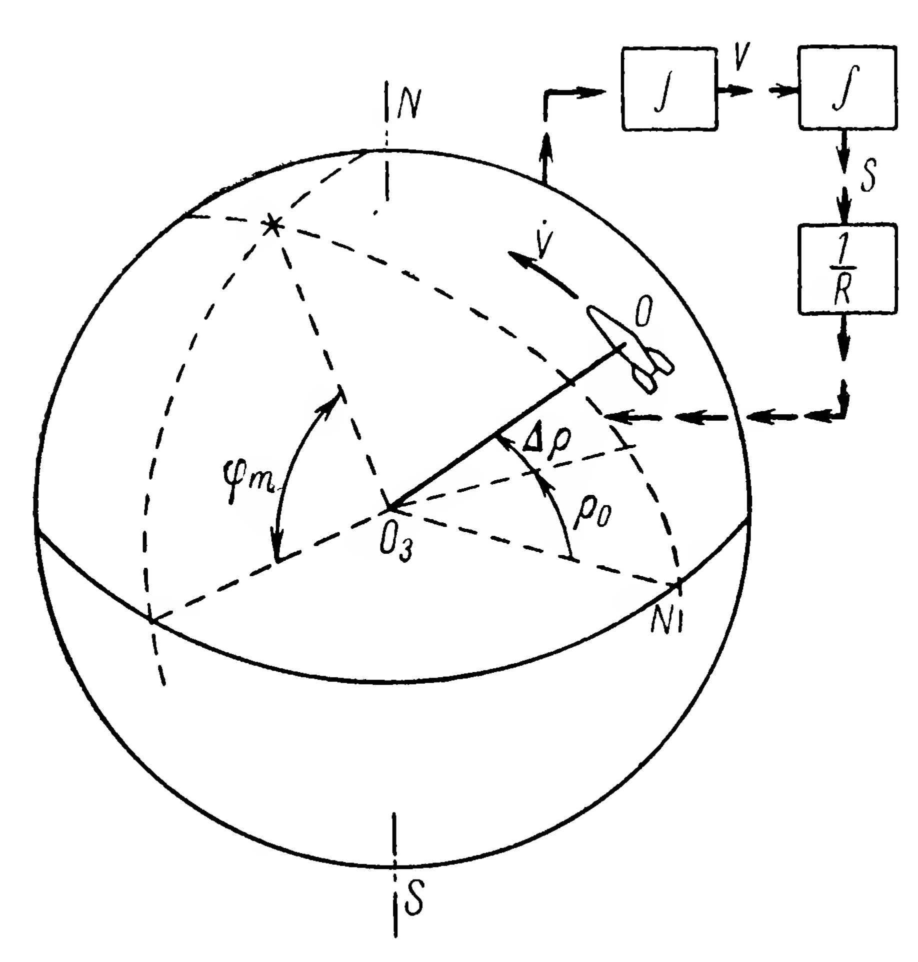


Рис. 126. Движение объекта по ортодромии.

Таким образом, если в гироскопе будут отсутствовать внешние возмущения, вызывающие недопустимо большие угловые скорости дрейфа, то такой гироскопический прибор может быть использован для управления движением объекта по дуге большого круга. Создавая относительно внутренней оси гироскопа корректирующий момент $M_{\text{к}B}$, необходимо, чтобы порождаемая им угловая скорость прецессии удовлетворяла условию

$$\frac{M_{\text{к}B}}{J\Omega} - \Omega_з \sin \varphi = 0.$$

Соблюдение этого условия возможно лишь в том случае, если корректирующий момент

$$M_{\text{к}B} = J\Omega\Omega_з \sin \varphi. \qquad (345)$$

Из четырех величин, входящих в правую часть равенства (345), только $\sin \varphi$ может изменяться с течением времени.

В § 30 были установлены зависимости (197) и (200) изменения широты φ и угла ϱ отклонения объекта в плоскости большого круга от экватора (рис. 126). Учитывая эти зависимости в равенстве (345), будем иметь

$$M_{\text{к}B} = J\Omega\Omega_з \sin \varphi_m \sin \left(\varrho_0 + \int \frac{V}{R} dt\right).$$

Так как при горизонтальном перемещении объекта его расстояние R от центра Земли $O_з$ меняется весьма медленно, то последнее равенство с достаточной для практики степенью точности может быть переписано в следующем виде:

$$M_{\text{к}B} = J\Omega\Omega_з \sin \varphi_m \sin \left(\varrho_0 + \frac{1}{R} \int V dt\right). \qquad (346)$$

Из величин, входящих в равенство (346), изменяется со временем лишь значение $\frac{1}{R}\int V dt = \Delta\varrho$. Чтобы автоматически регулировать корректирующий момент $M_{\kappa B}$ в зависимости от изменения $\Delta\varrho$, на объекте устанавливают акселерометр, измеряющий линейное ускорение $\dot{V}$ объекта (рис. 126). Подавая сигнал, пропорциональный $\dot{V}$, в первое интегрирующее устройство, на его выходе получают сигнал, пропорциональный скорости V объекта. Этот сигнал пропускают через второе интегрирующее устройство и получают на выходе сигнал, пропорциональный пройденному объектом пути S. Деля последний в счетно-решающем устройстве на величину $\frac{1}{R}$, получают в результате сигнал, пропорциональный углу $\Delta\varrho$, который и используют для регулирования величины корректирующего момента.

§ 56. ОШИБКИ ГИРОСКОПА НАПРАВЛЕНИЯ, ОБУСЛОВЛИВАЕМЫЕ НИВЕЛИРУЮЩИМ УСТРОЙСТВОМ. БИКАРДАНОВ ПОДВЕС ГИРОСКОПА

Нивелирующие устройства гироскопов направления при эволюциях объекта оказывают возмущающее воздействие на гироскопическую систему, что вызывает ее отклонение от плоскости меридиана. Выясним характер этих отклонений. Рассмотрим в качестве объекта, перемещающегося в горизонтальной плоскости $\xi O\eta$ (рис. 127) курсом α к плоскости меридиана $\xi O\zeta$, летательный аппарат.

Предположим, что в некоторый начальный момент летательный аппарат начал совершать вираж вокруг вертикали $O\zeta$ с угловой скоростью $\omega_ц$. Для компенсации влияния возникающих при этом центробежных сил инерции корпусу летательного аппарата должен быть придан крен γ тем больший, чем с большей угловой скоростью $\omega_ц$ и с меньшим радиусом совершается разворот вокруг вертикали $O\zeta$. Как только летательному аппарату будет придан крен γ, наружная ось OC подвеса гироскопа, неизменно совмещенная с осью Oz_c объекта, выйдет из вертикального положения. Между осью OC и вертикалью будет образован угол, равный углу γ.

Крен летательного аппарата вызовет поворот не только оси OC, но и перпендикулярный ей оси OD. В результате между осью OD и главной осью OA гироскопа направления, сохраняющей свое положение неизменно совмещенным с осью $O\xi$, возникнет угол рассогласования ϑ_0. Это обстоятельство и обусловит отклонение гироскопа направления от плоскости меридиана $\xi O\zeta$.

Действительно, при вираже летательного аппарата вокруг оси $O\zeta$ вследствие его крена будет возникать вынужденный поворот гироскопа вокруг оси OD с угловой скоростью

$$\omega_D = \omega_ц \cos(\zeta, D). \qquad (347)$$

Для определения косинуса угла между осями $O\zeta$ и OD обратимся к сферическому треугольнику $\zeta\xi C$. Зависимость между его углами в соответствии с формулой (30) определится равенством

$$\cos\gamma = \cos\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta_0\right) + \sin\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta_0\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right),$$

из которого следует, что

$$\cos\mu = \frac{\cos\gamma}{\cos\vartheta_0}. \qquad (348)$$

Из сферического треугольника ζDz находим косинус искомого угла:

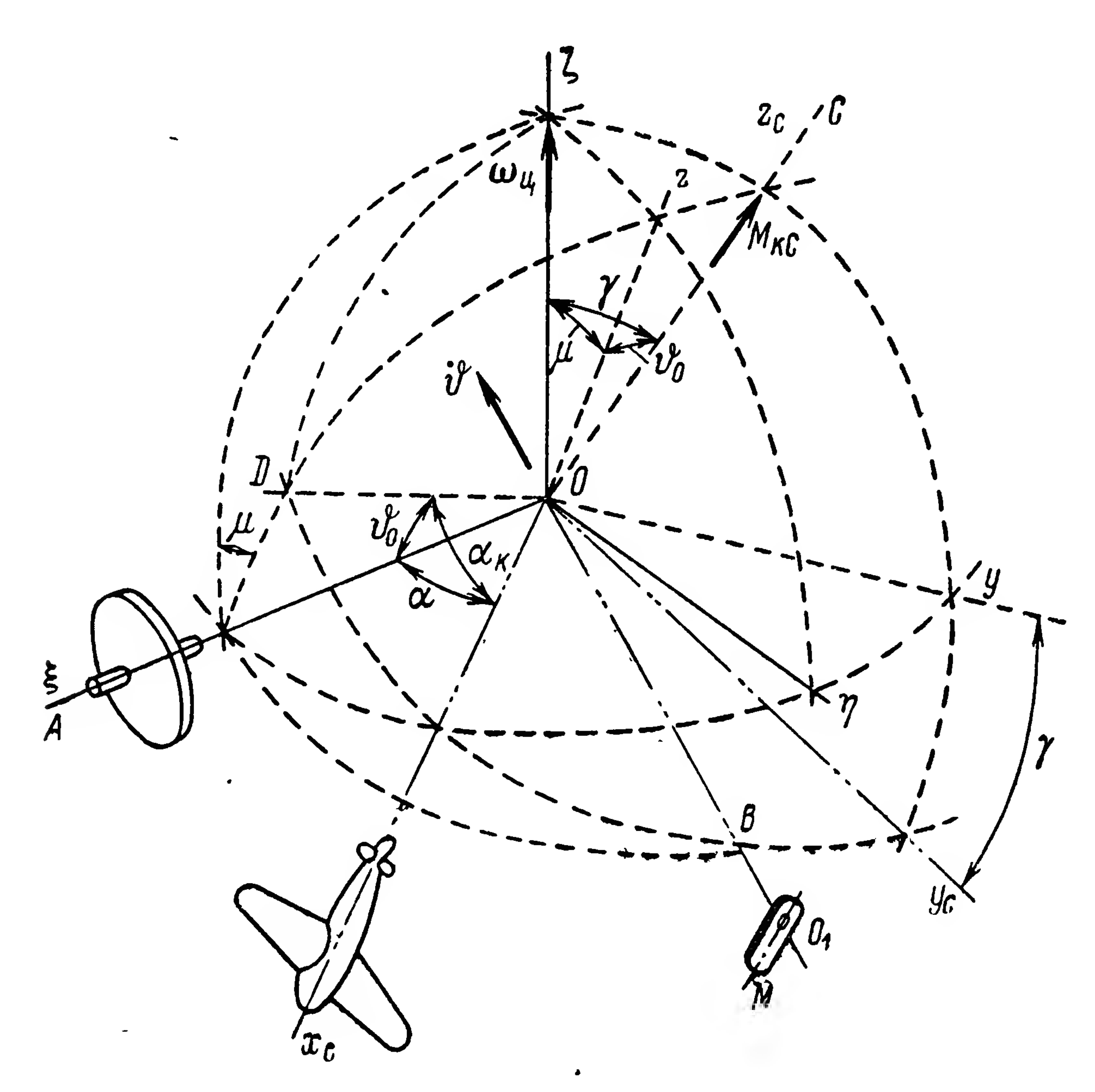


Рис. 127. Виражные ошибки гироскопа направления.

$$\cos(\zeta, D) = \cos\mu\cos\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta_0\right) + \sin\mu\sin\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta_0\right)\cos\frac{\pi}{2},$$

или, учитывая (348),

$$\cos(\zeta, D) = \cos\mu\sin\vartheta_0 = \cos\gamma\,\mathrm{tg}\,\vartheta_0. \qquad (349)$$

Подставив (349) в (347), определим величину угловой скорости

$$\omega_D = \omega_ц\cos\gamma\,\mathrm{tg}\,\vartheta_0,$$

которая, как известно (см. § 26), вызывает дрейф гироскопа вокруг его наружной оси OC с угловой скоростью, определяемой по выражению (164).

Учитывая, что угол между осями OA и OD характеризуется непосредственно величиной ϑ_0, вместо (164) получим

$$\dot{\psi} = -\omega_ц \cos\gamma \operatorname{tg}^2\vartheta_0. \tag{350}$$

Кроме того, при крене летательного аппарата в гироскопе направления с маятниковой коррекцией произойдет рассогласование между осями Oz гироскопа и O_1M маятника-измерителя; включится датчик моментов, который создаст корректирующий момент $M_{кC}$, обусловливающий прецессию гироскопа вокруг оси OB с некоторой угловой скоростью $\dot{\vartheta}$. В процессе этого движения главная ось OA гироскопа будет перемещаться в плоскости ξOC и, следовательно, отклоняться от плоскости меридиана $\xi O\zeta$ (рис. 127).

Крен летательного аппарата вызовет поворот главной оси OA и у гироскопа направления с межрамочной коррекцией. Действительно, как только будет нарушена перпендикулярность между осями OA и OC, на гироскоп начнет действовать момент $M_{кC}$. Под влиянием этого корректирующего момента ось OA гироскопа начнет поворачиваться вокруг оси OB, перемещаясь в плоскости ξOC с угловой скоростью $-\dot{\vartheta}$. Следовательно, и при межрамочной коррекции ось OA гироскопа в результате действия момента $M_{кC}$ будет отклоняться от плоскости меридиана $\xi O\zeta$.

Угловая скорость азимутального отклонения гироскопа будет определяться проекцией вектора $-\bar{\dot{\vartheta}}$ на ось $O\zeta$:

$$\dot{\psi} = -\dot{\vartheta}\cos(B, \zeta). \tag{351}$$

Величина $\cos(B, \zeta)$ может быть найдена из сферического треугольника $\zeta B\xi$. Согласно формуле (30) имеем

$$\cos(\zeta, B) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \mu\right),$$

или, учитывая (348),

$$\cos(\zeta, B) = -\sin\mu = -\sqrt{1 - \left(\frac{\cos\gamma}{\cos\vartheta_0}\right)^2}. \tag{352}$$

Подставив (352) в (351), найдем

$$\dot{\psi} = -\dot{\vartheta}\sqrt{1 - \left(\frac{\cos\gamma}{\cos\vartheta_0}\right)^2}. \tag{353}$$

Так как угол ϑ_0 в процессе виража непрерывно изменяется, то отклонение гироскопа от плоскости меридиана будет подчинено весьма сложной зависимости. Анализ этой зависимости выполнен в работах С. С. Тихменева [40]. Д. С. Пельпора [3] и др.

На угловую скорость $\dot{\psi}$ азимутального отклонения гироскопа при вираже объекта дополнительно накладываются кардановы

ошибки (см. § 43). Чтобы избежать ошибок, обусловленных геометрией карданова подвеса, в некоторых прецизионных гироскопах направления применяют бикарданов подвес [27], принцип устройства которого показан на рис. 128. В этом случае гироскопическая система подвешивается в корпусе *КП*, который с помощью дополнительного карданова кольца *КК* подвешивается уже в кожухе или так называемом нактоузе прибора *Н*. Центр тяжести корпуса *КП* гироскопа расположен ниже

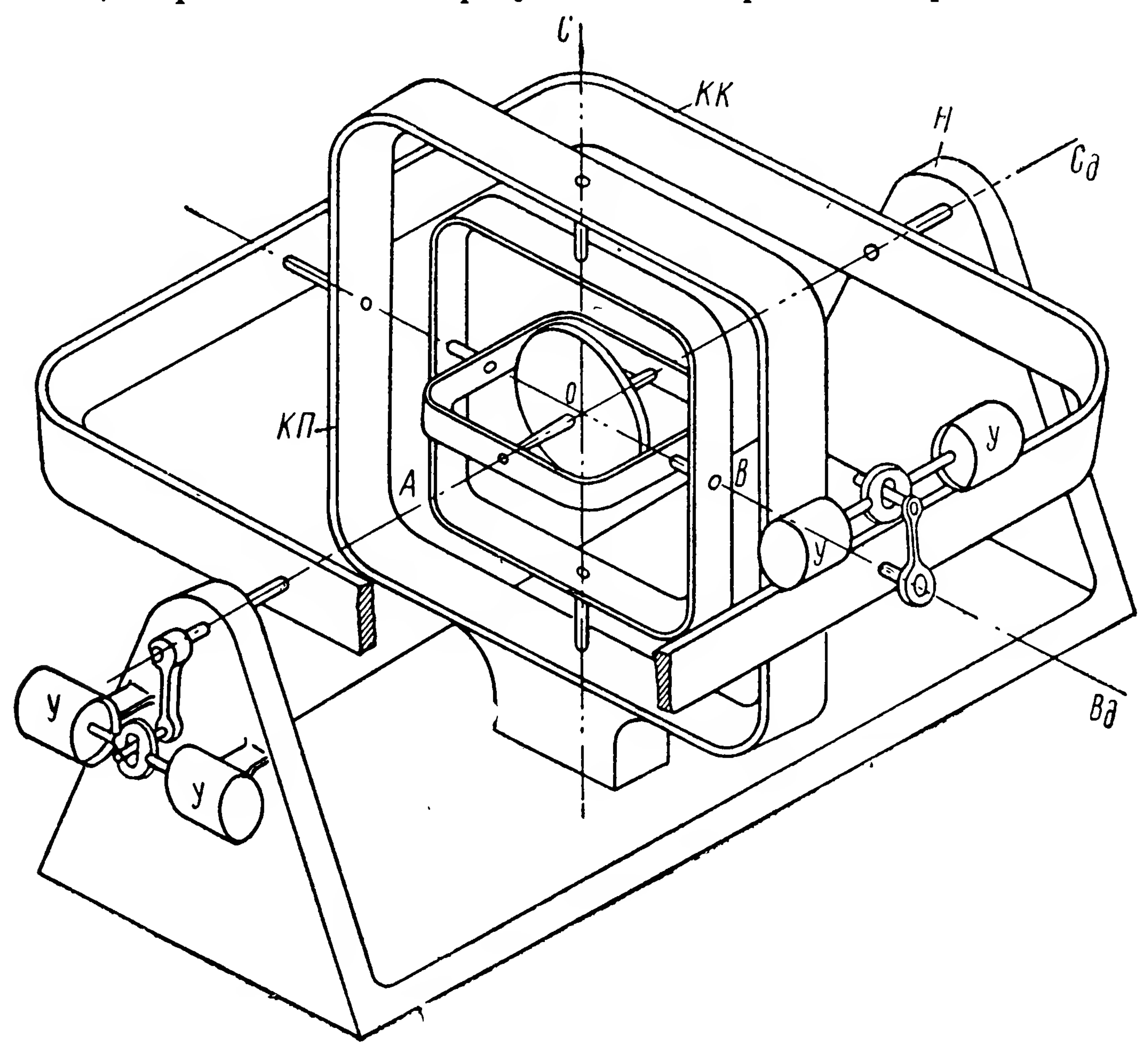


Рис. 128. Бикарданов подвес гироскопа.

внутренней оси $OB_д$ дополнительного кардана. Благодаря этому наружная ось *ОС* гироскопа даже и при виражах объекта занимает положение, близкое к вертикали.

Таким образом, применение бикарданова подвеса устраняет возможность появления отклонений гироскопа направления от заданной азимутальной плоскости, которые вызываются как геометрией одинарного кардана, так и нарушением перпендикулярности между осями *ОА* и *ОС* гироскопа. Для демпфирования собственных колебаний корпуса гироскопа в приборе применяются воздушные успокоители *У*, расположенные по каждой оси подвеса $OB_д$ и $OC_д$ дополнительного кардана.



Глава VIII
ГИРОМАГНИТНЫЙ КОМПАС

§ 57. ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ ГИРОМАГНИТНОГО КОМПАСА

Для сохранения положения гироскопа направления стабильным относительно плоскости меридиана корректирующий момент $M_{к\,B}$ должен (см. § 52) регулироваться таким образом, чтобы при изменениях курса α, скорости V и высоты h объекта с достаточной точностью соблюдалось условие (337). Между тем, регулирование момента $M_{к\,B}$ связано с преодолением значительных принципиальных и конструктивных трудностей. Так, например, скорость V объекта должна измеряться не относительно среды, в которой объект перемещается, а относительно земных ориентиров; кроме того, гироскоп направления не обладает направляющим моментом, возвращающим его ось к первоначально заданному направлению в азимуте. Он, как говорят, не обладает избирательностью, что резко снижает точность измерения курса α. Если по тем или иным причинам главная ось гироскопа направления будет выведена из заданного относительно плоскости меридиана направления, она не возвратится в прежнее положение. В результате в измерение курса α будет вноситься ошибка, которая скажется на работе счетно-решающего устройства, изменяющего величину и направление действия корректирующего момента $M_{к\,B}$. Условие (337) нарушится, и ошибка в показаниях гироскопа направления будет непрерывно возрастать.

Эти причины заставляли искать новые методы азимутальной коррекции гироскопа, обеспечивающие в течение неограниченного времени стабильное положение его главной оси относительно плоскости меридиана. Советские конструкторы Д. А. Браславский М. М. Качкачьян и М. Г. Элькинд первыми в мире решили указанную проблему весьма простым и оригинальным способом. В 1935 году ими был создан принципиально новый гироскопический навигационный прибор, получивший название гиромагнитного компаса. В этом приборе, идея которого сразу же завоевала мировое признание, для осуществления азимутальной коррекции была использована стрелка магнитного компаса, устанавливающаяся, как известно (§ 2), в плоскости магнитного меридиана.

Магнитную стрелку размещали в приборе таким образом, чтобы ее ось вращения являлась геометрическим продолжением

наружной оси *ОС* подвеса гироскопа (рис. 129). Стрелку соединяли с движком *r* потенциометра $П_С$, обмотка которого размещалась на диске *Д*, укрепленном на наружном кольце *НК* гироскопа. При этом нулевую точку обмотки потенциометра $П_С$ устанавливали строго в плоскости *АОС* гироскопа.

Таким образом, если в силу каких-либо причин между главной осью *ОА* гироскопа и продольной осью *ns* магнитной стрелки возникнет в горизонтальной плоскости угол рассогласования, с обмотки потенциометра $П_С$ будет снят сигнал, пропорциональный величине этого угла. Подавая этот сигнал на датчик моментов $ДМ_В$, создают корректирующий момент требуемого направления.

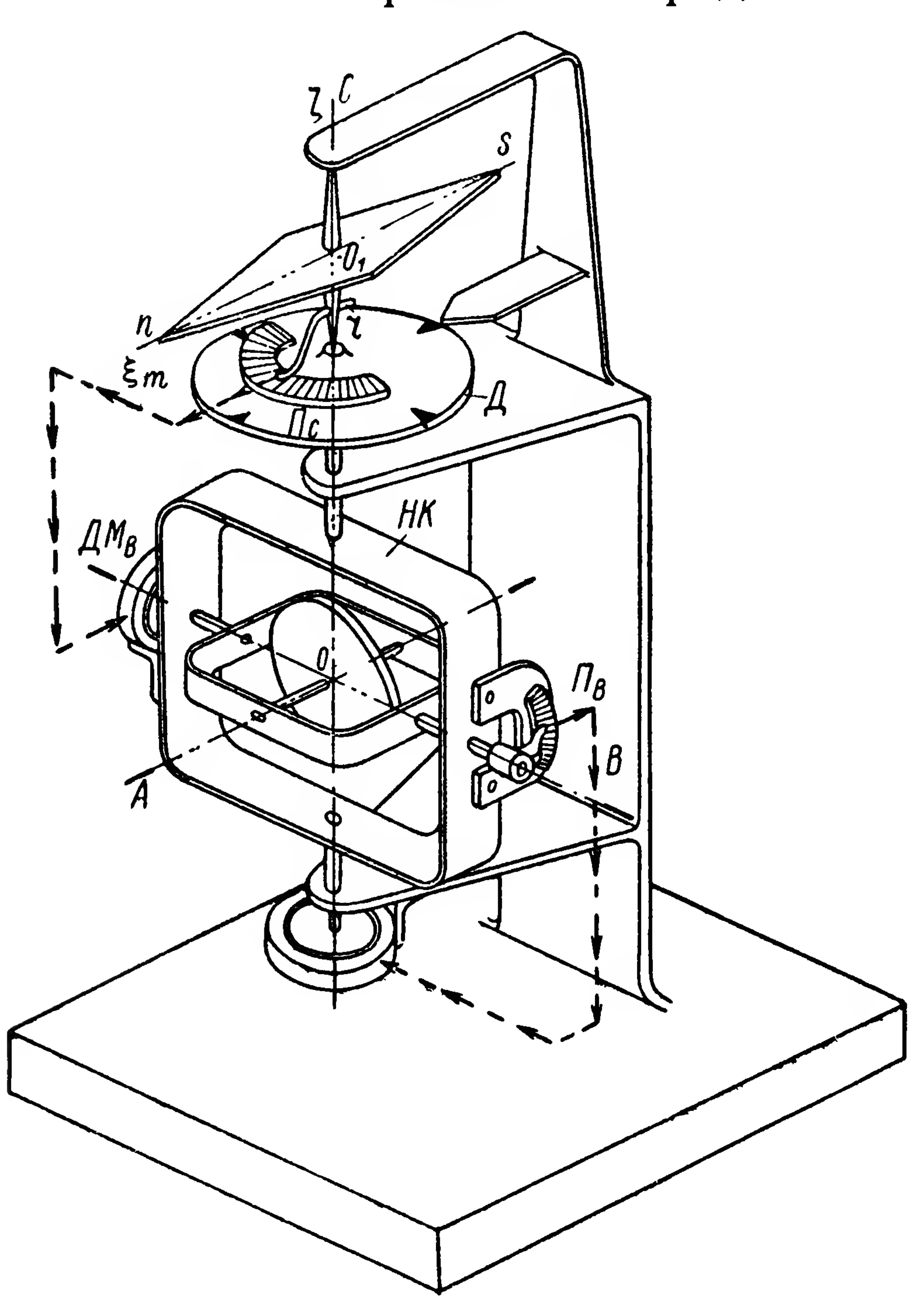


Рис. 129. Принципиальная схема гиромагнитного компаса.

Под влиянием корректирующего момента, который действует на гироскоп относительно внутренней оси подвеса *ОВ*, возникает прецессионное движение вокруг наружной оси *ОС*. При этом направление действия корректирующего момента выбирают так, чтобы в результате создаваемого им прецессионного движения главная ось *ОА* гироскопа возвращалась к плоскости nO_1C. Так как продольная ось *ns* магнитной стрелки стремится сохранить свое положение в плоскости $\xi_m O_1 \zeta$ магнитного меридиана, то главная ось *ОА* гироскопа будет приводиться к совмещению с плоскостью магнитного меридиана.

В тот момент, когда главная ось *ОА* гироскопа и продольная ось *ns* магнитной стрелки совместятся в одной вертикальной плоскости, движок *r* потенциометра $П_С$ займет на обмотке последнего нулевое положение, в связи с чем снимаемый с него сигнал станет равным нулю. При этом условии напряжение на датчик моментов $ДМ_В$ перестанет подаваться и воздействие корректирующего момента на гироскоп прекратится. В результате прекратится прецессионное движение гироскопа, и его главная ось *ОА* остановится в плоскости магнитного меридиана.

В случае возникновения нового рассогласования между главной осью OA гироскопа и продольной осью ns магнитной стрелки описанный процесс коррекции полностью повторится и гироскоп снова будет приведен в плоскость магнитного меридиана. Как видим, рассматриваемый гироскопический прибор уже обладает избирательностью. Будучи выведен из плоскости магнитного меридиана, он снова к ней возвращается. Следовательно, ошибка в показаниях гиромагнитного компаса не может накапливаться с течением времени, как в астатических гироскопах и гироскопах направления, лишенных избирательности.

В системах коррекции гироскопа относительно плоскости магнитного меридиана в качестве измерительного органа может быть использована не только стрелка магнитного компаса. Для измерения отклонений гироскопа от плоскости магнитного меридиана нашли применение [1] индукционные, электронные и другие типы компасов, устанавливающихся по направлению вектора напряженности поля земного магнетизма.

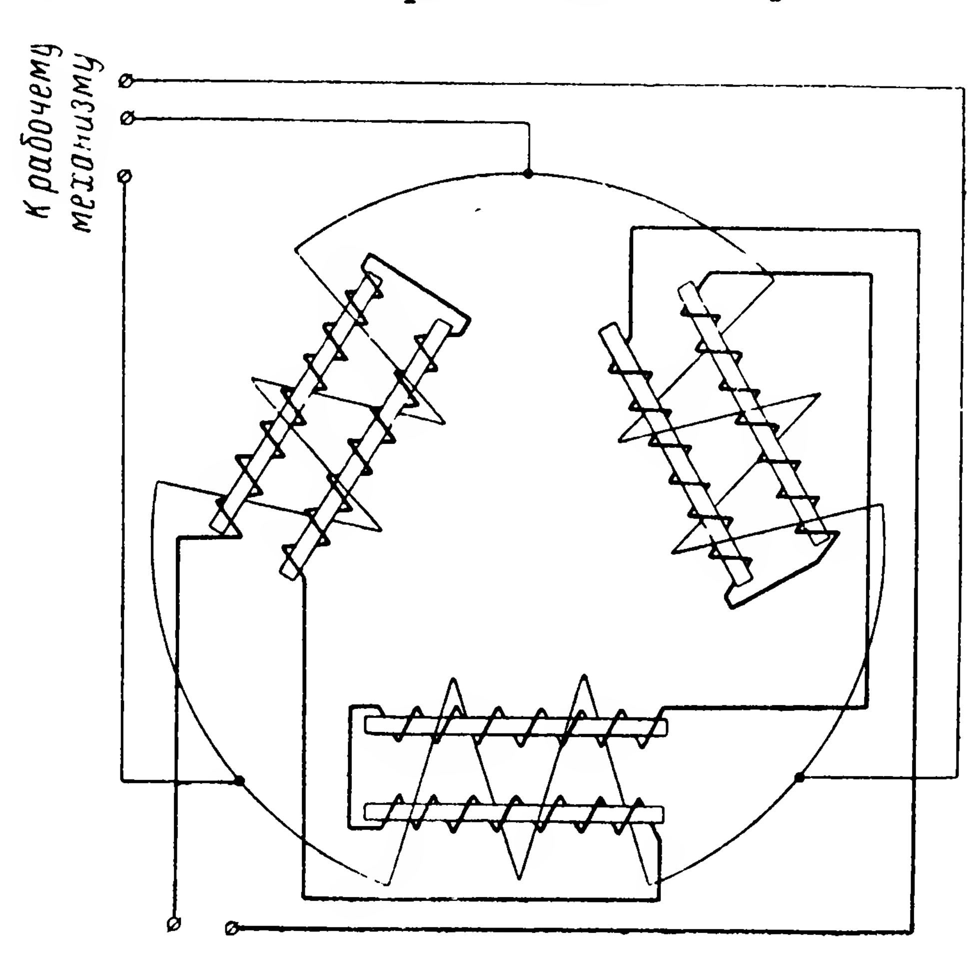


Рис. 130. Датчик индукционного компаса.

Так, например, магнитная стрелка может быть заменена индукционным компасом, основной частью которого является элемент, состоящий из трех пар стержней, выполненных из пермаллоя — материала с высокой магнитной проницаемостью. Стержни смонтированы (рис. 130) так, что составляют равносторонний треугольник. Каждая пара стержней имеет по две обмотки, одна из которых предназначена для намагничивания стержней, вторая — для фиксирования их положения относительно плоскости магнитного меридиана.

Первые обмотки, или обмотки возбуждения, соединены последовательно и питаются переменным током частотой 400—500 *гц*. Образующиеся при этом переменные магнитные потоки в каждой паре стержней имеют взаимно противоположные направления и поэтому не индуктируют электродвижущую силу во вторичных обмотках, охватывающих оба стержня каждой пары. В то же время вследствие переменности магнитных потоков, создавае-

---

[1] См.: Н. И. Чистяков. Электрические авиационные приборы. Оборонгиз, 1950.

мых в стержнях, их магнитная проницаемость периодически изменяется. В результате горизонтальная составляющая магнитного поля Земли создает в стержнях пульсирующие магнитные потоки, порождающие электродвижущие силы во вторичных обмотках.

Величина и знак напряжения во вторичных обмотках будут зависеть от расположения стержней по отношению к магнитному меридиану. В обмотках стержней, направленных перпендикулярно плоскости магнитного меридиана, витки которых не пересекаются магнитным полем Земли, напряжение будет отсутствовать. В обмотках стержней, направленных вдоль плоскости магнитного меридиана, витки которых пересекаются полем земного магнетизма, напряжение будет иметь наибольшую величину. В зависимости от поворота стержней относительно плоскости магнитного меридиана будут изменяться напряжения и во вторичных обмотках, вызывающие соответствующие токи в проводах, соединенных через усилитель с обмотками датчика моментов.

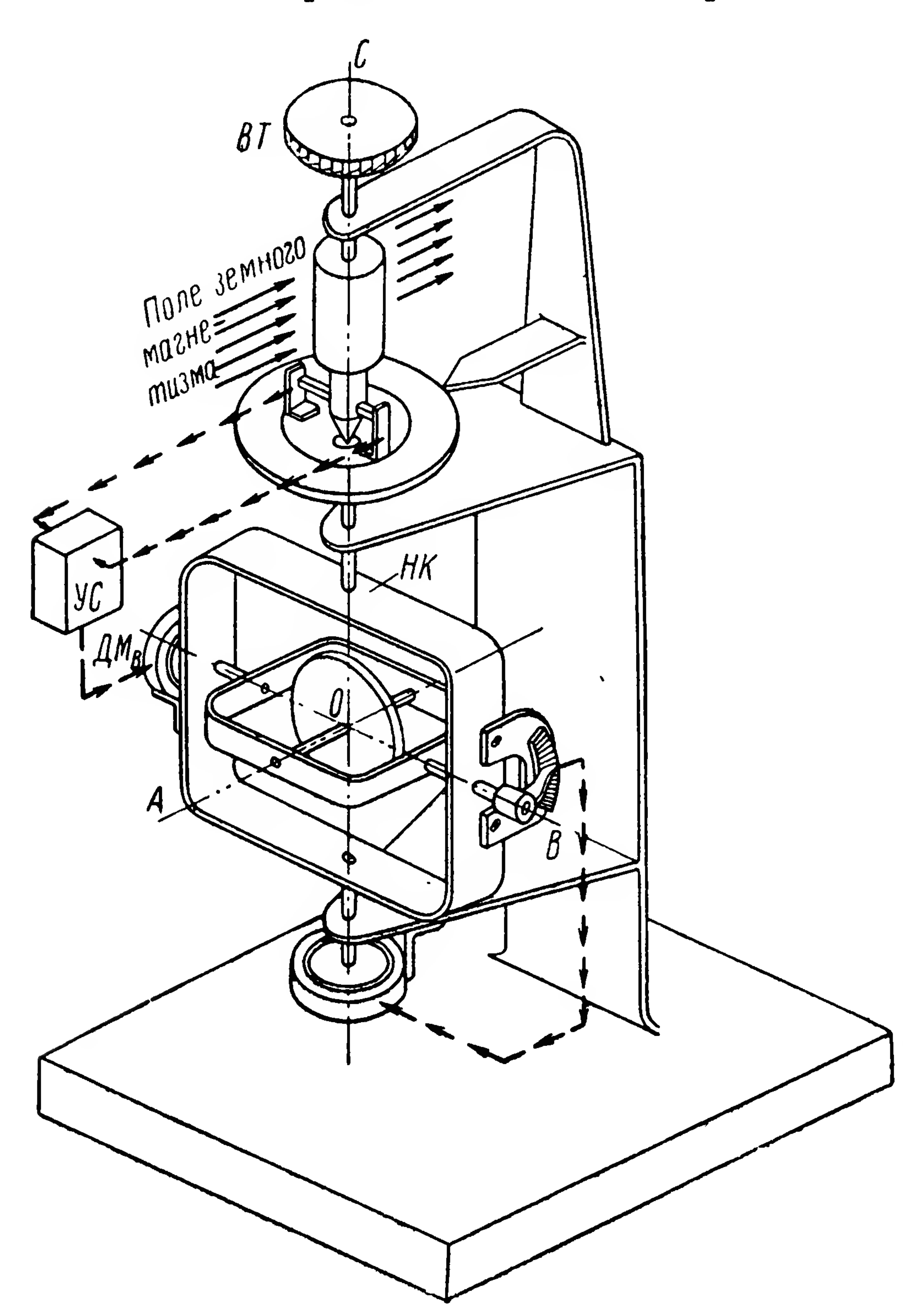


Рис. 131. Индукционный гирокомпас.

Таким образом, при отклонении гироскопа, а вместе с ним и индукционного датчика от плоскости магнитного меридиана в датчик моментов будет подаваться электрический ток. Напряжение и знак подаваемого тока будут обусловливать создание датчиком моментов такого корректирующего момента, под воздействием которого гироскоп придет в плоскость магнитного меридиана, аналогично тому, как это было описано выше.

Для азимутальной коррекции гироскопа может быть использован индукционный компас. В описываемой конструкции (рис. 131) ротор коллекторной электрической машины, соединенный с ротором воздушной турбинки *ВТ*, приводится во вращение вокруг оси *ОС* встречным потоком воздуха, возникающим при перемещениях объекта.

В связи с тем, что вращение ротора электромашины происходит в поле земного магнетизма, в его обмотке наводится электродвижущая сила. Как и во всяком генераторе постоянного тока, напряжение тока между щетками коллектора будет зависеть от их положения по отношению к направлению действия магнитных силовых линий. Поэтому изменением положения диаметральной плоскости щеток электрической машины относительно направления магнитного поля Земли можно изменять напряжение и полярность тока, вырабатываемого генератором.

Используя описанный принцип работы индукционного компаса, можно осуществить азимутальную коррекцию гироскопа. Устанавливая с этой целью щетки коллектора электромашины на изолированной плате, жестко укрепленной на наружном кольце *НК* гироскопа, получают схему автоматического устройства, измеряющего угол и направление отклонения гироскопа от плоскости магнитного меридиана. При совмещении главной оси гироскопа с плоскостью магнитного меридиана, а щеток коллектора с плоскостью, ей перпендикулярной, напряжение тока между щетками будет равно нулю. При отклонении главной оси гироскопа от плоскости магнитного меридиана и, следовательно, щеток от плоскости, ей перпендикулярной, напряжение тока между щетками коллектора начнет возрастать, причем полярность тока будет зависеть от направления отклонения гироскопа. Снимаемое со щеток коллектора напряжение подается на усилитель *УС* и затем на датчик моментов $ДМ_В$, в результате чего создается корректирующий момент, вызывающий прецессионное движение гироскопа к плоскости магнитного меридиана.

Для осуществления коррекции гироскопа в азимуте предлагалось использовать в качестве измерительного органа электронно-лучевую трубку (рис. 132). Впервые эта идея гироэлектронного компаса была высказана советскими учеными Л. А. Гончарским, А. П. Молчановым, В. К. Зворыкиным и др. В таком устройстве вертикально расположенная электронно-лучевая трубка имеет анодную пластину, разделенную на четыре равных сектора. Электронный пучок, интенсивность потока которого периодически изменяется подачей переменного напряжения на расположенную около катода сетку, направляется посредством системы центрирующих электродов точно в центр анода. Это достигается компенсацией (при помощи специальных установок) влияния магнитного поля Земли. При таком положении пучка электронов относительно секторов анода токи I_1, I_2 и I_3, I_4 в первичных обмотках трансформаторов T_1 и T_2 будут равны по величине и обратны по направлению и, следовательно, напряжение во вторичных обмотках трансформаторов будет отсутствовать.

Если после такого регулирования трубка будет установлена на объекте, то пучок электронов в результате воздействия на него поля земного магнетизма отклонится к западу. Направление от-

клонения пучка электронов относительно секторов анода будет зависеть от угла, составляемого прорезью между секторами с плоскостью магнитного меридиана. Так как относительно вертикальной оси трубка не имеет свободы вращения на объекте, то угол между прорезью секторов анода и плоскостью магнитного меридиана будет равен курсу α_m, составляемому направлением движения объекта с плоскостью магнитного меридиана.

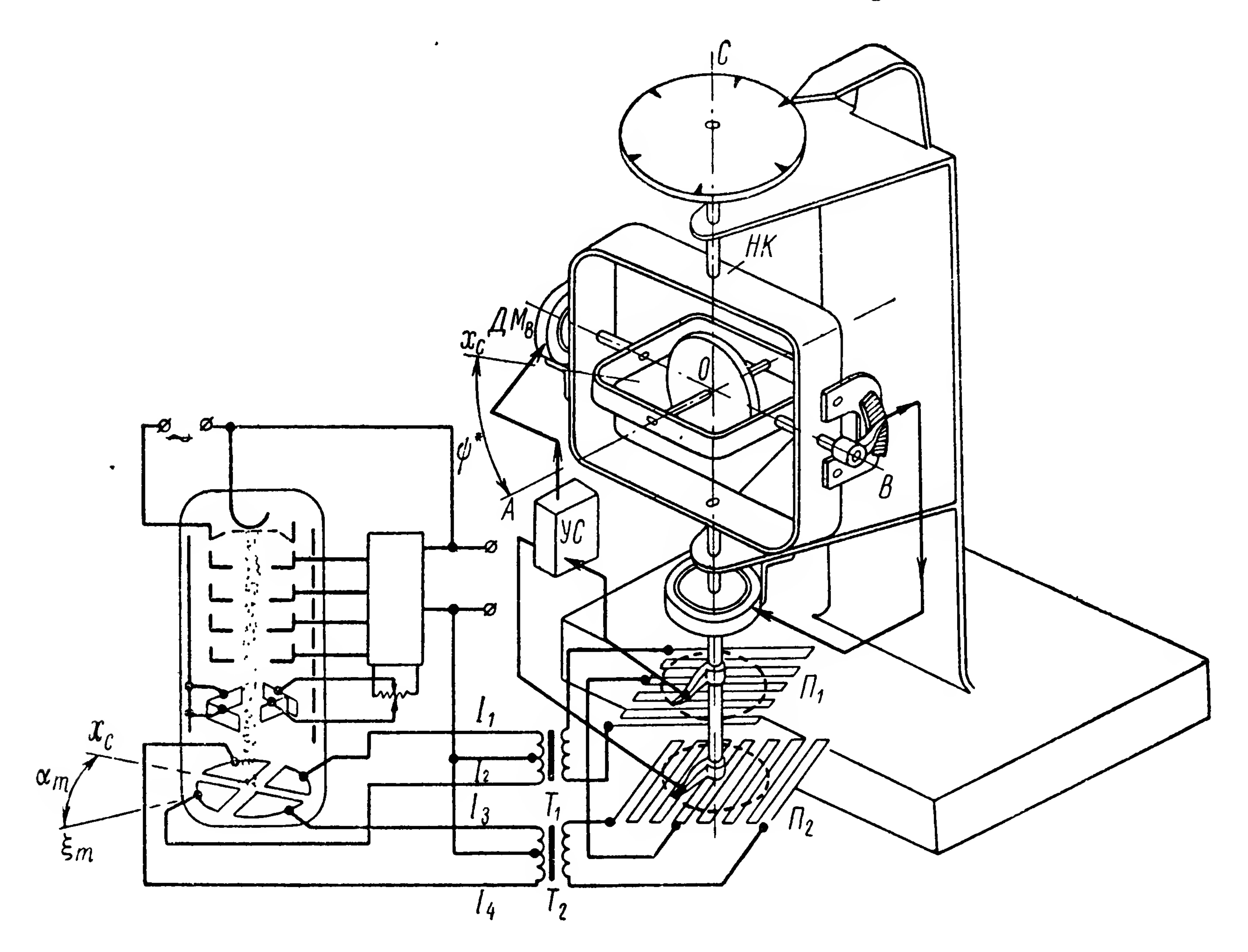


Рис. 132. Гироэлектронный компас.

Вследствие отклонения пучка электронов от центра секторов анода равенство токов в первичных обмотках трансформаторов нарушается и переменные слагаемые разностных анодных токов электронной трубки создают во вторичных обмотках напряжения U_1 и U_2, зависящие от угла α_m. Эта зависимость весьма близка к синусоидальной, и поэтому напряжения на вторичных обмотках трансформаторов можно полагать равными

$$U_1 = U_0 \sin \alpha_m; \quad U_2 = U_0 \cos \alpha_m.$$

Напряжения U_1 и U_2 подводятся к двум синусным потенциометрам $П_1$ и $П_2$, щетки которых укреплены на наружном кольце *НК* гироскопа. Если его главная ось *ОА* будет повернута относительно продольной оси Ox_c объекта на угол ψ^*, то снимаемые с потенциометров $П_1$ и $П_2$ напряжения будут соответственно

равны

$$U_{п1} = \frac{1}{2} U_1 \cos \psi^*; \quad U_{п2} = \frac{1}{2} U_2 \sin \psi^*.$$

Разность напряжений $U_{п1} - U_{п2}$ поступает через усилитель *УС* на датчик моментов $ДМ_B$ корректирующего устройства, в результате чего на гироскоп относительно его внутренней оси *ОВ* начинает действовать корректирующий момент, обусловливающий прецессионное движение гироскопа вокруг оси *ОС*. Прецессия будет происходить до тех пор, пока разность напряжений не станет равной нулю:

$$U_{п1} - U_{п2} = 0. \tag{354}$$

Подставив в (354) значения $U_{п1}$ и $U_{п2}$, получим

$$\frac{1}{2} U_0 (\sin \alpha_m \cos \psi^* - \cos \alpha_m \sin \psi^*) = 0,$$

откуда следует, что корректирующий момент не будет действовать лишь тогда, когда

$$\operatorname{tg} \alpha_m = \operatorname{tg} \psi^*$$

или

$$\alpha_m = \psi^*.$$

Полученное равенство показывает, что при использовании электронного компаса для азимутальной коррекции гироскопа главная ось *ОА* последнего будет также устанавливаться в плоскости магнитного меридиана.

§ 58. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГИРОМАГНИТНОГО КОМПАСА

Для выяснения законов изменения во времени углов ϑ и ψ отклонения гиромагнитного компаса от плоскостей горизонта и магнитного меридиана обратимся вновь к системе уравнений (162) и определим значения действующих на гироскоп моментов M_B и M_C внешних сил. Положение гироскопической системы относительно земных ориентиров корректируется в гиромагнитном компасе (см. рис. 129) одновременно по обеим осям. Следовательно, относительно осей *ОВ* и *ОС* подвеса гироскопа будут действовать моменты $M_{кB}$ и $M_{кC}$. Кроме того, относительно этих же осей на гироскоп будут действовать моменты $M_{тB}$ и $M_{тC}$ сил трения в опорах подвеса.

Подставим указанные моменты в уравнения (162) и учтем, что при наличии в гиромагнитном компасе нивелирующего уст-

ройства угол ϑ_0 будет оставаться близким нулю. Пренебрегая при этом малой величиной $\omega_D\vartheta$, получим

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega(\dot{\psi} + \omega_C) &= M_{\text{к}B} + M_{\text{т}B}; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega(\dot{\vartheta} + \omega_B) &= M_{\text{к}C} + M_{\text{т}C}. \end{aligned}\right\} \qquad (355)$$

Значения корректирующих моментов $M_{\text{к}B}$ и $M_{\text{к}C}$ зависят от углов ψ и ϑ поворота гироскопа вокруг соответствующих осей подвеса. Если эта зависимость пропорциональна, то момент $M_{\text{к}C}$, действующий на гироскоп относительно его наружной оси OC (см. рис. 129), при межрамочной схеме коррекции пропорционален углу ϑ поворота гироскопа вокруг оси OB:

$$M_{\text{к}C} = K_C\vartheta.$$

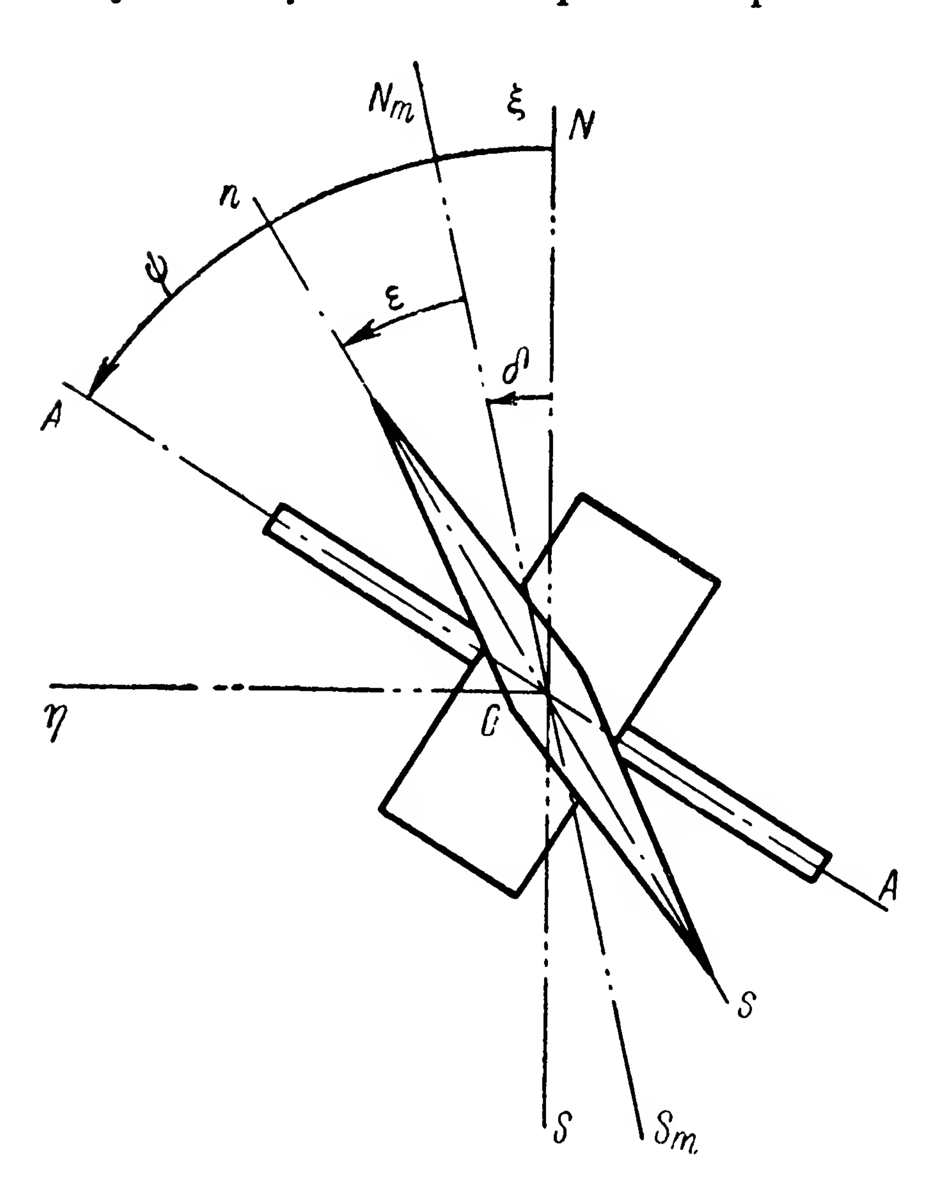


Рис. 133. К определению корректирующего момента $M_{\text{к}B}$.

Для определения корректирующего момента $M_{\text{к}B}$, действующего на гироскоп относительно его внутренней оси подвеса, воспользуемся схемой рис. 129. Обозначим, как и ранее (§ 2), через ε угол отклонения магнитной стрелки от плоскости $\xi_m O_1 \zeta$ магнитного меридиана $N_m S_m$, который составляет с плоскостью географического меридиана NS (рис. 133) некоторый угол δ, называемый углом магнитного склонения. При отклонении гироскопа от плоскости географического меридиана NS на угол ψ между главной осью OA гироскопа и продольной осью ns магнитной стрелки возникнет угол рассогласования, равный $\psi - (\varepsilon + \delta)$. Следовательно, корректирующий момент, действующий относительно внутренней оси подвеса гироскопа,

$$M_{\text{к}B} = -K_B(\psi - \varepsilon - \delta).$$

Действующие на гироскоп моменты сил сухого трения при колебаниях объекта с круговой частотой q могут быть представлены в виде тригонометрического ряда (252). Оставляя лишь

первый член указанного ряда, подставим найденные значения моментов в уравнения (355):

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega(\dot{\psi} + \omega_C) &= -K_B(\psi - \varepsilon - \delta) + \frac{4M_{\text{от}B}}{\pi}\sin qt; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega(\dot{\vartheta} + \omega_B) &= K_C\vartheta - \frac{4M_{\text{от}C}}{\pi}\sin qt. \end{aligned}\right\} \quad (356)$$

Угол ε не остается постоянным. В процессе движения объекта на магнитную стрелку будут действовать моменты возмущающих сил, вызывая тем самым (см. § 2) непрерывные изменения угла ε. Характер этих изменений определяется из уравнения (4) движения магнитной стрелки. Если учесть действие моментов сил сопротивления окружающей среды, это уравнение примет вид

$$J_\text{и}\ddot{\varepsilon} + \mu_\text{и}\dot{\varepsilon} + K_\text{и}\varepsilon = M_\text{и}, \quad (357)$$

где $J_\text{и}$ — момент инерции магнитной стрелки относительно оси ее подвеса;

$\mu_\text{и}$ — коэффициент момента сил сопротивления окружающей среды;

$K_\text{и}$ — коэффициент восстанавливающего момента, зависящий от магнитных масс стрелки, их удаления от оси ее подвеса и напряженности магнитного поля Земли;

$M_\text{и}$ — момент внешних сил, действующий на магнитную стрелку относительно оси ее подвеса.

Подставив (357) в (356), получим систему уравнений, описывающих движение гиромагнитного компаса с пропорциональной коррекцией при межрамочной схеме нивелирования его главной оси:

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega(\dot{\psi} + \omega_C) &= -K_B(\psi - \varepsilon - \delta) + \frac{4M_{\text{от}B}}{\pi}\sin qt; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega(\dot{\vartheta} + \omega_B) &= K_C\vartheta - \frac{4M_{\text{от}C}}{\pi}\sin qt; \\ J_\text{и}\ddot{\varepsilon} + \mu_\text{и}\dot{\varepsilon} + K_\text{и}\varepsilon &= M_\text{и}. \end{aligned}\right\} \quad (358)$$

Коррекция гиромагнитного компаса может быть выполнена и по релейной схеме (рис. 134). В этом случае движок r, укрепленный на оси вращения магнитной стрелки, будет перемещаться по изолированным друг от друга ламелям b_1 и b_2, укрепленным на наружном кардановом кольце $НК$ гироскопа. При отклонении главной оси OA гироскопа от вертикальной плоскости, совпадающей с продольной осью ns магнитной стрелки, движок r замкнет одну из двух ламелей: b_1 или b_2. В результате через одну из обмоток электромагнита $ЭМ$, неподвижно укрепленного на наружном кольце $НК$ гироскопа, пойдет электрический ток. При вклю-

чении обмотки электромагнита возникающий магнитный поток, действуя на якорь *Я*, укрепленный на оси *ОВ* подвеса внутреннего кольца *ВК*, создаст корректирующий момент, стремящийся повернуть гироскоп вокруг его оси *ОВ*. Под действием этого момента возникнет прецессионное движение гироскопа вокруг оси *ОС*, которое будет происходить до тех пор, пока главная ось *ОА* гироскопа не совместится вновь в одной вертикальной плоскости с продольной осью *ns* магнитной стрелки.

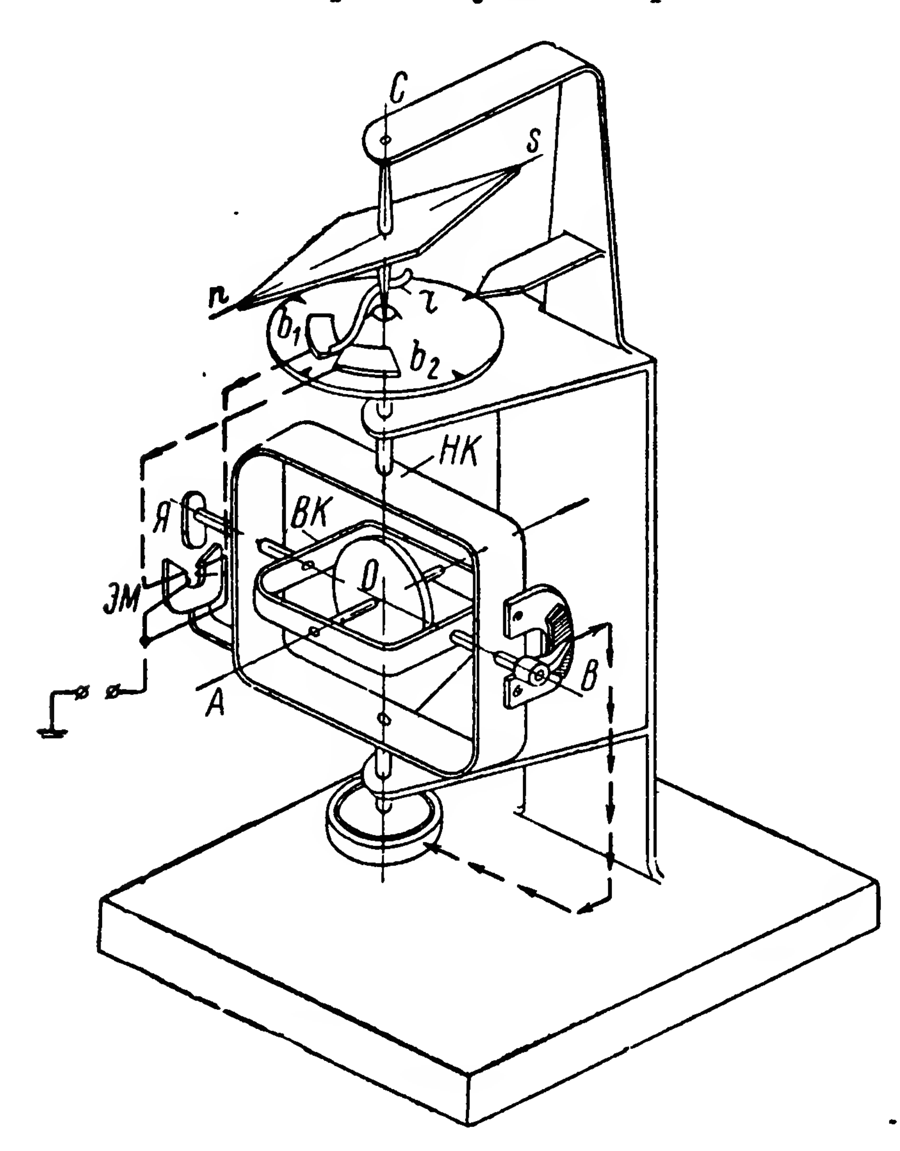


Рис. 134. Гиромагнитный компас с релейной характеристикой коррекции.

В это мгновение движок *r* разомкнет контакт с ламелью, выключится питание катушки электромагнита *ЭМ*, и действие на гироскоп корректирующего момента прекратится. Аналогично работает релейное устройство нивелирования главной оси гироскопа в плоскости горизонта (рис. 134). Учитывая, что при релейной коррекции моменты $M_{кB}$ и $M_{кC}$ меняют лишь направление своего действия в зависимости от знака углов ϑ и ψ поворота гироскопа, уравнения движения гиромагнитного компаса примут вид

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\left(\dot{\psi} + \omega_C\right) = -M_{\text{ок}\,B}\operatorname{sign}(\psi - \varepsilon - \delta) + \\ + \frac{4M_{\text{от}\,B}}{\pi}\sin qt; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\left(\dot{\vartheta} + \omega_B\right) = M_{\text{ок}\,C}\operatorname{sign}(\vartheta) - \frac{4M_{\text{от}\,C}}{\pi}\sin qt; \\ J_{\text{и}}\ddot{\varepsilon} + \mu_{\text{и}}\dot{\varepsilon} + K_{\text{и}}\varepsilon = M_{\text{и}}. \end{aligned}\right\} \quad (359)$$

Из уравнений (358) и (359) следует, что движение магнитной стрелки непосредственно влияет на перемещения гироскопа. Нетрудно заметить, что третье уравнение в обеих системах может быть исследовано самостоятельно. Поэтому обратимся сначала к уравнению (357) и исследуем законы изменения угла ε.

Предположим, что под действием некоторого возмущающего момента магнитная стрелка была выведена из плоскости магнитного меридиана на некоторый угол ε_0 и затем предоставлена самой

себе. Если при этом условии в уравнении (357) пренебречь силами трения в опорах подвеса, то его можно переписать в следующем виде:

$$\ddot{\varepsilon} + a\dot{\varepsilon} + b\varepsilon = 0, \qquad (360)$$

где

$$a = \frac{\mu_{и}}{J_{и}}; \quad b = \frac{K_{и}}{J_{и}}.$$

Составим для дифференциального уравнения (360) характеристическое уравнение

$$p^2 + ap + b = 0$$

и определим его корни

$$p_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}.$$

Современные магнитные компасы, предназначаемые для работы на подвижных объектах, выполняют таким образом, чтобы коэффициент μ был меньше $\sqrt{b}$ [43, стр. 206]. При этом условии можно утверждать, что величина b будет больше $\left(\frac{a}{2}\right)^2$, в связи с чем корни характеристического уравнения примут вид

$$p_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm i\sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Тогда решение уравнения (360), согласно изложенному в § 13 (см. рис. 33), определится из выражения

$$\varepsilon = e^{-\frac{a}{2}t}(C_1 \cos n_{и}t + C_2 \sin n_{и}t), \qquad (361)$$

где

$$n_{и} = \sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \qquad (362)$$

характеризует круговую частоту собственных колебаний магнитной стрелки.

Выразим постоянные интегрирования C_1 и C_2 через новые постоянные E и λ, связав их зависимостями

$$C_1 = E\cos\lambda; \quad C_2 = E\sin\lambda.$$

В связи с этим (361) примет вид

$$\varepsilon = Ee^{-\frac{a}{2}t}\cos(n_{и}t - \lambda). \qquad (363)$$

Постоянные E и λ определяются начальными условиями

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_0; \quad \dot{\varepsilon}(0) = 0.$$

При этих условиях из (363) следует

$$\varepsilon(0) = E\cos\lambda = \varepsilon_0. \tag{364}$$

Продифференцировав (363) по времени, будем иметь

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{a}{2}Ee^{-\frac{a}{2}t}\cos(n_{\text{и}}t - \lambda) - En_{\text{и}}e^{-\frac{a}{2}t}\sin n_{\text{и}}t\cos\lambda +$$

$$+ En_{\text{и}}e^{-\frac{a}{2}t}\cos n_{\text{и}}t\sin\lambda,$$

откуда находим, что при $t = 0$ в соответствии со вторым начальным условием

$$\dot{\varepsilon}(0) = -\frac{a}{2}E\cos\lambda + En_{\text{и}}\sin\lambda = 0.$$

Подставив в последнее равенство значение $E\cos\lambda$ из (364), будем иметь

$$E\sin\lambda = \frac{a}{2n_{\text{и}}}\varepsilon_0. \tag{365}$$

Возведем в квадрат равенства (364) и (365). Суммируя полученные результаты, находим

$$E = \varepsilon_0\sqrt{1 + \frac{a^2}{4n_{\text{и}}^2}}. \tag{366}$$

Разделив (365) на (364) и учтя зависимость (362), найдем

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{a}{2n_{\text{и}}} = \frac{a}{\sqrt{4b - a^2}},$$

откуда

$$\lambda = \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{\sqrt{4b - a^2}}. \tag{367}$$

Из анализа выражения (367) следует, что величина угла λ весьма мала, так как коэффициент a, характеризующий силы сопротивления окружающей среды, является, как уже говорилось выше, величиной малой. Поэтому с достаточной для практики степенью точности можно положить

$$\lambda \approx 0; \quad E \approx \varepsilon_0,$$

в связи с чем выражение (363) примет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-\frac{a}{2}t}\cos n_{\text{и}}t. \tag{368}$$

Учитывая найденное решение (368) третьего уравнения системы (358), получим систему двух дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\left(\dot{\psi} + \omega_C\right) &= -K_B\psi + K_B\varepsilon_0 e^{-\frac{a}{2}t}\cos n_{\text{и}}t + \\ &+ K_B\delta + \frac{4\,M_{0\,\text{т}B}}{\pi}\sin qt; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\left(\dot{\vartheta} + \omega_B\right) &= K_C\vartheta - \frac{4M_{0\,\text{т}C}}{\pi}\sin qt, \end{aligned}\right\} \quad (369)$$

описывающих движение гиромагнитного компаса при затухающих колебаниях стрелки магнитного компаса.

Если колебания магнитной стрелки будут непрерывно возбуждаться, например гармонически изменяющейся внешней силой, создающей момент $M_{\text{и}} = M_{0\text{и}}\cos q_{\text{и}}t$, то третье уравнение систем (358) и (359) примет вид

$$J_{\text{и}}\ddot{\varepsilon} + \mu_{\text{и}}\dot{\varepsilon} + K_{\text{и}}\varepsilon = M_{0\text{и}}\cos q_{\text{и}}t. \quad (370)$$

Решение соответствующего однородного уравнения (360) определяется по выражению (361). Частное решение (370) по аналогии с изложенным в § 2 будем искать в виде (9). Подставив (9) в уравнение (370), будем иметь

$$-J_{\text{и}}q_{\text{и}}^2N\cos q_{\text{и}}t - J_{\text{и}}q_{\text{и}}^2L\sin q_{\text{и}}t - \mu_{\text{и}}q_{\text{и}}N\sin q_{\text{и}}t +$$

$$+\mu_{\text{и}}q_{\text{и}}L\cos q_{\text{и}}t + K_{\text{и}}N\cos q_{\text{и}}t + K_{\text{и}}L\sin q_{\text{и}}t = M_{0\text{и}}\cos q_{\text{и}}t.$$

Приравняв в полученной зависимости коэффициенты при одинаковых тригонометрических членах в ее правой и левой частях, найдем

$$N = \frac{\left(K_{\text{и}} - J_{\text{и}}q_{\text{и}}^2\right)M_{0\text{и}}}{\left(K_{\text{и}} - J_{\text{и}}q_{\text{и}}^2\right)^2 + \mu_{\text{и}}^2q_{\text{и}}^2}; \quad L = \frac{\mu q_{\text{и}}M_{0\text{и}}}{\left(K_{\text{и}} - J_{\text{и}}q_{\text{и}}^2\right)^2 + \mu_{\text{и}}^2q_{\text{и}}^2}.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае выражение (9) принимает вид

$$\varepsilon_r = D\cos\left(q_{\text{и}}t - \varphi\right), \quad (371)$$

где

$$\left.\begin{aligned} D &= \sqrt{N^2 + L^2} = \frac{M_{0\text{и}}}{\sqrt{\left(K_{\text{и}} - J_{\text{и}}q_{\text{и}}^2\right)^2 + \mu_{\text{и}}^2q_{\text{и}}^2}}; \\ \varphi &= \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{L}{N}\right) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\mu_{\text{и}}q_{\text{и}}}{K_{\text{и}} - J_{\text{и}}q_{\text{и}}^2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (372)$$

Таким образом, общее решение уравнения (370), учитывая решение (361) соответствующего однородного уравнения (360),

будет определяться выражением

$$\varepsilon = e^{-\frac{a}{2}t}(C_1 \cos n_и t + C_2 \sin n_и t) + \\ + \frac{M_{0и}}{\sqrt{(K_и - J_и q_и^2)^2 + \mu_и^2 q_и^2}} \cos(q_и t - \varphi). \qquad (373)$$

Первое слагаемое выражения (373) характеризует собственные колебания магнитной стрелки, которые, как видим, затухают и, следовательно, по прошествии некоторого времени исчезают. Вынужденные колебания, характеризуемые вторым слагаемым выражения (373), остаются. Поэтому влияние магнитной стрелки на гироскоп при ее вынужденных колебаниях будет определяться в основном вторым слагаемым выражения (373). Учитывая указанное обстоятельство и пренебрегая в (373) величиной угла φ сдвига фаз между вынужденными колебаниями магнитной стрелки и гироскопа, систему уравнений (358) можно переписать в виде двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega(\dot{\psi} + \omega_C) = -K_B\psi + \\ + \frac{K_B M_{0и}}{\sqrt{(K_и - J_и q_и^2)^2 + \mu_и^2 q_и^2}} \cos q_и t + K_B\delta + \frac{4M_{отB}}{\pi} \sin qt; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega(\dot{\vartheta} + \omega_B) = K_C\vartheta - \frac{4M_{отC}}{\pi} \sin qt, \end{aligned}\right\} \qquad (374)$$

описывающих движение гиромагнитного компаса с пропорциональной коррекцией при вынужденных колебаниях магнитной стрелки.

§ 59. ДВИЖЕНИЕ ГИРОМАГНИТНОГО КОМПАСА С ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИЕЙ ПРИ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЯХ МАГНИТНОЙ СТРЕЛКИ

Для исследования влияния затухающих колебаний магнитной стрелки на характер движения гиромагнитного компаса обратимся к системе уравнений (369). Опуская в ней члены, влияющие лишь на параметры нутационных колебаний гироскопа и пренебрегая влиянием сил трения в опорах его подвеса, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi} + \frac{K_B}{J\Omega}\psi = -\omega_C + \frac{K_B}{J\Omega}\varepsilon_0 e^{-\frac{a}{2}t}\cos n_и t + \frac{K_B}{J\Omega}\delta; \\ \dot{\vartheta} + \frac{K_C}{J\Omega}\vartheta = -\omega_B. \end{aligned}\right\} \qquad (375)$$

Решение второго уравнения системы (375) было найдено выше в виде выражения (287), которое для рассматриваемого случая

будет равно

$$\vartheta = C_2 e^{-\frac{K_C}{J\Omega}t} - \frac{J\Omega\omega_B}{K_C},$$

или, учитывая значение угловой скорости ω_B, определяемое из выражений (330),

$$\vartheta = C_2 e^{-\frac{K_C}{J\Omega}t} - \frac{J\Omega}{K_C}\left[-\Omega_3 \cos\varphi \sin\psi_0 + \frac{V}{R}\cos(\alpha - \psi_0)\right]. \quad (376)$$

Решение (376) повторяет сделанные выше (§ 52) выводы о том, что из любого положения главная ось гироскопа, снабженного нивелирующим устройством, движется к плоскости горизонта. Угол рассогласования между ними, определяемый вторым слагаемым выражения (376),

$$\vartheta_r = \frac{J\Omega}{K_C}\left[\Omega_3 \cos\varphi \sin\psi_0 - \frac{V}{R}\cos(\alpha - \psi_0)\right] \quad (377)$$

может быть сведен до требуемого минимума на всем диапазоне возможных изменений α, V, R и ψ_0.

Это достигается соответствующим подбором значений кинетического момента $J\Omega$ гироскопа и коэффициента K_C его корректирующего момента.

Для выяснения характера изменений угла ψ обратимся к первому уравнению (375). Учтем, что колебания стрелки около плоскости магнитного меридиана вызывают колебания гироскопа в азимуте (см. § 17), причем колебания стрелки и гироскопа будут происходить в этом случае с одной и той же круговой частотой $n_и$. На этом основании частное решение первого уравнения (375) будем искать в виде

$$\psi_r = e^{-\frac{a}{2}t}(Q\cos n_и t + R\sin n_и t) + W. \quad (378)$$

Продифференцировав (378), подставим значения $\dot{\psi}_r$ и ψ_r в первое уравнение (375). В результате получим

$$e^{-\frac{a}{2}t}\left(-\frac{a}{2}Q + n_и R + \frac{K_B}{J\Omega}Q\right)\cos n_и t + e^{-\frac{a}{2}t}\left(-\frac{a}{2}R - \right.$$

$$\left. - n_и Q + \frac{K_B}{J\Omega}R\right)\sin n_и t + \frac{K_B}{J\Omega}W = -\omega_C +$$

$$+ \frac{K_B}{J\Omega}\varepsilon_0 e^{-\frac{a}{2}t}\cos n_и t + \frac{K_B}{J\Omega}\delta.$$

Приравняв коэффициенты в обеих частях полученного тождества, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} -\frac{a}{2}Q + n_{и}R + \frac{K_B}{J\Omega}Q = \frac{K_B}{J\Omega}\varepsilon_0; \\ -\frac{a}{2}R - n_{и}Q + \frac{K_B}{J\Omega}R = 0; \\ \frac{K_B}{J\Omega}W = -\omega_C + \frac{K_B}{J\Omega}\delta. \end{aligned}\right\} \qquad (379)$$

Совместное решение первых двух уравнений системы (379) позволяет определить коэффициенты

$$Q = \frac{2(2K_B - J\Omega a)K_B\varepsilon_0}{(2K_B - J\Omega a)^2 + 4J^2\Omega^2 n_{и}^2};$$

$$R = \frac{4J\Omega n_{и}K_B\varepsilon_0}{(2K_B - J\Omega a)^2 + 4J^2\Omega^2 n_{и}^2},$$

а ее третье уравнение — найти значение

$$W = -\frac{J\Omega\omega_C}{K_B} + \delta.$$

Таким образом, частное решение (378) первого уравнения (375) после подстановки найденных значений Q, R и W принимает вид

$$\psi_r = \frac{4K_B^2 - 2J\Omega aK_B}{J^2\Omega^2(4n_{и}^2 + a^2) - 4J\Omega aK_B + 4K_B^2}\varepsilon_0 e^{-\frac{a}{2}t}\cos n_{и}t + \\ + \frac{4J\Omega n_{и}K_B}{J^2\Omega^2(4n_{и}^2 + a^2) - 4J\Omega aK_B + 4K_B^2}\varepsilon_0 e^{-\frac{a}{2}t}\sin n_{и}t - \frac{J\Omega\omega_C}{K_B} + \delta.$$

Учитывая, что, в соответствии с принятыми обозначениями (360), величина a весьма мала, пренебрежем в полученном выражении значением a^2 по сравнению с $4n_{и}^2$. При таком допущении будем иметь

$$\psi_r = \frac{K_B^2 - 0{,}5J\Omega aK_B}{J^2\Omega^2 n_{и}^2 - J\Omega K_B a + K_B^2}\varepsilon_0 e^{-\frac{a}{2}t}\cos n_{и}t + \\ + \frac{J\Omega n_{и}K_B}{J^2\Omega^2 n_{и}^2 - J\Omega K_B a + K_B^2}\varepsilon_0 e^{-\frac{a}{2}t}\sin n_{и}t - \frac{J\Omega\omega_C}{K_B} + \delta.$$

Решение соответствующего однородного уравнения

$$\dot{\psi} + \frac{K_B}{J\Omega}\psi = 0$$

по аналогии с решением (376) может быть записано в виде

$$\psi_p = C_1 e^{-\frac{K_B}{J\Omega} t}.$$

Следовательно, общий интеграл первого уравнения (375) будет иметь вид

$$\psi = C_1 e^{-\frac{K_B}{J\Omega} t} + \frac{K_B^2 - 0{,}5J\Omega a K_B}{J^2\Omega^2 n_и^2 - J\Omega K_B a + K_B^2} \varepsilon_0 e^{-\frac{a}{2} t} \cos n_и t +$$
$$+ \frac{J\Omega n_и K_B}{J^2\Omega^2 n_и^2 - J\Omega K_B a + K_B^2} \varepsilon_0 e^{-\frac{a}{2} t} \sin n_и t - \frac{J\Omega\omega_C}{K_B} + \delta. \quad (380)$$

Постоянная интегрирования C_1 в выражении (380) определяется начальными условиями. Полагая, что $\psi(0) = \psi_0$, непосредственно из (380) имеем

$$C_1 + \frac{K_B^2 - 0{,}5J\Omega a K_B}{J^2\Omega^2 n_и^2 - J\Omega a K_B + K_B^2} \varepsilon_0 - \frac{J\Omega\omega_C}{K_B} + \delta = \psi_0,$$

откуда находим

$$C_1 = \psi_0 - \frac{K_B^2 - 0{,}5J\Omega a K_B}{J^2\Omega^2 n_и^2 - J\Omega a K_B + K_B^2} \varepsilon_0 + \frac{J\Omega\omega_C}{K_B} - \delta.$$

Подставив найденное значение постоянной интегрирования C_1 в выражение (380), получим искомый закон изменения во времени угла ψ отклонения главной оси гиромагнитного компаса от плоскости меридиана:

$$\psi = \left(\psi_0 - \frac{K_B^2 - 0{,}5J\Omega a K_B}{J^2\Omega^2 n_и^2 - J\Omega K_B a + K_B^2} \varepsilon_0 + \frac{J\Omega\omega_C}{K_B} - \delta\right) e^{-\frac{K_B}{J\Omega} t} +$$
$$+ \frac{K_B^2 - 0{,}5J\Omega a K_B}{J^2\Omega^2 n_и^2 - J\Omega K_B a + K_B^2} \varepsilon_0 e^{-\frac{a}{2} t} \cos n_и t +$$
$$+ \frac{J\Omega n_и K_B}{J^2\Omega^2 n_и^2 - J\Omega K_B a + K_B^2} \varepsilon_0 e^{-\frac{a}{2} t} \sin n_и t - \frac{J\Omega\omega_C}{K_B} + \delta. \quad (381)$$

Из анализа выражения (381) следует, что при отклонении гиромагнитного компаса от плоскости меридиана на тот или иной угол ψ_0 гироскопу сразу же сообщается прецессионное движение. В результате этой прецессии его главная ось будет двигаться к совмещению с осью магнитной стрелки. На указанное движение, характеризуемое первым членом выражения (381), будут накладываться затухающие колебания гироскопа, описываемые вторым и третьим членами рассматриваемого выражения. По прошествии некоторого времени колебания гироскопа затухнут и он установится в положении равновесия, определяемом последними двумя членами выражения (381):

$$\psi_r = -\frac{J\Omega\omega_C}{K_B} + \delta.$$

Естественно, что угол ψ_r отклонения главной оси гиромагнитного компаса от плоскости меридиана будет изменяться. Его величина будет зависеть от угла δ магнитного склонения в данном пункте земной поверхности и от угловой скорости ω_C вращения основания прибора вокруг наружной оси подвеса гироскопа. Подставив в последнее равенство значение ω_C из (330), получим выражение

$$\psi_r = -\frac{J\Omega}{K_B}\left(\Omega_з \sin\varphi - \frac{V}{R}\sin\alpha \operatorname{tg}\varphi\right) + \delta, \qquad (382)$$

характеризующее изменение угла ψ_r в зависимости от изменения параметров движения объекта, географической широты φ его местоположения и величины магнитного склонения δ.

Из формулы (382) следует, что с увеличением угла φ при движениях объекта под курсами, отличными от 0 и 180°, угол ψ_r отклонения главной оси гиромагнитного компаса от географического меридиана может достигать большого значения. Поэтому при определении возможных ошибок в показаниях гиромагнитного компаса необходимо учитывать весь диапазон изменения величин, входящих в выражение (382).

Пример 26. Определить необходимые значения коэффициентов K_B и K_C корректирующих моментов гиромагнитного компаса, предназначенного для работы на самолете, совершающем полеты на высоте $h = 10\,000$ *м* над уровнем моря со скоростью $V = 1000$ *км/час*. Самолет совершает рейсы от центрального аэродрома, расположенного на земной поверхности под широтой $\varphi = 40°$, в любых азимутальных направлениях. Продолжительность беспосадочного перелета достигает 3 час. Кинетический момент $J\Omega$ гироскопа, используемого в приборе, равен 6500 *Гсмсек*, а углы ϑ_r и ψ_r отклонения его главной оси от плоскостей горизонта и меридиана не должны превышать 3 и 2° соответственно. Диапазон изменения угла δ магнитного склонения на территории, обслуживаемой полетами самолета, находится в пределах $\pm 1,°5$.

Значения коэффициентов K_B и K_C вычисляем по формулам (382) и (377):

$$K_B = -\frac{J\Omega}{\psi_r + \delta}\left(\Omega_з \sin\varphi - \frac{V}{R}\sin\alpha \operatorname{tg}\varphi\right);$$

$$K_C = \frac{J\Omega}{\vartheta_r}\left[\Omega_з \cos\varphi \sin\psi_0 - \frac{V}{R}\cos(\alpha - \psi_0)\right].$$

Как видим, максимально необходимое значение коэффициента K_B обусловливается полетом курсом $\alpha = 270°$ при отрицательном значении угла δ:

$$K_{B\,max} = \frac{J\Omega}{\psi_r - \delta}\left(\Omega_з \sin\varphi_{max} + \frac{V}{R}\operatorname{tg}\varphi_{max}\right),$$

где φ_{max} — максимальное значение географической широты, достигаемой самолетом во время полета.

Учитывая малость угла ψ_0, можно утверждать, что максимально необходимое значение K_C будет обусловливаться полетом курсом $\alpha = 180°$. Следовательно, максимальное значение коэффициента K_C будет определяться по формуле

$$K_{C\,max} = \frac{J\Omega}{\vartheta_r}\left(\Omega_з \cos \varphi_{min} + \frac{V}{R}\right),$$

где φ_{min} — минимальная величина угла географической широты места в районе возможных полетов.

Считая, что средний радиус земного шара $R_з = 6371$ *км*, вычислим величину угловой скорости:

$$\frac{V}{R} = \frac{1000}{6371 + 10} = 0{,}157 \text{ час.}^{-1} = 4{,}34 \cdot 10^{-5} \text{ сек.}^{-1}$$

или соответственно

$$\frac{V}{R} = 0{,}157 \cdot 57{,}3 = 9{,}0 \text{ град/час.}$$

Полагая скорость V и высоту h полета постоянными и равными своим максимальным значениям, из (180) находим диапазон изменения угла географической широты места:

$$\varphi_{max} = \varphi_0 + \frac{V}{R}t = 40 + 9 \cdot 3 = 67°;$$

$$\varphi_{min} = \varphi_0 - \frac{V}{R}t = 40 - 9 \cdot 3 = 13°.$$

Выразим в радианах величины углов:

$$\vartheta_r = 3° = \frac{3}{57{,}3} = 5{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ рад.};$$

$$\psi_r - \delta = 2° - 1°{,}5 = \frac{0{,}5}{57{,}3} = 8{,}72 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Подставив значения величин, входящих в выражения для коэффициентов $K_{B\,max}$ и $K_{C\,max}$, и учитывая (168), будем иметь

$$K_{B\,max} = \frac{6500}{8{,}72 \cdot 10^{-3}}(7{,}29 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}9205 + 4{,}34 \cdot 10^{-5} \cdot 2{,}3559) = 126{,}3 \text{ } \textit{Гсм/рад};$$

$$K_{C\,max} = \frac{6500}{5{,}2 \cdot 10^{-2}}(7{,}29 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}9744 + 4{,}34 \cdot 10^{-5}) = 14{,}2 \text{ } \textit{Гсм/рад}.$$

§ 60. ДВИЖЕНИЕ ГИРОМАГНИТНОГО КОМПАСА, СНАБЖЕННОГО КОРРЕКТИРУЮЩИМ УСТРОЙСТВОМ С ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ, ПРИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ МАГНИТНОЙ СТРЕЛКИ

Как было показано выше, движение гиромагнитного компаса при вынужденных колебаниях магнитной стрелки описывается системой уравнений (374). Опустив в ней члены, характеризующие

нутационные колебания гироскопа, будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\dot{\psi}+\frac{K_B}{J\Omega}\psi &= -\omega_C+\frac{K_B}{J\Omega}\varepsilon_m\cos q_{\text{и}}t+\frac{K_B}{J\Omega}\delta+\\ &+\frac{4M_{0\,\text{т}B}}{\pi J\Omega}\sin qt;\\ \dot{\vartheta}+\frac{K_C}{J\Omega}\vartheta &= -\omega_B+\frac{4M_{0\,\text{т}C}}{\pi J\Omega}\sin qt,\end{aligned}\right\}\qquad(383)$$

где

$$\varepsilon_m=\frac{M_{0\text{и}}}{\sqrt{(K_{\text{и}}-J_{\text{и}}q_{\text{и}}^2)^2+\mu_{\text{и}}^2q_{\text{и}}^2}}.\qquad(384)$$

Решение уравнений (383) будем искать в виде

$$\left.\begin{aligned}\psi_r &= N\cos q_{\text{и}}t+L\sin q_{\text{и}}t+R\cos qt+Q\sin qt+W;\\ \vartheta_r &= R^*\cos qt+Q^*\sin qt+W^*.\end{aligned}\right\}\qquad(385)$$

Продифференцировав равенства (385) и подставив затем значения ψ_r, $\dot{\psi}_r$, ϑ_r и $\dot{\vartheta}_r$ в уравнения (383), будем иметь

$$-q_{\text{и}}N\sin q_{\text{и}}t+q_{\text{и}}L\cos q_{\text{и}}t-qR\sin qt+qQ\cos qt+$$
$$+\frac{K_B}{J\Omega}(N\cos q_{\text{и}}t+L\sin q_{\text{и}}t+R\cos qt+Q\sin qt+W)=$$
$$=-\omega_C+\frac{K_B}{J\Omega}\varepsilon_m\cos q_{\text{и}}t+\frac{K_B}{J\Omega}\delta+\frac{4M_{0\,\text{т}B}}{\pi J\Omega}\sin qt;$$
$$-qR^*\sin qt+qQ^*\cos qt+\frac{K_C}{J\Omega}(R^*\cos qt+Q^*\sin qt+W^*)=$$
$$=-\omega_B+\frac{4M_{0\,\text{т}C}}{\pi J\Omega}\sin qt.$$

Приравняв в полученных уравнениях коэффициенты правых и левых частей, можем записать

$$-q_{\text{и}}N+\frac{K_B}{J\Omega}L=0;\quad q_{\text{и}}L+\frac{K_B}{J\Omega}N=\frac{K_B}{J\Omega}\varepsilon_m;$$
$$-qR+\frac{K_B}{J\Omega}Q=\frac{4M_{0\,\text{т}B}}{\pi J\Omega};\qquad qQ+\frac{K_B}{J\Omega}R=0;$$
$$\frac{K_B}{J\Omega}W=-\omega_C+\frac{K_B}{J\Omega}\delta;\quad -qR^*+\frac{K_C}{J\Omega}Q^*=\frac{4M_{0\,\text{т}C}}{\pi J\Omega};$$
$$qQ^*+\frac{K_C}{J\Omega}R^*=0;\quad W^*=-\frac{J\Omega\omega_B}{K_C},$$

откуда находим

$$N = \frac{K_B^2}{J^2\Omega^2 q_и^2 + K_B^2} \varepsilon_m; \quad L = \frac{J\Omega K_B q_и}{J^2\Omega^2 q_и^2 + K_B^2} \varepsilon_m;$$

$$Q = \frac{4K_B M_{0\,тB}}{\pi\left(J^2\Omega^2 q^2 + K_B^2\right)}; \quad R = -\frac{4J\Omega q M_{0\,тB}}{\pi\left(J^2\Omega^2 q^2 + K_B^2\right)};$$

$$W = -\frac{J\Omega\omega_C}{K_B} + \delta; \quad Q^* = \frac{4K_C M_{0\,тC}}{\pi\left(J^2\Omega^2 q^2 + K_C^2\right)};$$

$$R^* = -\frac{4J\Omega q M_{0\,тC}}{\pi\left(J^2\Omega^2 q^2 + K_C^2\right)}; \quad W^* = -\frac{J\Omega\omega_B}{K_C}.$$

Подставив вычисленные значения коэффициентов в выражения (385), получим

$$\psi_r = \frac{K_B^2 \varepsilon_m}{J^2\Omega^2 q_и^2 + K_B^2} \cos q_и t + \frac{J\Omega K_B q_и \varepsilon_m}{J^2\Omega^2 q_и^2 + K_B^2} \sin q_и t -$$
$$- \frac{4J\Omega q M_{0\,тB}}{\pi\left(J^2\Omega^2 q^2 + K_B^2\right)} \cos qt + \frac{4K_B M_{0\,тB}}{\pi\left(J^2\Omega^2 q^2 + K_B^2\right)} \sin qt -$$
$$- \frac{J\Omega\omega_C}{K_B} + \delta;$$

$$\vartheta_r = -\frac{4J\Omega q M_{0\,тC}}{\pi\left(J^2\Omega^2 q^2 + K_C^2\right)} \cos qt + \frac{4K_C M_{0\,тC}}{\pi\left(J^2\Omega^2 q^2 + K_C^2\right)} \sin qt - \frac{J\Omega\omega_B}{K_C}$$

или, обозначая

$$\frac{K_B^2 \varepsilon_m}{J^2\Omega^2 q_и^2 + K_B^2} = D\cos\lambda; \quad \frac{J\Omega K_B q_и \varepsilon_m}{J^2\Omega^2 q_и^2 + K_B^2} = D\sin\lambda;$$

$$\frac{4J\Omega q M_{0\,тB}}{\pi\left(J^2\Omega^2 q^2 + K_B^2\right)} = E\cos\varphi; \quad \frac{4K_B M_{0\,тB}}{\pi\left(J^2\Omega^2 q^2 + K_B^2\right)} = E\sin\varphi;$$

$$\frac{4J\Omega q M_{0\,тC}}{\pi\left(J^2\Omega^2 q^2 + K_C^2\right)} = F\cos\nu; \quad \frac{4K_C M_{0\,тC}}{\pi\left(J^2\Omega^2 q^2 + K_C^2\right)} = F\sin\nu,$$

получим

$$\left.\begin{aligned} \psi_r &= D\cos(q_и t - \lambda) - E\cos(qt + \varphi) - \frac{J\Omega\omega_C}{K_B} + \delta; \\ \vartheta_r &= -F\cos(qt - \nu) - \frac{J\Omega\omega_B}{K_C}. \end{aligned}\right\} \quad (386)$$

Величины

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{K_B \varepsilon_m}{\sqrt{J^2\Omega^2 q_{\text{и}}{}^2 + K_B^2}}; \qquad E = \frac{4M_{0\,\text{т}B}}{\pi\sqrt{J^2\Omega^2 q^2 + K_B^2}}; \\ F &= \frac{4M_{0\,\text{т}C}}{\pi\sqrt{J^2\Omega^2 q^2 + K_B^2}} \end{aligned}\right\} \tag{387}$$

характеризуют амплитуды вынужденных колебаний гироскопа, используемого в системе гиромагнитного компаса.

Как видим, амплитуды вынужденных колебаний гироскопа значительно меньше амплитуды колебаний магнитной стрелки. Гироскоп как бы осредняет показания магнитной стрелки, сильно колеблющейся в условиях работы на подвижном объекте. Указанное обстоятельство имеет весьма простое физическое объяснение. При отклонении магнитной стрелки от плоскости магнитного меридиана на гироскоп, как об этом уже говорилось выше, начинает действовать корректирующий момент. Однако вызываемое им прецессионное движение, вследствие большой инертности гироскопа, происходит с весьма малой угловой скоростью. В результате за время одного полупериода колебаний магнитной стрелки гироскоп лишь незначительно отклонится от плоскости магнитного меридиана (рис. 135).

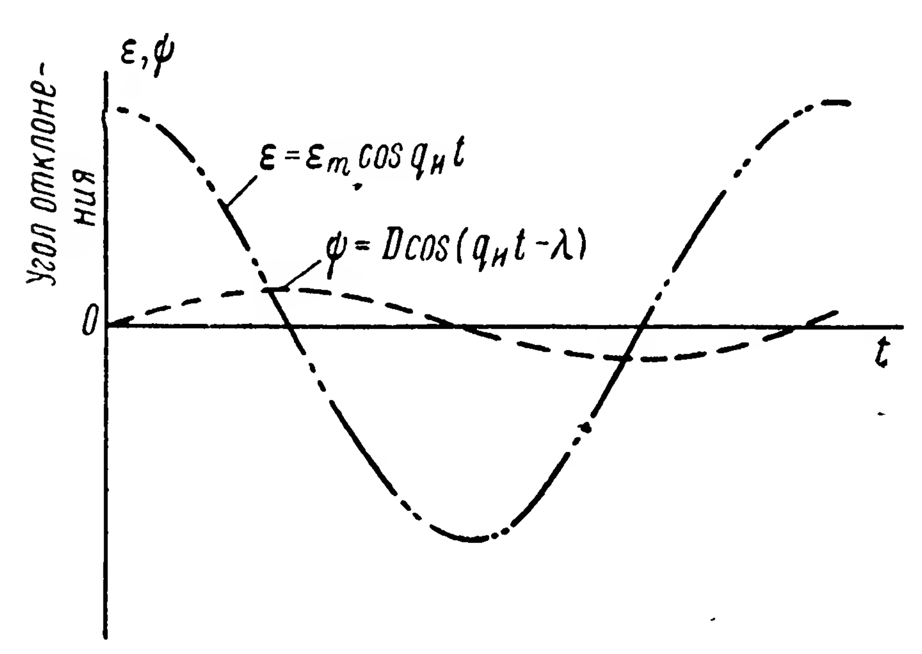


Рис. 135. Графики вынужденных колебаний гироскопа и магнитной стрелки.

Из выражений (386) и (381) следует, что отклонение главной оси гиромагнитного компаса от плоскости меридиана тем больше, чем больше угол магнитного склонения δ. Железные массы и токонесущие проводники, расположенные вблизи стрелки магнитного компаса (см. § 2), оказывают непосредственное влияние на величину угла δ. Поэтому магнитную стрелку на современных подвижных объектах стремятся по возможности изолировать от воздействия магнитных возмущений. С этой целью ее устанавливают в местах, максимально удаленных от двигателей, приборов управления, вращающихся железных масс, электрических проводов и т. п. Для управления корректирующим моментом в этом случае используются различные системы дистанционной передачи. [1]

[1] См.: Н. И. Чистяков. Электрические авиационные приборы. Оборонгиз, 1950, и работы [3, 26, 43].

Введение в схему прибора дистанционной передачи в принципе не изменяет систем уравнений (358) и (359). Поэтому выводы, полученные в результате анализа этих систем, сохраняют свое значение и при изучении характера движения дистанционного гиромагнитного компаса. Правда, при более подробном исследовании в уравнениях движения системы необходимо учитывать еще и ошибки, присущие самой дистанционной передаче.

Пример 27. Определить максимально возможные углы отклонения главной оси гиромагнитного компаса от плоскости меридиана, если на магнитную стрелку действует момент внешних возмущающих сил, изменяющийся по гармоническому закону с амплитудой $M_{0и} = 0{,}09$ *Гсм* и круговой частотой $q_и = 7{,}2$ сек.$^{-1}$. Параметры магнитной стрелки: $J_и = 0{,}01$ *Гсмсек*^{2}; $K_и = 0{,}05$ *Гсм/рад*, $\mu_и = 0{,}006$ *Гсмсек*. Параметры гироскопической системы: $J\Omega = 6000$ *Гсмсек*, $K_B = 500$ *Гсм/рад*, $M_{0\,тB} = 0{,}2$ *Гсм*. Объект, на котором установлен гиромагнитный компас, в процессе своего движения совершает гармонические колебания с круговой частотой $q = 7{,}2$ сек.$^{-1}$. При этом основание прибора вращается вокруг наружной оси подвеса гироскопа с угловой скоростью $\omega_C = 10{,}4 \cdot 10^{-5}$ сек.$^{-1}$. Угол магнитного склонения в районе движения объекта $\delta = 4$ угл. мин.

Амплитуду ε_m вынужденных колебаний магнитной стрелки определим по выражению (384):

$$\varepsilon_m = \frac{M_{0и}}{\sqrt{(K_и - J_и q_и^2)^2 + \mu_и q_и^2}} =$$

$$= \frac{0{,}09}{\sqrt{(0{,}05 - 0{,}01 \cdot 7{,}2^2)^2 + 0{,}006^2 \cdot 7{,}2^2}} = 0{,}191 \text{ рад.}$$

или соответственно

$$\varepsilon_m = 0{,}191 \cdot 57{,}3 = 10°94.$$

Учитывая найденное значение ε_m и значения входящих в выражения (387) величин, находим амплитуды D и E колебаний гироскопа вокруг его наружной оси подвеса:

$$D = \frac{K_B \varepsilon_m}{\sqrt{J^2\Omega^2 q_и^2 + K_B^2}} = \frac{500 \cdot 0{,}191}{\sqrt{6000^2 \cdot 7{,}2^2 + 500^2}} = 2{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ рад.};$$

$$E = \frac{4M_{0\,тB}}{\pi \sqrt{J^2\Omega^2 q^2 + K_B^2}} = \frac{4 \cdot 0{,}2}{3{,}14 \sqrt{6000^2 \cdot 7{,}2^2 + 500^2}} = 5{,}9 \cdot 10^{-6} \text{ рад.}$$

или соответственно

$$D = 2{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 57{,}3 \cdot 60 = 7{,}56 \text{ угл. мин.};$$

$$E = 5{,}9 \cdot 10^{-6} \cdot 57{,}3 \cdot 60 = 0{,}02 \text{ угл. мин.}$$

Отклонение гироскопа от плоскости магнитного меридиана, согласно (386), определится из равенства

$$\psi_{r\omega} = \frac{J\Omega\omega_C}{K_B} = \frac{6000 \cdot 10{,}4 \cdot 10^{-5}}{500} = 1{,}25 \cdot 10^{-3} \text{ рад.},$$

или

$$\psi_{r\omega} = 1{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot 57{,}3 \cdot 60 = 4{,}3 \text{ угл. мин.}$$

Таким образом, в случаях совпадения знаков перечисленных отклонений максимальное значение угла, составляемого главной осью гиромагнитного компаса с плоскостью меридиана, может достичь величины

$$\psi_{max} = D + E + \psi_{r\omega} + \delta =$$
$$= 7{,}56 + 0{,}02 + 4{,}3 + 4 = 15{,}88 \text{ угл. мин.} \approx 16 \text{ угл. мин.}$$

§ 61. АВТОКОЛЕБАНИЯ ГИРОМАГНИТНОГО КОМПАСА С РЕЛЕЙНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ КОРРЕКЦИИ

Движение гиромагнитного компаса при релейной характеристике коррекции описывается тремя дифференциальными уравнениями (359). Учитывая, что при гармонических возмущениях магнитной стрелки ее вынужденные колебания определяются вторым слагаемым выражения (373), перепишем систему (359) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\left(\dot{\psi} + \omega_C\right) &= -M_{0\,\text{к}B}\,\text{sign}\,(\psi - \varepsilon_m \cos q_\text{и} t - \delta) + \\ &\quad + \frac{4M_{0\,\text{т}B}}{\pi}\sin qt; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\left(\dot{\vartheta} + \omega_B\right) &= M_{0\,\text{к}C}\,\text{sign}\,(\vartheta) - \frac{4M_{0\,\text{т}C}}{\pi}\sin qt, \end{aligned}\right\} \quad (388)$$

где ε_m и $q_\text{и}$ — амплитуда и частота вынужденных колебаний магнитной стрелки.

Пренебрегая в (388) членами, влияющими на параметры нутационных колебаний, можем записать:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi} &= -\omega_C - \frac{M_{0\,\text{к}B}}{J\Omega}\,\text{sign}\,(\psi - \varepsilon_m \cos q_\text{и} t - \delta) + \\ &\quad + \frac{4M_{0\,\text{т}B}}{\pi J\Omega}\sin qt; \\ \dot{\vartheta} &= -\omega_B + \frac{M_{0\,\text{к}C}}{J\Omega}\,\text{sign}\,(\vartheta) - \frac{4M_{0\,\text{т}C}}{\pi J\Omega}\sin qt. \end{aligned}\right\} \quad (389)$$

Из (389) можно определить необходимые значения корректирующих моментов $M_{0\,\text{к}B}$ и $M_{0\,\text{к}C}$. Полагая, как и выше (§ 52), что для времени t, близкого к любому фиксированному моменту времени τ, величины угловых скоростей ω_B и ω_C остаются практически постоянными, будем колебания гироскопа рассматривать отдельно для каждого размаха. При этом условии уравнения (389) принимают вид

$$\dot{\psi} = -\omega_C \pm \frac{M_{0\,\text{к}B}}{J\Omega} + \frac{4M_{0\,\text{т}B}}{\pi J\Omega}\sin qt;$$

$$\dot{\vartheta} = -\omega_B \pm \frac{M_{0\,\text{к}C}}{J\Omega} - \frac{4M_{0\,\text{т}C}}{\pi J\Omega}\sin qt,$$

откуда следует, что максимальные значения угловых скоростей по модулю будут равны

$$\left.\begin{aligned} |\dot{\psi}|_{max} &= \omega_{C\,max} + \frac{M_{0\,кB}}{J\Omega} + \frac{4M_{0\,тB}}{\pi J\Omega}; \\ |\dot{\vartheta}|_{max} &= \omega_{B\,max} + \frac{M_{0\,кC}}{J\Omega} + \frac{4M_{0\,тC}}{\pi J\Omega}, \end{aligned}\right\} \tag{390}$$

где $\omega_{B\,max}$ и $\omega_{C\,max}$ — максимально возможные значения угловых скоростей вращения основания прибора вокруг осей подвеса гироскопа при перемещениях объекта по заданному маршруту.

Для сохранения главной оси гиромагнитного компаса неизменно совмещенной с плоскостями горизонта и магнитного меридиана необходимо, чтобы углы ϑ и ψ были равны нулю. Так как величины этих углов при нулевых начальных условиях определяются выражениями

$$\psi = \left(\omega_C + \frac{M_{0\,кB}}{J\Omega} + \frac{4M_{0\,тB}}{\pi J\Omega}\right) t;$$

$$\vartheta = \left(\omega_B + \frac{M_{0\,кC}}{J\Omega} + \frac{4M_{0\,тC}}{\pi J\Omega}\right) t,$$

то равенства $\psi = 0$ и $\vartheta = 0$ будут соблюдаться лишь только в том случае, если

$$\left.\begin{aligned} M_{0\,кB} &\geqslant \left| J\Omega\omega_{C\,max} + \frac{4M_{0\,тB}}{\pi} \right|; \\ M_{0\,кC} &\geqslant \left| J\Omega\omega_{B\,max} + \frac{4M_{0\,тC}}{\pi} \right|. \end{aligned}\right\} \tag{391}$$

Полученные неравенства определяют те минимальные значения корректирующих моментов $M_{0\,кB}$ и $M_{0\,кC}$, которые необходимы для удержания главной оси гироскопа в неизменном положении относительно плоскостей горизонта и магнитного меридиана. Однако надлежащий выбор величин корректирующих моментов еще не в полной мере характеризует работу гиромагнитного компаса с релейной схемой коррекции. При отсутствии внешних возмущений после успокоения собственных колебаний магнитной стрелки рассматриваемая гироскопическая система может войти в режим автоколебаний.

Амплитуда и частота автоколебательного режима будут непосредственно влиять на качество работы прибора. Вот почему при исследовании движения гироскопа, снабженного корректирующими устройствами с релейной характеристикой, должны быть обязательно определены амплитуда и частота возможных автоколебаний. Обратимся с этой целью вновь к системе (359). При анализе колебаний гироскопа около положения равновесия,

определяемого по выражениям (377) и (382), представляется возможным полагать, что ω_B, ω_C и δ равны нулю. Если внешние возмущения отсутствуют, то после успокоения собственных колебаний магнитной стрелки величина ε_m также равна нулю. Тогда моменты $M_{0\,\text{т}B}$ и $M_{0\,\text{т}C}$ сил трения в опорах подвеса будут менять свой знак только в зависимости от изменения знака угловых скоростей движения гироскопа (см. § 36). При этих условиях система уравнений (359) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\psi} &= -M_{0\,\text{к}B}\,\text{sign}\,(\psi) - M_{0\,\text{т}B}\,\text{sign}\,(\dot{\vartheta}); \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\dot{\vartheta} &= M_{0\,\text{к}C}\,\text{sign}\,(\vartheta) - M_{0\,\text{т}C}\,\text{sign}\,(\dot{\psi}). \end{aligned}\right\} \quad (392)$$

Решить полученную систему уравнений в общем виде не представляется возможным, поэтому приходится обращаться к приближенным методам. Воспользуемся методом гармонической линеаризации.[1] Будем полагать, что рассматриваемые автоколебания близки к гармоническим, и искать решение системы уравнений (392) в виде

$$\vartheta = L\cos n_a t;$$

$$\psi = N\sin n_a t. \quad (393)$$

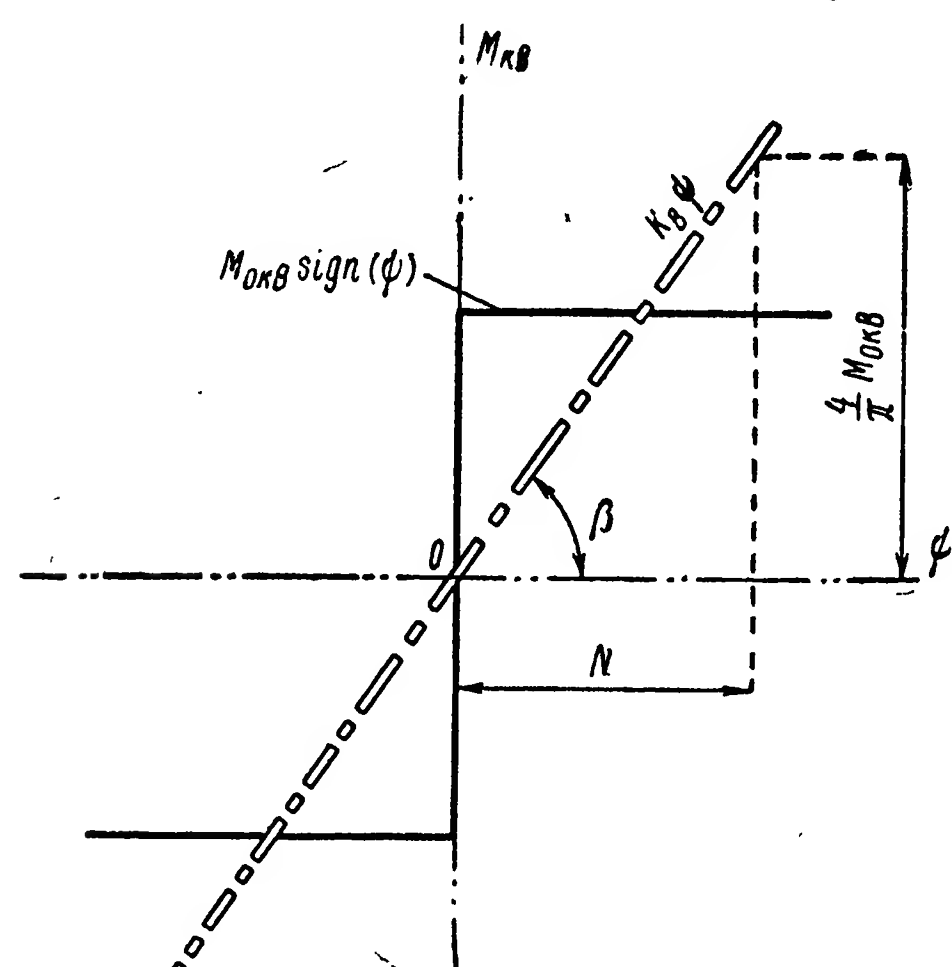


Рис. 136. Линеаризация функции $M_{k0\,B}\,\text{sign}\,(\psi)$.

Как было показано выше (§ 37), при периодических колебаниях гироскопа функцию

$$M_{\text{к}B}(t) = M_{0\,\text{к}B}\,\text{sign}\,(\psi) = f(\psi)$$

можно разложить в ряд Фурье (252).

Ограничиваясь первым членом ряда и учитывая (393), будем иметь

$$M_{\text{к}B}(t) = \frac{4M_{0\,\text{к}B}}{\pi}\sin n_a t. \quad (394)$$

Зависимость (394) позволяет определить тот коэффициент пропорциональности K_B, который должен быть учтен в уравнениях (392) при замене в них нелинейной функции $M_{\text{к}B}(\psi) = M_{0\,\text{к}B}\,\text{sign}\,(\psi)$ соответствующей ей приближенной линейной функцией $M_{\text{к}B}(\psi) = K_B\psi$ (рис. 136). В тот момент, когда угол ψ

[1] См.: Е. П. Попов и И. П. Пальтов. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. Физматгиз, 1960.

достигнет значения N, что согласно (393) наступит при $\sin n_a t = 1$, величина корректирующего момента, как это следует из (394), достигнет значения $\frac{4M_{0\,\text{к}B}}{\pi}$. Таким образом, величина коэффициента K_B, равная тангенсу угла β, определится зависимостью

$$K_B = \operatorname{tg}\beta = \frac{4M_{0\,\text{к}B}}{\pi N}. \qquad (395)$$

Аналогичным образом могут быть найдены коэффициент пропорциональности K_C при гармонической линеаризации функции $M_{\text{к}C}(\vartheta)$ и соответственно коэффициенты μ_B и μ_C при гармонической линеаризации функций $M_{\text{т}B}(\dot\vartheta)$ и $M_{\text{т}C}(\dot\psi)$:

$$K_C = \frac{4M_{0\,\text{к}C}}{\pi L}; \quad \mu_B = \frac{4M_{0\,\text{т}B}}{\pi n_a L}; \quad \mu_C = \frac{4M_{0\,\text{т}C}}{\pi n_a N}. \qquad (396)$$

Учитывая изложенное, перепишем систему уравнений (392) в линейном виде

$$J_B\ddot\vartheta + J\Omega\dot\psi = -K_B\psi - \mu_B\dot\vartheta;$$

$$J_C\ddot\psi - J\Omega\dot\vartheta = K_C\vartheta - \mu_C\dot\psi$$

или в символической форме записи

$$\left.\begin{aligned}(J_Bp^2 + \mu_Bp)\,\vartheta + (J\Omega p + K_B)\,\psi = 0;\\ (J_Cp^2 + \mu_Cp)\,\psi - (J\Omega p + K_C)\,\vartheta = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (397)$$

Разрешив систему (397) относительно переменной ψ, будем иметь

$$(J_BJ_Cp^4 + J_B\mu_Cp^3 + J_C\mu_Bp^3 + \mu_B\mu_Cp^2 + J^2\Omega^2p^2 +$$
$$+ J\Omega K_Bp + J\Omega K_Cp + K_BK_C)\,\psi = 0.$$

Так как в реальных конструкциях гироскопических приборов коэффициенты μ_B и μ_C моментов сил трения малы, можно утверждать, что

$$\mu_B\mu_C \ll J^2\Omega^2.$$

Угол ψ отклонения гироскопа от заданного ему положения в процессе его автоколебаний также мал. В то же время угловая скорость $\dot\psi = p\psi$ вследствие высокой частоты этих колебаний может достигать больших значений. Поэтому всегда будут существовать неравенства

$$J\Omega K_Bp > K_BK_C < J\Omega K_Cp.$$

Опуская на этом основании четвертый и последний члены исследуемого уравнения как величины высших порядков малости

по сравнению с остальными, можем записать

$$(J_B J_C p^4 + J_B \mu_C p^3 + J_C \mu_B p^3 + J^2 \Omega^2 p^2 + \\ + J\Omega K_B p + J\Omega K_C p)\,\psi = 0. \tag{398}$$

Обращаясь теперь к характеристическому уравнению, соответствующему дифференциальному уравнению (398), находим

$$p\,(J_B J_C p^3 + J_B \mu_C p^2 + J_C \mu_B p^2 + J^2 \Omega^2 p + \\ + J\Omega K_B + J\Omega K_C) = 0.$$

Его первый корень $p = 0$ не влияет на характер движения гироскопа (см. § 14) и поэтому должен быть опущен из рассмотрения. Оставшееся уравнение

$$J_B J_C p^3 + J_B \mu_C p^2 + J_C \mu_B p^2 + J^2 \Omega^2 p + \\ + J\Omega K_B + J\Omega K_C = 0 \tag{399}$$

позволяет определить искомые параметры исследуемых автоколебаний.

Как было показано в § 13, гармонические изменения угла ψ, обусловливаемые зависимостью (393), могут иметь место лишь только в том случае, если корни характеристического уравнения (399) будут чисто мнимыми. Подставив на этом основании в уравнение (399) значение $p = in_a$ и выделив в последнем вещественную и мнимую части, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} &-J_B J_C n_a^3 + J^2 \Omega^2 n_a = 0; \\ &-(J_B \mu_C + J_C \mu_B)\, n_a^2 + J\Omega\,(K_B + K_C) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{400}$$

Из первого уравнения (400), учитывая, что $n_a \neq 0$, находим частоту n_a автоколебаний:

$$n_a = \frac{J\Omega}{\sqrt{J_B J_C}}. \tag{401}$$

Второе уравнение (400) позволяет определить амплитуду автоколебаний. Для этого необходимо иметь суждение хотя бы о приближенных значениях коэффициентов μ_B и μ_C. При этом условии, подставив во второе уравнение (400) значения (395), (396) и (401) коэффициентов K_B, K_C и частоты n_a автоколебаний, получим

$$\frac{4}{\pi}\left(\frac{M_{0\,\text{к}B}}{N} + \frac{M_{0\,\text{к}C}}{L}\right) = \frac{J\Omega}{J_B J_C}\,(J_B \mu_C + J_C \mu_B). \tag{402}$$

Законы движения гироскопа, рассмотренные в гл. II, показывают, что между амплитудами его колебаний вокруг внутренней и наружной осей подвеса существует определенная зависи-

мость. Согласно выражениям (57) эта зависимость в рассматриваемом случае может быть записана равенством

$$L = \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\, N. \tag{403}$$

Учитывая его в выражении (402), находим

$$N = \frac{4J_BJ_C\,(\sqrt{J_C}M_{0\,\text{к}C} + \sqrt{J_B}M_{0\,\text{к}B})}{\pi J\Omega\,\sqrt{J_B}\,(J_B\mu_C + J_C\mu_B)}. \tag{404}$$

Как видим, частота n_a автоколебаний гироскопа, снабженного корректирующими устройствами с релейной характеристикой, равна частоте n его нутационных колебаний, определяемой из выражения (53) при $\vartheta_0 = 0$. Корректирующие моменты $M_{\text{к}B}$ и $M_{\text{к}C}$ непрерывно поддерживают возникшие автоколебания, которые при выключенной коррекции неизбежно почти сразу же прекратятся вследствие сил трения в опорах подвеса гироскопа.

Пример 28. Определить частоту и амплитуду автоколебаний гиромагнитного компаса, имеющего следующие параметры: кинетический момент $J\Omega = 2400$ *Гсмсек*, моменты инерции гироскопа относительно осей подвеса $J_B = 0{,}7$ *Гсмсек*^{2} и $J_C = 5{,}5$ *Гсмсек*^{2}, корректирующие моменты $M_{0\,\text{к}B} = M_{0\,\text{к}C} = 4{,}0$ *Гсм*, моменты сил трения в опорах подвеса $M_{0\,\text{т}B} = 2{,}0$ *Гсм* и $M_{0\,\text{т}C} = 3{,}0$ *Гсм*.

Подставив значения параметров гироскопа в выражение (401), найдем круговую частоту автоколебаний:

$$n_a = \frac{J\Omega}{\sqrt{J_BJ_C}} = \frac{2400}{\sqrt{0{,}7\cdot 5{,}5}} = 1226 \text{ гц}.$$

Предположим, что амплитуда N автоколебаний гироскопа вокруг его наружной оси подвеса не превосходит 5 угл. мин.:

$$N = 5' = \frac{5}{60\cdot 57{,}3} = 1{,}45\cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Учитывая соотношения (403) между амплитудами колебаний гироскопа вокруг его осей подвеса, находим

$$L = \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\, N = \sqrt{\frac{0{,}7}{5{,}5}}\, 1{,}45\cdot 10^{-3} = 0{,}52\cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

По зависимостям (396) определим соответственно

$$\mu_B = \frac{4M_{0\,\text{т}B}}{\pi n_a L} = \frac{4\cdot 2}{3{,}14\cdot 1226\cdot 0{,}52\cdot 10^{-3}} = 4{,}0 \text{ Гсмсек};$$

$$\mu_C = \frac{4M_{0\,\text{т}C}}{\pi n_a N} = \frac{4\cdot 3}{3{,}14\cdot 1226\cdot 1{,}45\cdot 10^{-3}} = 2{,}15 \text{ Гсмсек}.$$

Подставив вычисленные значения μ_B и μ_C в выражение (404), найдем амплитуду автоколебаний гироскопа вокруг его наружной оси подвеса:

$$N = \frac{4J_BJ_C\,(\sqrt{J_C}M_{0\,\text{к}C} + \sqrt{J_B}M_{0\,\text{к}B})}{\pi J\Omega\,\sqrt{J_B}\,(J_B\mu_C + J_C\mu_B)} =$$

$$= \frac{4\cdot 0{,}7\cdot 5{.}5\,(\sqrt{5{,}5}\cdot 4 + \sqrt{0{,}7}\cdot 4)}{3{,}14\cdot 2400\,\sqrt{0{,}7}\,(0{,}7\cdot 2{,}15 + 5{,}5\cdot 4)} = 1{,}32\cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

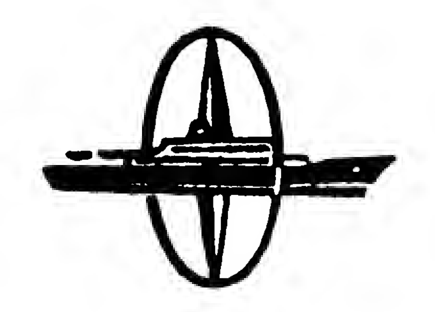
или соответственно

$$N = 1{,}32\cdot 10^{-3}\cdot 57{,}3\cdot 60 = 4{,}56 \text{ угл. мин.}$$

По (403) вычисляем амплитуду

$$L = \sqrt{\frac{J_B}{J_C}}\,N = \sqrt{\frac{0{,}7}{5{,}5}}\,4{,}56 = 1{,}71 \text{ угл. мин.}$$

Так как величина амплитуды N близко совпадает со сделанным в начале расчета предположением, определение параметров автоколебаний гироскопа на этом можно закончить. Если бы такого совпадения не произошло, потребовалось бы уточнить значения коэффициентов μ_B и μ_C моментов сил трения и затем повторно вычислить амплитуды автоколебаний системы. В ряде случаев целесообразно проверить устойчивость рассматриваемых автоколебаний (см. подстрочное примечание на стр. 306).



Глава IX

ГИРОСКОПИЧЕСКИЙ КОМПАС

§ 62. ГИРОКОМПАС ФУКО

Одно из замечательных свойств гироскопа заключается в его стремлении приводить свою главную ось, принудительно удерживаемую в горизонтальном положении, к совмещению с плоскостью географического меридиана. На это свойство указывал Л. Фуко еще в 1852 году.

Представим, что гироскоп не имеет внутреннего карданова кольца. Ротор такого гироскопа (рис. 137) монтируют непосредственно в наружном кольце, вследствие чего гироскоп лишается одной степени свободы. В этом случае он обладает свободой вращения только вокруг осей OA и OC. Выберем на земной поверхности некоторый расположенный на экваторе пункт L, в котором установим гироскоп таким образом, чтобы его наружная ось OC была вертикальна. Из-за отсутствия у гироскопа свободы вращения вокруг оси OB его главная ось OA будет неизменно горизонтальной.

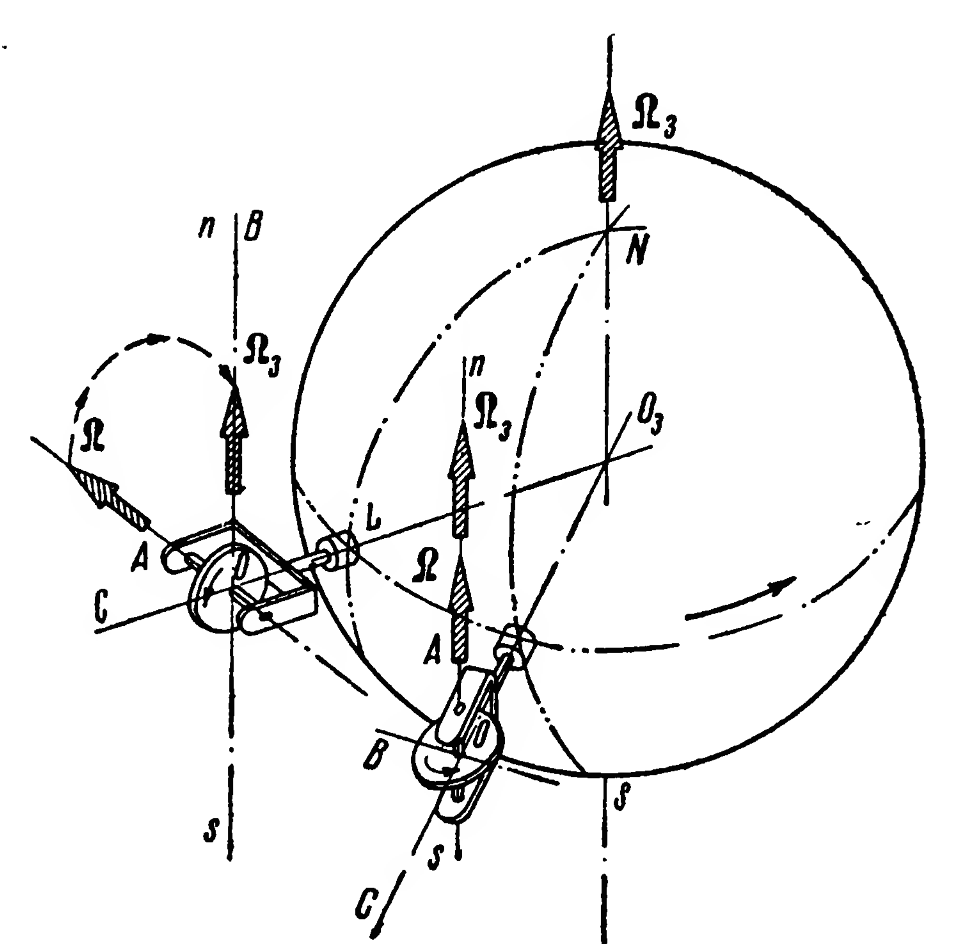


Рис. 137. Принципиальная схема гирокомпаса Фуко.

Предположим, что в начальный момент времени ось OA была направлена с востока на запад. При таком расположении гироскопа его ротор вынужден совершать вращение не только вокруг оси OA: участвуя в суточном вращении Земли, ротор гироскопа будет непрерывно поворачиваться еще и вокруг полуденной линии ns, которая на экваторе параллельна земной оси NS. Таким образом, с первого же мгновения гироскоп начнет вращаться одновременно вокруг оси OA с угловой скоростью Ω и вокруг оси ns с угловой скоростью $\Omega_з$. Следовательно, его движение (см. § 8) будет сопровождаться поворотным ускорением. Это

обстоятельство, как известно, вызовет поворот гироскопа вокруг его наружной оси OC, свобода вращения относительно которой ничем, кроме сил трения в опорах, не ограничена. В процессе поворота главная ось OA гироскопа будет стремиться совместиться с осью ns его вынужденного вращения. В тот момент, когда такое совмещение произойдет, поворотное ускорение гироскопа станет равным нулю, в связи с чем исчезнет и сама причина, вызывающая его вращение вокруг наружной оси подвеса OC.

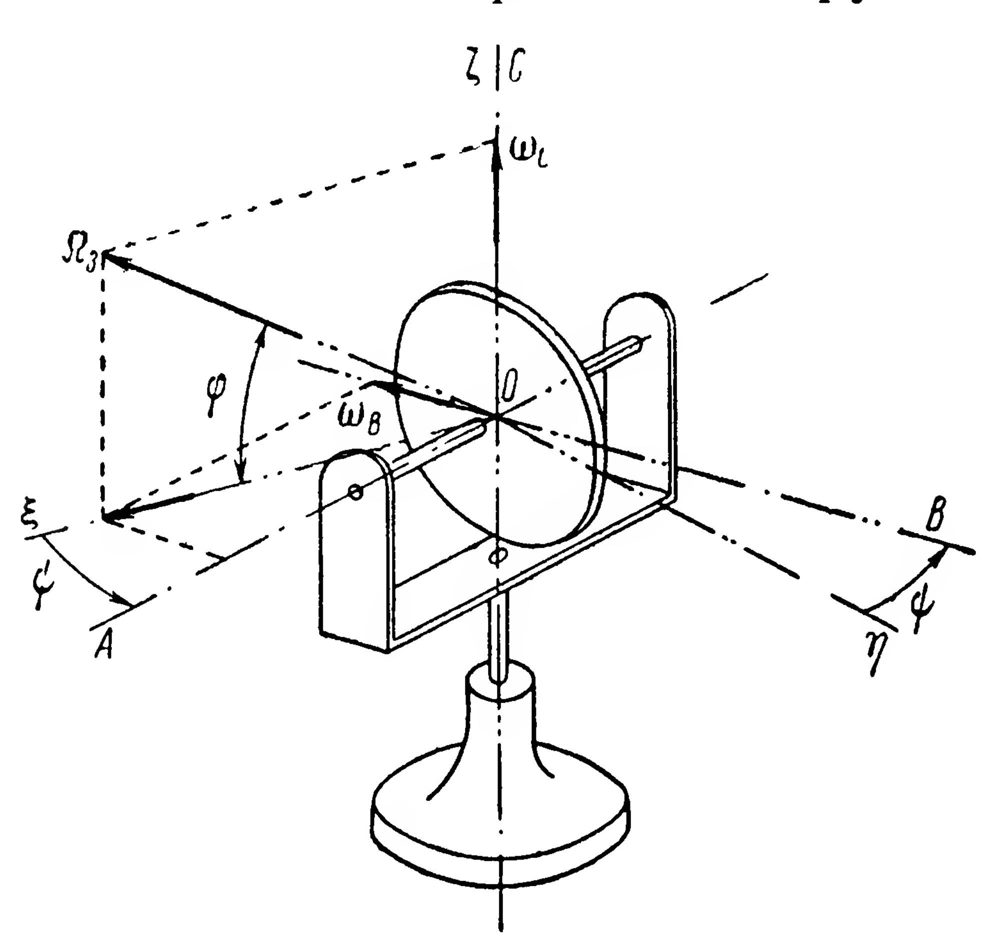


Рис. 138. Положение гирокомпаса Фуко относительно земных ориентиров.

Характер движения и время прихода главной оси OA гироскопа с двумя степенями свободы к совмещению с осью его вынужденного вращения уже были рассмотрены в § 32. Поэтому исследуем здесь движение гироскопа лишь вблизи плоскости географического меридиана. Обратимся с этой целью к уравнениям (162). Учтем, что в рассматриваемом случае углы ϑ_0 и ϑ неизменно равны нулю в силу самой конструктивной схемы прибора (рис. 138). Угол ψ_0 также равен нулю, так как отклонения гироскопа от плоскости $\xi O\zeta$ географического меридиана исследуются лишь в пределах малого угла ψ. При этих условиях система (162) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} J\Omega(\dot{\psi} + \omega_C) &= M_B; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\omega_B &= M_C. \end{aligned}\right\} \qquad (405)$$

При неподвижном положении корпуса прибора на земной поверхности угловые скорости ω_B и ω_C его вращения в пространстве будут определяться проекциями на оси OB и OC лишь вектора $\overline{\Omega}_з$ угловой скорости суточного вращения Земли. Как известно (см. § 27), вектор $\overline{\Omega}_з$ лежит в плоскости $\xi O\zeta$ географического меридиана и составляет с полуденной линией $O\xi$ угол φ, равный углу географической широты места; его проекции на оси OB и OC будут соответственно равны

$$\omega_B = -\Omega_з \cos\varphi \sin\psi \approx -\Omega_з\psi\cos\varphi; \qquad \omega_C = \Omega_з \sin\varphi.$$

Так как внешние силы не могут создавать момента относительно оси OB (рис. 138), то в уравнениях (405) величина M_B

будет равна нулю, а момент M_C обусловится лишь силами трения в опоре по оси OC.

Будем полагать, что момент M_C обусловлен силами вязкого трения. При этом условии система уравнения (405) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi} &= -\Omega_з \sin \varphi; \\ J_C\ddot{\psi} + J\Omega\Omega_з\psi \cos \varphi &= -\mu\dot{\psi}. \end{aligned}\right\} \quad (406)$$

Переписав ее второе уравнение

$$\ddot{\psi} + a\dot{\psi} + b\psi = 0, \quad (407)$$

где

$$a = \frac{\mu}{J_C}; \qquad b = \frac{J\Omega\Omega_з \cos \varphi}{J_C},$$

заметим, что $b > \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Поэтому решение уравнения (407) по аналогии с решением (361) уравнения (360) определится выражением

$$\psi = e^{-\frac{a}{2}t}(C_1 \cos nt + C_2 \sin nt), \quad (408)$$

где согласно (407)

$$n = \sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4J\Omega J_C\Omega_з \cos \varphi - \mu^2}}{2J_C}. \quad (409)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2, входящие в выражение (408), определяются начальными условиями. Первое уравнение (406) показывает, что с первого же мгновения гироскоп отклоняется от плоскости меридиана. Если в начальный момент его ось OA составляет с плоскостью меридиана $\xi O\zeta$ угол $\psi_н$, то начальные условия движения будут определяться равенствами

$$\psi(0) = \psi_н; \quad \dot{\psi}(0) = -\Omega_з \sin \varphi.$$

При этих условиях из выражения (408) следует

$$C_1 = \psi_н,$$

а из его первой производной

$$\dot{\psi}(0) = -\frac{a}{2}C_1 + nC_2 = -\Omega_з \sin \varphi.$$

Учитывая величину C_1, значение n, определяемое из равенства (409), и обозначение (407) из последнего равенства, находим

$$C_2 = -\frac{2(J_C\Omega_з \sin \varphi + \mu\psi_н)}{\sqrt{4J\Omega J_C\Omega_з \cos \varphi - \mu^2}}.$$

Подставив найденные значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 в выражение (408), будем иметь

$$\psi = e^{-\frac{a}{2}t}\left[\psi_н \cos nt - \frac{2(J_C\Omega_3 \sin\varphi + \mu\psi_н)}{\sqrt{4J\Omega J_C\Omega_3 \cos\varphi - \mu^2}} \sin nt\right].$$

Обозначив

$$\psi_н = N\cos\lambda; \quad \frac{2(J_C\Omega_3 \sin\varphi + \mu\psi_н)}{\sqrt{4J\Omega J_C\Omega_3 \cos\varphi - \mu^2}} = N\sin\lambda,$$

можем записать

$$\psi = e^{-\frac{a}{2}t} N\cos(nt + \lambda). \tag{410}$$

Учитывая малость величин Ω_3 и μ, практически можно принять, что

$$N = \sqrt{\psi_н^2 + \frac{4(J_C\Omega_3 \sin\varphi + \mu\psi_н)^2}{4J\Omega J_C\Omega_3 \cos\varphi - \mu^2}} \approx \psi_н.$$

Изложенное выше показывает, что рассматриваемое гироскопическое устройство из любого произвольного положения движется к совмещению своей главной оси с плоскостью географического меридиана. Совершив относительно последней несколько затухающих колебаний, гироскоп установится так, что его главная ось будет параллельна полуденной линии и совмещена с плоскостью меридиана. Как видим, описанный гироскоп выполняет функции компаса. По имени его автора он был назван гирокомпасом Фуко.

§ 63. ПРАКТИЧЕСКОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГИРОКОМПАСА ФУКО

Из формулы (409) следует, что период колебаний гирокомпаса Фуко около плоскости меридиана весьма мал:

$$T = \frac{2\pi}{n} = \frac{4\pi J_C}{\sqrt{4J\Omega J_C\Omega_3 \cos\varphi - \mu^2}}. \tag{411}$$

Это создает определенные затруднения при использовании гирокомпаса Фуко на подвижных объектах. Представим, что объект перемещается относительно земной поверхности в горизонтальной плоскости по локсодромии и совершает при этом гармонические колебания вокруг своего центра тяжести (см. рис. 72). Будем полагать, что на объекте установлен гирокомпас Фуко (см. рис. 138), наружная ось подвеса которого вертикальна.

При указанных условиях угловая скорость вращения основания прибора вокруг оси OB гироскопа (см. § 29 и 37) определится из выражения

$$\omega_B = -\Omega_3 \cos\varphi \sin\psi_0 + \frac{V}{R}\cos(\alpha - \psi_0) + \omega_{0B} \sin qt$$

или, если заменить угол ψ_0 углом ψ малых отклонений гироскопа от плоскости меридиана, из выражения

$$\omega_B = -\Omega_з\psi\cos\varphi + \frac{V}{R}\cos\alpha + \frac{V}{R}\psi\sin\alpha + \omega_{0B}\sin qt,$$

где α — курс объекта;

q — круговая частота его колебаний.

Подставив значение угловой скорости ω_B во второе уравнение (405), будем иметь

$$J_C\ddot{\psi} + J\Omega\left(\Omega_з\cos\varphi - \frac{V}{R}\sin\alpha\right)\psi =$$

$$= J\Omega\frac{V}{R}\cos\alpha + J\Omega\omega_{0B}\sin qt + M_C.$$

Если по аналогии с предыдущим (§ 52) учесть, что широта места φ изменяется медленно, и пренебречь влиянием момента M_C, то для времени t, близкого к τ, движение гирокомпаса Фуко может быть описано уравнением

$$\ddot{\psi} + n^2\psi = \frac{J\Omega}{J_C}\cdot\frac{V}{R}\cos\alpha + \frac{J\Omega\omega_{0B}}{J_C}\sin qt, \qquad (412)$$

где

$$n^2 = \frac{J\Omega}{J_C}\left(\Omega_з\cos\varphi_\tau - \frac{V}{R}\sin\alpha\right). \qquad (413)$$

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения (412) будем искать в виде

$$\psi_r = L\cos qt + R\sin qt + Q. \qquad (414)$$

Подставив значения ψ_r и $\dot{\psi}_r$, определяемые из выражения (414), в уравнение (412), будем иметь

$$-q^2L\cos qt - q^2R\sin qt + n^2L\cos qt + n^2R\sin qt +$$

$$+ n^2Q = \frac{J\Omega}{J_C}\frac{V}{R}\cos\alpha + \frac{J\Omega\omega_{0B}}{J_C}\sin qt.$$

Приравняв коэффициенты в обеих частях полученного тождества, найдем

$$L = 0; \quad R = \frac{J\Omega\omega_{0B}}{J_C(n^2 - q^2)}; \qquad Q = \frac{J\Omega}{J_Cn^2}\cdot\frac{V}{R}\cos\alpha.$$

Заменив в выражении (414) величины L, R и Q их найденными значениями, получим частное решение уравнения (412)

$$\psi_r = \frac{J\Omega\omega_{0B}}{J_C(n^2 - q^2)}\sin qt + \frac{J\Omega}{J_Cn^2}\cdot\frac{V}{R}\cos\alpha.$$

Решение соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$\ddot{\psi} + n^2\psi = 0$$

будет определяться по выражению (408) при $a = \frac{\mu}{J_C} = 0$.

Таким образом, общее решение уравнения (412) принимает вид

$$\psi = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt + \\ + \frac{J\Omega\omega_{0B}}{J_C(n^2 - q^2)} \sin qt + \frac{J\Omega}{J_C n^2} \frac{V}{R} \cos \alpha. \quad (415)$$

Полученное выражение показывает, что главная ось гирокомпаса Фуко, установленного на объекте, перемещающемся относительно земной поверхности, совершает колебания не относительно плоскости географического меридиана, а относительно некоторого азимутального направления, составляющего с плоскостью меридиана угол

$$\delta_г = \frac{J\Omega}{J_C n^2} \frac{V}{R} \cos \alpha.$$

Угол $\delta_г$ называется скоростной девиацией гирокомпаса. Учитывая значение n, определяемое из выражения (413), найдем величину этого угла:

$$\delta_г = \frac{V \cos \alpha}{R\,\Omega_з \cos \varphi - V \sin \alpha}. \quad (416)$$

При высоких скоростях движения современных объектов угол $\delta_г$ может достигать весьма больших значений, что, естественно, будет затруднять использование прибора при определении положения меридиана на подвижном объекте. Однако основной недостаток гирокомпаса Фуко заключается в высокой чувствительности к внешним возмущениям. Амплитуда его вынужденных колебаний, описываемых третьим членом выражения (415), может достигать весьма больших значений. Поведение гирокомпаса Фуко на подвижном объекте аналогично поведению в этих условиях магнитной стрелки (§ 2). Поэтому гирокомпас Фуко и не был использован для работы на подвижных объектах.

Однако гирокомпас Фуко нашел широкое применение при топографических, маркшейдерских и геодезических работах [8, 19], когда требуется определить направление географического меридиана на неподвижном относительно земных ориентиров основании. Чтобы показания такого гирокомпаса отвечали требуемой точности, в опорах его наружной оси OC должны отсутствовать силы сухого трения. В самом деле, если силы трения будут существовать, то второе уравнение (406) примет вид

$$J_C\ddot{\psi} + J\Omega\Omega_з\psi \cos \varphi = \pm M_{0\,тC}.$$

Как видим, прибор в этом случае будет иметь угол застоя

$$\psi_r = \pm \frac{M_{0\,тС}}{J\Omega\Omega_з \cos\varphi}$$

тем больший, чем больше величина момента $M_{0\,тС}$.

Для уменьшения угла застоя в современных конструкциях гирокомпаса Фуко используются гидравлические, воздушные и торсионные подвесы. При гидравлическом подвесе (рис. 139) ротор P гироскопа, вращающийся вокруг оси OA, помещают внутри герметически закрытого цилиндра $НК$, выполняющего в приборе функцию наружного карданова кольца. Цилиндр $НК$ с помощью двух опорных цапф a и b, выполненных в виде входящих в сферические подпятники полушарий, подвешивается в корпусе $КП$ прибора. Насос $Н$ непрерывно нагнетает в зазоры между опорными поверхностями цапф и подпятников жидкость, создавая тем самым своеобразную гидравлическую подушку, на которой и покоится гироскопическая система.

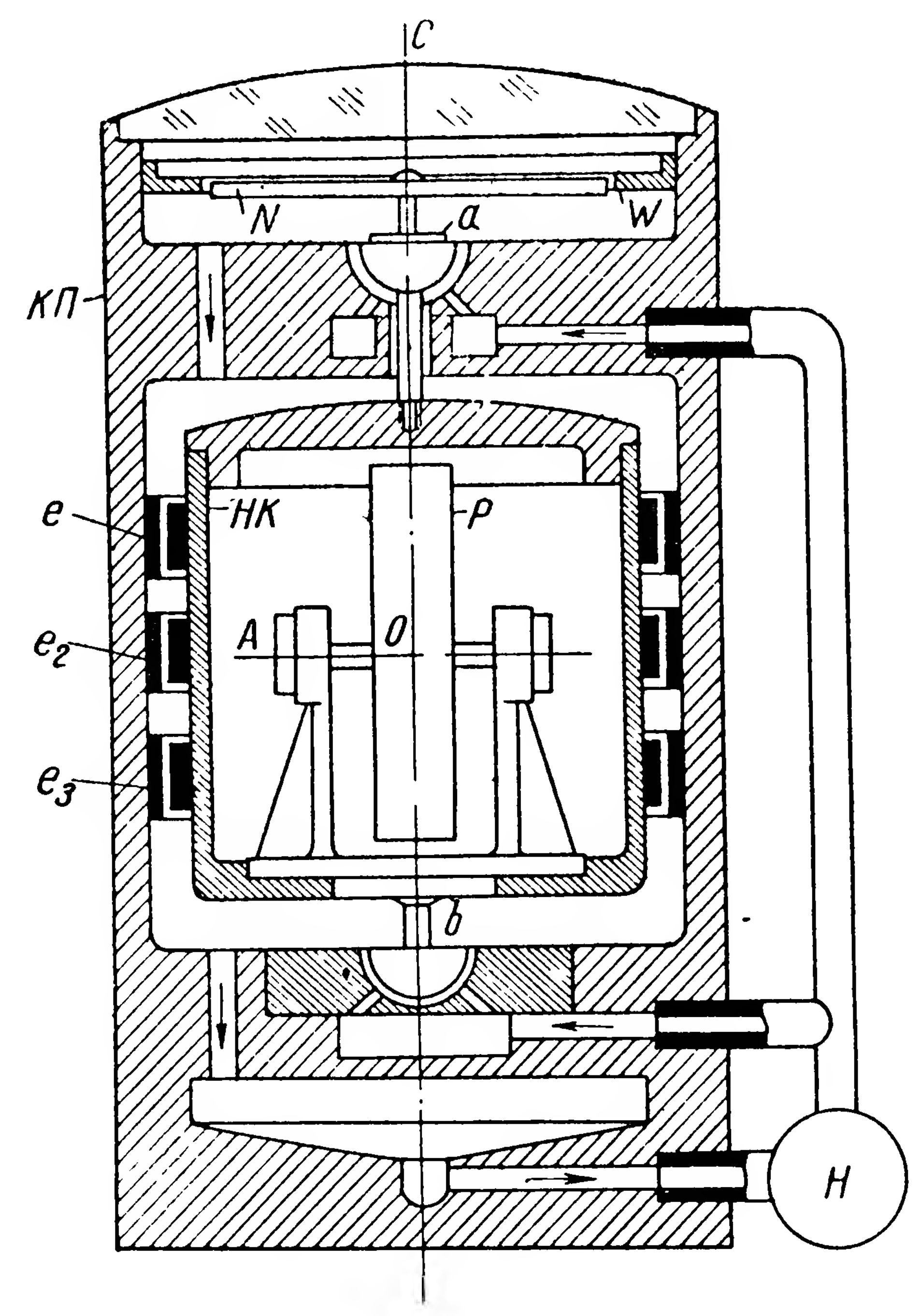


Рис. 139. Схема гирокомпаса Фуко на гидравлическом подвесе.

Жидкость, использованная в подпятниках, через сливные отверстия стекает в нижний заборный резервуар корпуса $КП$, заполняя при этом все свободное промежуточное пространство между его внутренними стенками и наружной поверхностью цилиндра $НК$. Геометрические размеры элементов прибора подобраны так, что полый цилиндр $НК$ вместе с помещенным внутри его ротором P гироскопа находится в жидкости во взвешенном состоянии. Ее непрерывная циркуляция, поддерживаемая насосом $Н$, исключает возможность соприкосновения цапф с подпятниками.

Описанная гидравлическая опора обеспечивает свободу вращения гироскопа вокруг оси OC при весьма малых моментах сил трения. Именно поэтому в современных гироскопических приборах, в основу которых положена схема гирокомпаса Фуко, достигается высокая точность определения направления географи-

ческого меридиана при отсутствии перемещений корпуса *КП* прибора относительно земной поверхности.

В качестве поддерживающей жидкости обычно используют раствор едкого кали в пропиловом спирте [8], обладающий электропроводностью. Через три пары кольцевых металлических электродов e_1, e_2 и e_3 к гиромотору, вращающему ротор *P* вокруг оси *OA*, подводят трехфазный ток.

Аналогичным образом устроен гирокомпас Фуко, в котором используются воздушные опоры [11]. В этом случае для создания опорной поддерживающей подушки в зазор между сферическими

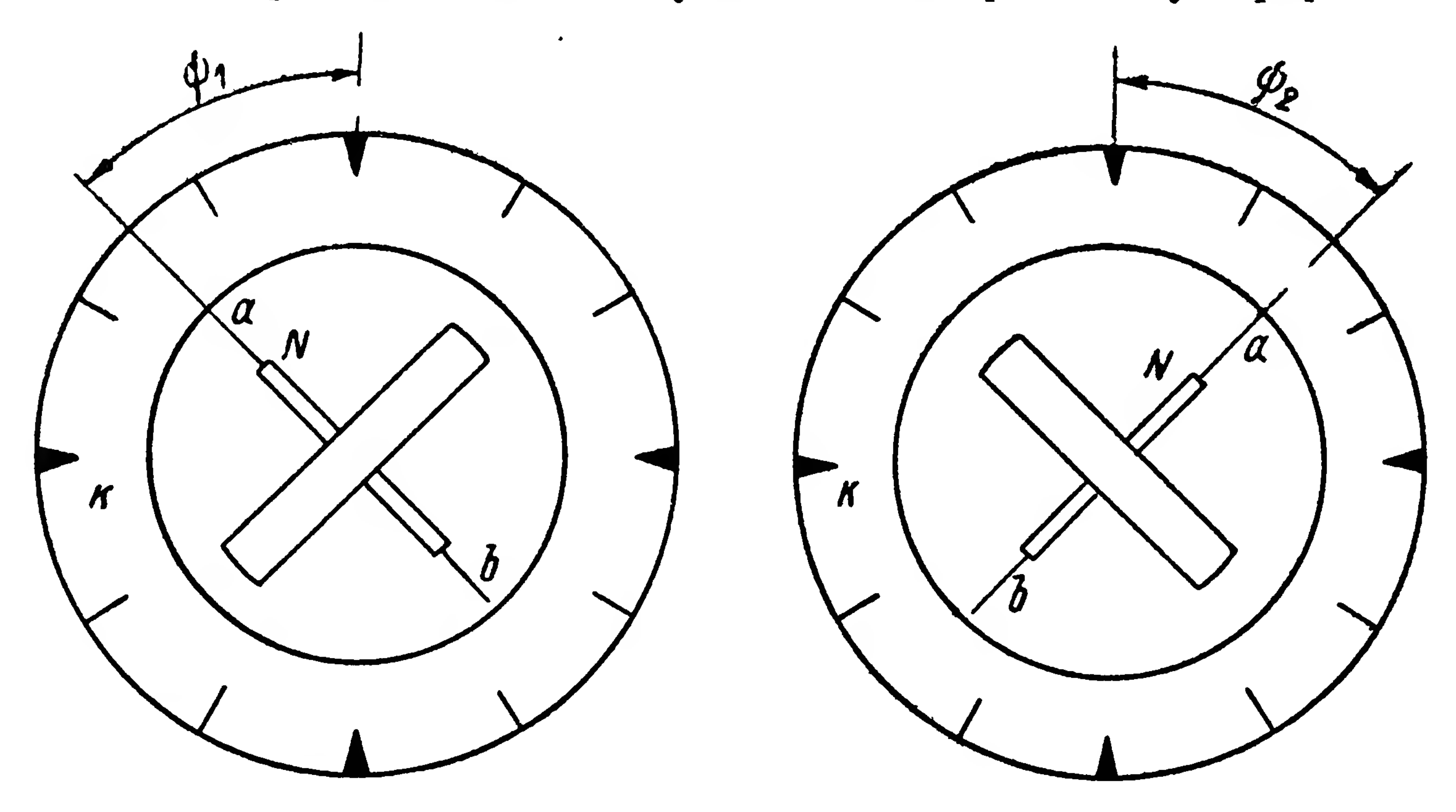


Рис. 140. К пояснению метода определения географического меридиана по точкам возврата гирокомпаса.

цапфами и подпятниками насосом непрерывно нагнетают сжатый воздух. Эта принципиальная схема отличается лишь токопередающим устройством, которое при пневматической опоре должно иметь контактное соприкосновение токопередающих элементов. Подобное устройство для передачи энергии к гиромотору показано ниже на рис. 141.

Силы сопротивления, возникающие при вращении гироскопа вокруг наружной оси *OC* как в гидравлической, так и в воздушной опоре, весьма малы. Поэтому затухание колебаний гирокомпаса около географического меридиана происходит чрезвычайно медленно, что затрудняет определение меридиана по положению нулевой черты картушки *N*, неизменно связанной с главной осью *OA* гироскопа. На практике такое затруднение преодолевают с помощью метода наблюдения точек возврата нулевой черты картушки *N* при ее азимутальных колебаниях.

С этой целью на корпусе *КП* прибора неподвижно устанавливают кольцо *К* (рис. 140), по окружности которого нанесены угловые деления. При азимутальных колебаниях гирокомпаса нулевая черта *ab* его картушки *N* будет изменять свое положение

относительно неподвижного кольца K. За этими перемещениями картушки и ведутся наблюдения. Углы ψ_1 и ψ_2 максимального отклонения картушки N в положительном и отрицательном направлениях фиксируются по шкале кольца K. Полуразность зафиксированных угловых значений $\frac{\psi_1 - \psi_2}{2}$ определит направление географического меридиана. Для большей точности результатов фиксируют обычно [19] не две, а большее количество точек возврата картушки N, определяя направление меридиана по среднему значению нескольких вычислений.

Как уже говорилось выше, в некоторых современных конструкциях гирокомпаса Фуко нашли применение и торсионные подвесы. В зависимости от разновидности их компоновки в гиросистеме коренным образом может измениться схема прибора.

§ 64. ГИРОКОМПАС ДЛЯ НЕПОДВИЖНОГО ОСНОВАНИЯ

В процессе работы по совершенствованию гирокомпаса Фуко была создана принципиально новая схема прибора [52], устройство которого показано на рис. 141. Ротор P такого прибора, обладающий свободой вращения вокруг оси OA, установлен в гирокамере HK, которая жестко соединена с полым цилиндром $Ц$. Внутри цилиндра нанесена оптическая метка S, играющая роль нулевой черты картушки гироскопа. Кроме того, внутри цилиндра $Ц$ смонтированы изоляционные диски, несущие платиновые изогнутые под прямым углом проводнички, контактирующие с токопередающими кольцами e_1 и e_2. С помощью такого контактного устройства к гиромотору подводится электроэнергия, используемая для вращения его ротора вокруг оси OA гироскопа.

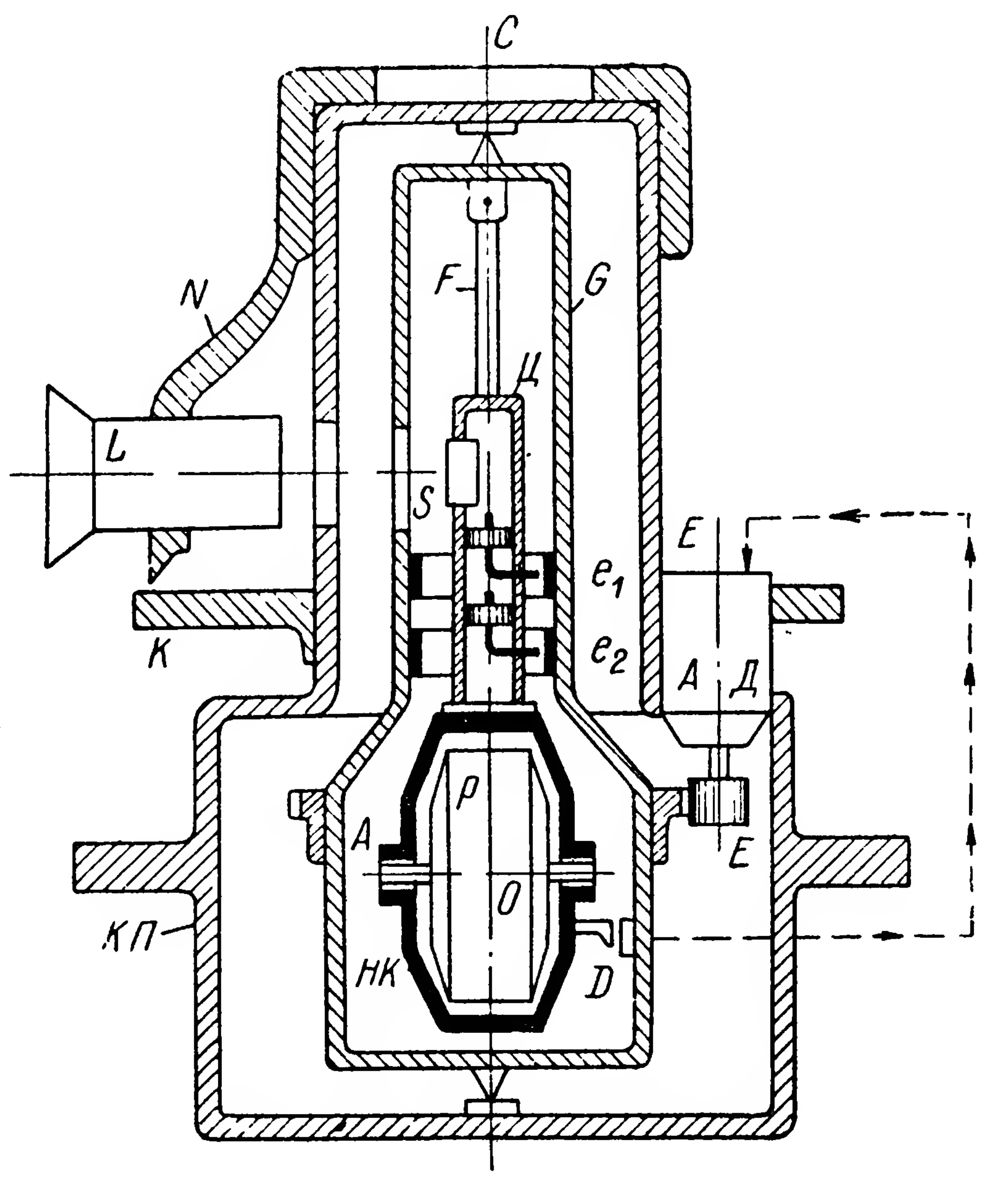


Рис. 141. Гирокомпас на торсионном подвесе.

Гирокамера HK вместе с ротором P подвешивается с помощью ленточного торсиона F в кожухе G, который монтируется на керновых опорах в корпусе $КП$ прибора, что обеспечивает свободу вращения гироскопа и кожуха вокруг наружной оси подвеса OC.

Как только ротор P начнет поворачиваться вокруг оси OC, он сразу же увлечет за собой и гирокамеру HK, на которой установлен якорь индукционного датчика D. Так как статор датчика неподвижно закреплен на кожухе G, то при повороте ротора вокруг оси OC относительно кожуха G с датчика D будет сниматься электрический сигнал, пропорциональный углу этого поворота. После усиления сигнал подается на электрический двигатель $АД$, который приходит во вращение вокруг оси EE и через зубчатую передачу поворачивает вокруг оси OC кожух G вслед за перемещением гироскопа.

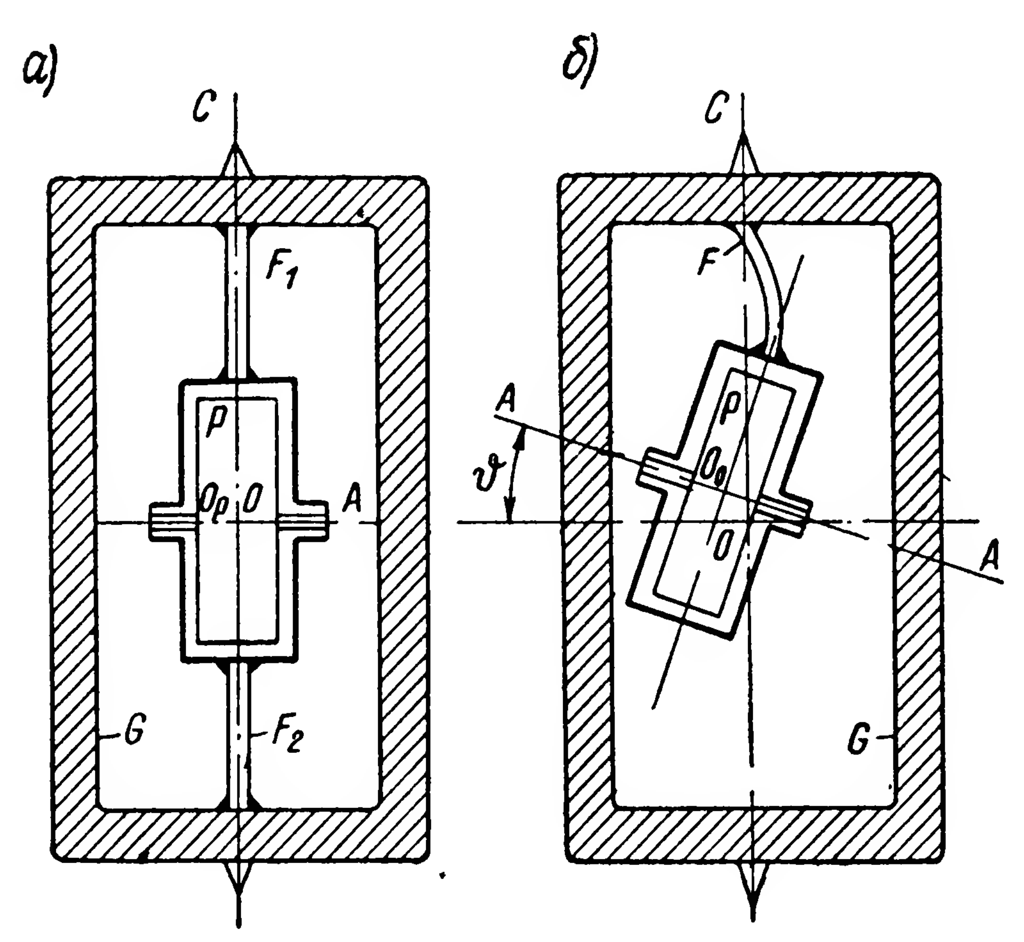


Рис. 142. Варианты торсионного подвеса.

Когда кожух G повернется вокруг оси OC на такой же угол, как и ротор P, сигнал, снимаемый с индукционного датчика D, станет равным нулю и движение кожуха G прекратится. Таким образом, описанное устройство по существу будет представлять собой своеобразную следящую систему, аналогичную приведенной на рис. 119. Кожух G непрерывно следует за перемещениями гироскопа, устраняя тем самым закручивание торсиона F и действие на гироскоп моментов его упругих сил.

Для определения географического меридиана в рассматриваемом приборе используют неподвижное кольцо K, снабженное шкалой с градусными делениями. Через визирную трубку L, жестко укрепленную на цилиндрической оправке N, наблюдают за азимутальными колебаниями гироскопа по перемещениям оптической метки S. Поворачивая трубку L вместе с оправкой N вокруг оси OC, оператор по шкале кольца K фиксирует точки возврата колеблющегося гироскопа (рис. 140) и по их угловым значениям определяет направление географического меридиана.

Если бы гироскоп соединялся с кожухом G с помощью двух торсионов F_1 и F_2 (рис. 142, *а*), которые не позволяли бы главной оси OA принимать наклонные положения относительно плоскости горизонта, то такой прибор ничем не отличался бы от описанного выше гирокомпаса Фуко (см. рис. 139). В рассматриваемом устройстве (см. рис. 141) главная ось OA может составить с плоскостью горизонта некоторый угол ϑ (рис. 142, *б*). В этом случае сила веса гироскопа и силы упругости торсиона F будут создавать относительно оси, проходящей через точку O перпендикулярно

плоскости чертежа, восстанавливающий момент, стремящийся возвратить главную ось OA в горизонтальное положение. Чем больше угол наклона ϑ, тем больше величина восстанавливающего момента, которая в первом приближении может быть принята пропорциональной ϑ.

Восстанавливающий момент окажет непосредственное влияние на движение гироскопа, которое будет отличаться от рассмотренного выше закона колебаний гирокомпаса Фуко. Вследствие отсутствия в точке подвеса O двухсторонней удерживающей связи между ротором P и кожухом G (рис. 141) описанный гироскопический прибор также не может быть использован для работы на подвижных объектах.

§ 65. МОРЕХОДНЫЙ ГИРОКОМПАС

Проблема создания гироскопического компаса, нормально работающего на подвижных объектах, была решена после того, как для этой цели стали применять гироскоп с тремя степенями свободы. Чтобы ограничить свободу отклонения главной оси OA

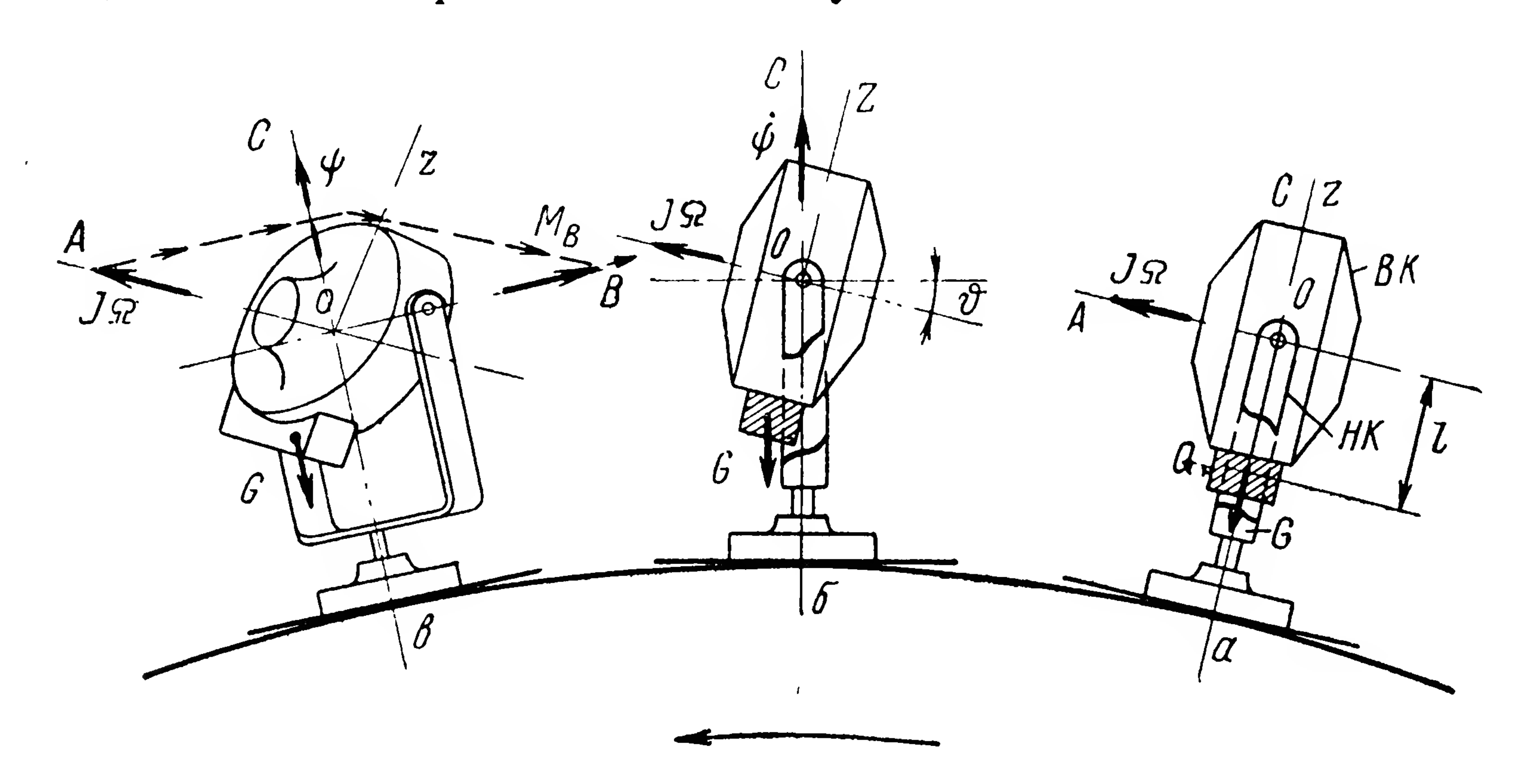


Рис. 143. Принципиальная схема гирокомпаса с маятником.

от плоскости горизонта, к гирокамере BK прикрепляли либо груз Q (рис. 143), либо заполненные ртутью и сообщающиеся между собой сосуды E (рис. 144). Такие дополнительные устройства смещали центр тяжести гироскопа относительно точки O его подвеса на некоторое расстояние l вдоль оси Oz. Поэтому как только главная ось OA составляла с плоскостью горизонта угол ϑ, на гироскоп относительно его внутренней оси OB сразу же начинал действовать момент внешних сил.

Представим, что гироскоп, к гирокамере которого подвешен груз Q, установлен на земной поверхности в каком-либо пункте a (рис. 143). В начальный момент времени его главная ось OA

горизонтальна и направлена с запада на восток. При таком положении прибора сила веса гироскопа, несмотря на расстояние l между его центром тяжести и точкой подвеса O, не будет создавать относительно точки O момента. Направление вектора $\overline{G}$ будет совпадать в данном случае с вертикально расположенной осью OC наружного карданова кольца HK и, следовательно, проходить через точку O подвеса гироскопа.

Начальное расположение гироскопа на земной поверхности не будет оставаться неизменным. С течением времени вследствие

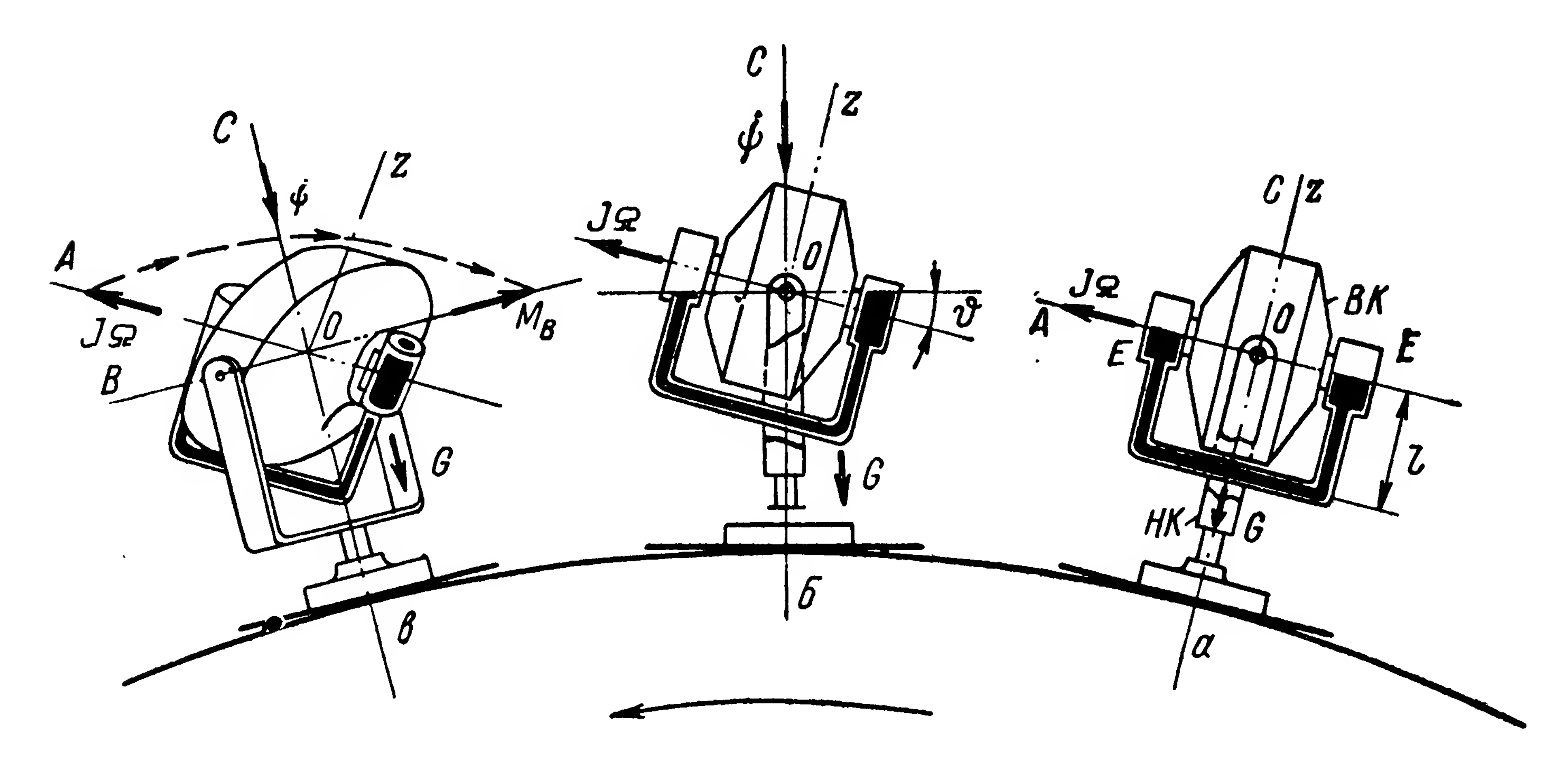


Рис. 144. Принципиальная схема гирокомпаса с ртутными сосудами.

суточного вращения Земли место установки гироскопа будет перемещаться в пространстве. Если за вращением Земли наблюдать из мирового пространства со стороны ее северного полюса, будет казаться, что это перемещение совершается против часовой стрелки. Таким образом, по прошествии некоторого времени место установки гироскопа, совершив вместе с Землей поворот вокруг ее оси, переместится в пространстве на некоторый угол и займет новое положение, обозначенное на схеме точкой *б*.

В процессе описываемого перемещения гироскоп, стремящийся сохранить направление своей главной оси неизменным в пространстве, начнет приобретать все увеличивающийся наклон к горизонту. При этом восточный конец главной оси OA будет непрерывно подниматься над горизонтом, а западный — опускаться. Вместе с гироскопом вокруг оси OB будет поворачиваться и груз Q. При наличии угла ϑ между главной осью и плоскостью горизонта вектор $\overline{G}$ уже не будет проходить через точку O подвеса гироскопа, обусловливая тем самым возникновение момента M_B, действующего на гироскоп относительно его внутренней оси подвеса OB.

Нетрудно заметить, что величина момента M_B пропорциональна углу ϑ и определяется зависимостью $Gl \sin \vartheta$, которая вследствие малости угла ϑ может быть принята равной $Gl\vartheta$. Направление момента $\overline{M_B}$ противоположно знаку угла ϑ поворота главной оси гироскопа относительно плоскости горизонта. Поэтому вектор $\overline{M_B}$ совмещен с положительным направлением оси OB и в положении *б* будет перпендикулярен плоскости чертежа и направлен на читателя.

Как только момент M_B начнет действовать на гироскоп, возникнет прецессионное движение (см. § 15) вокруг наружной оси OC. В результате главная ось OA гироскопа, поворачиваясь вокруг оси OC с угловой скоростью $\dot{\psi}$, начнет приближаться к плоскости географического меридиана. При этом вектор кинетического момента $\overline{J\Omega}$ гироскопа будет двигаться в направлении к северному географическому полюсу, как это показано на схеме в положении *в*. Как видим, описанный гироскоп, снабженный маятниковым грузом, также превращается в компас, поэтому он и получил название гироскопического компаса с маятником.

Аналогично будет двигаться и гироскоп, на гирокамере которого установлены сообщающиеся сосуды, заполненные ртутью (рис. 144). Предположим, что рассматриваемый гироскопический прибор, как и в предыдущем случае, установлен на земной поверхности в пункте *а* так, что его главная ось OA в начальный момент времени горизонтальна и направлена с запада на восток. При горизонтальном положении оси OA ртуть заполняет оба сосуда E равномерно. Направление действия силы G проходит через точку O подвеса гироскопа, не создавая относительно ее моментов.

Такое положение не останется неизменным. Вследствие суточного вращения Земли главная ось OA гироскопа с течением времени будет принимать все увеличивающийся угол ϑ наклона к горизонту. Одновременно с гирокамерой BK будут поворачиваться вокруг внутренней оси подвеса и жестко соединенные с ней сообщающиеся сосуды E. Заполняющая их ртуть, сохраняя свой уровень горизонтальным, начнет перетекать из восточного сосуда в западный, как это показано на схеме в положении *б*. Избыток ртути в западном сосуде обусловит возникновение внешнего момента, действующего на гироскоп относительно его внутренней оси подвеса OB. Так же, как и у гирокомпаса с маятником, величина момента M_B пропорциональна углу ϑ и при его малости равна произведению $Gl\vartheta$. Однако знак момента M_B совпадает со знаком угла ϑ.

Под влиянием момента M_B гироскоп получит прецессионное движение вокруг оси OC, которое будет происходить с угловой скоростью $-\dot{\psi}$. Его главная ось OA начнет приближаться к плоскости географического меридиана, в результате чего вектор ки-

нетического момента $\overline{J\Omega}$ будет устанавливаться в направлении на южный географический полюс. Таким образом, описанный гироскоп, снабженный ртутными сообщающимися сосудами, также становится компасом, поэтому он и получил название гирокомпаса с ртутными сосудами.

Рассмотренные выше принципы работы трех разновидностей схем гироскопических компасов: на торсионном подвесе (рис. 141), с маятником (рис. 143) и с ртутными сосудами (рис. 144), позволяют сделать заключение о их динамической общности при работе на неподвижном относительно земной поверхности основании. Обратимся к системе уравнений (162), описывающих движение гироскопа в подвижной системе координат. Пренебрежем в них моментами сил трения и учтем, что главная ось гироскопических компасов сохраняет положение, близкое к горизонтальному, в связи с чем $\vartheta_0 = 0$. При этих условиях, если пренебречь величиной $\omega_D\vartheta$, система (162) для гирокомпасов на торсионном подвесе (рис. 141) и с маятником (рис. 143), у которых момент M_B противоположен по знаку углу ϑ, примет вид

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\left(\dot{\psi} + \omega_C\right) &= -K\vartheta; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\left(\dot{\vartheta} + \omega_B\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{417}$$

Для гирокомпаса с ртутными сосудами (рис. 144), у которого знак момента M_B совпадает со знаком угла ϑ, система (162) будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\left(\dot{\psi} + \omega_C\right) &= K\vartheta; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\left(\dot{\vartheta} + \omega_B\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{418}$$

Для определения значений входящих в уравнения (417) и (418) угловых скоростей ω_B и ω_C вращения основания прибора вокруг осей подвеса OB и OC воспользуемся схемой, приведенной на рис. 145. Учтем, что при неподвижном на земной поверхности основании прибора угловые скорости ω_B и ω_C определяются проекциями на оси подвеса OB и OC гироскопа лишь вектора $\overline{\Omega}_з$ угловой скорости суточного вращения Земли (см. § 27). При этом будем различать, от какого направления полуденной линии $O\xi$ производится отсчет малых углов ψ отклонения главной оси OA гироскопа от плоскости меридиана $\xi O\zeta$.

В гирокомпасах с торсионным подвесом (рис. 141) и с маятником (рис. 143) отсчет угла ψ производится от северного (N) направления полуденной линии $O\xi$ (рис. 145, *а*). Поэтому искомые угловые скорости будут равны

$$\omega_B = -\Omega_з\psi\cos\varphi; \quad \omega_C = \Omega_з\sin\varphi. \tag{419}$$

В гирокомпасе с ртутными сосудами (рис. 144) отсчет угла ψ производится от южного направления полуденной линии $O\xi$.

(рис. 145, *б*), в связи с чем рассматриваемые угловые скорости определятся зависимостями

$$\omega_B = \Omega_з \psi \cos\varphi; \quad \omega_C = \Omega_з \sin\varphi.$$

Подставив найденные значения угловых скоростей ω_B и ω_C в соответствующие системы уравнений (417) и (418), получим

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\left(\dot{\psi} + \Omega_з \sin\varphi\right) = -K\vartheta; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\left(\dot{\vartheta} - \Omega_з \psi\cos\varphi\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (420)$$

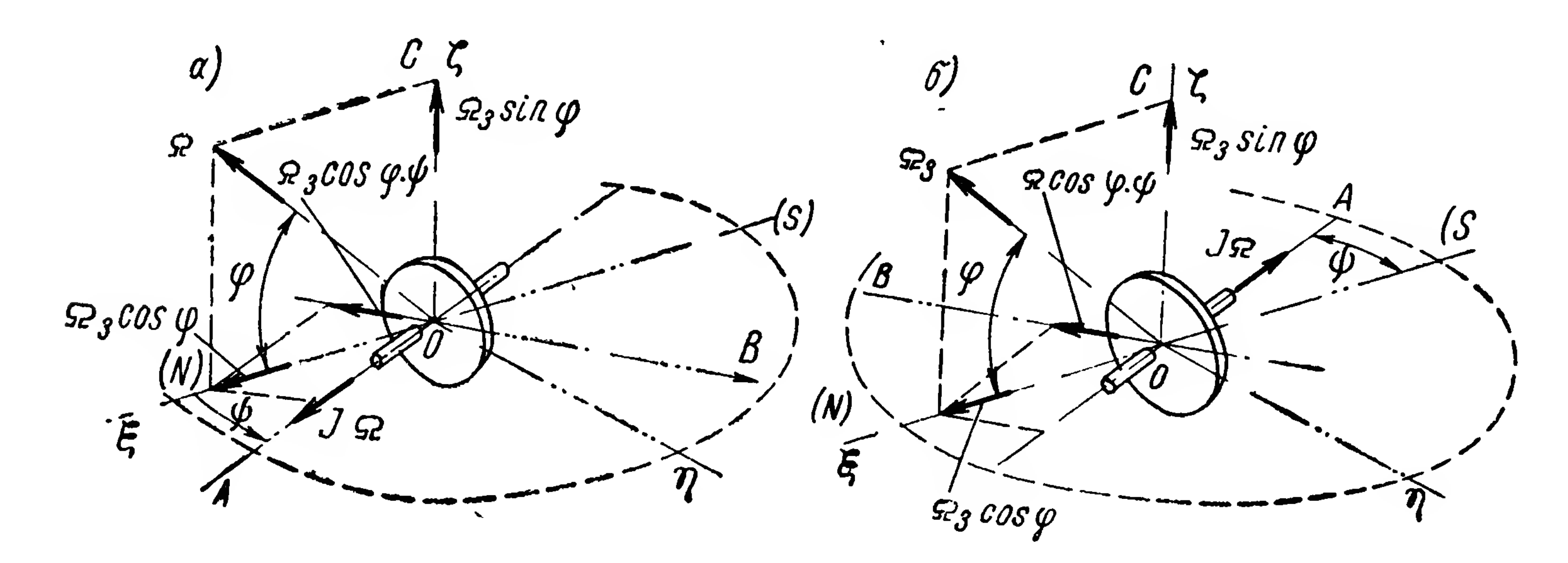


Рис. 145. Проекции угловой скорости суточного вращения Земли на оси подвеса гирокомпаса.

и

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\left(\dot{\psi} + \Omega_з \sin\varphi\right) = K\vartheta; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\left(\dot{\vartheta} + \Omega_з \psi\cos\varphi\right) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (421)$$

Разрешив каждую из систем (420) и (421) относительно переменной ψ, придем к дифференциальным уравнениям

$$J_B J_C \psi^{IV} + (J^2\Omega^2 + J_B J\Omega\Omega_з \cos\varphi + J_C K)\ddot{\psi} + KJ\Omega\Omega_з \psi\cos\varphi = 0$$

и соответственно

$$J_B J_C \psi^{IV} + (J^2\Omega^2 - J_B J\Omega\Omega_з \cos\varphi + J_C K)\ddot{\psi} + KJ\Omega\Omega_з \psi\cos\varphi = 0.$$

Первое из этих уравнений описывает движение вокруг наружной оси подвеса *OC* гироскопических компасов на торсионном подвесе (рис. 141) и с маятником (рис. 143), второе — гироскопического компаса с ртутными сосудами (рис. 144). Сравнив эти уравнения между собой, нетрудно заметить, что они отличаются лишь коэффициентами вторых членов. Если пренебречь малыми величинами $J_B J\Omega\Omega_з \cos\varphi$ и $J_C K$ по сравнению с $J^2\Omega^2$, то оба уравнения примут один и тот же вид

$$J_B J_C \psi^{IV} + J^2\Omega^2\ddot{\psi} + KJ\Omega\Omega_з \psi\cos\varphi = 0,$$

что и подтверждает динамическую общность гироскопических компасов, принципиальные схемы которых приведены на рис. 141, 143 и 144.

Таким образом, представляется возможным составить суждение о характере движения этих гироскопических компасов по результатам анализа какой-либо одной системы дифференциальных уравнений: (420) или (421).

§ 66. НЕЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ ГИРОКОМПАСА

Для выяснения характера движения гироскопического компаса обратимся к системе уравнений (420). При исследовании в первом приближении пренебрежем нутационными членами

$$\left.\begin{aligned} J\Omega\left(\dot{\psi}+\Omega_3\sin\varphi\right)+K\vartheta=0;\\ \dot{\vartheta}-\Omega_3\psi\cos\varphi=0.\end{aligned}\right\} \qquad (422)$$

Исключив из полученных уравнений переменную ϑ, будем иметь

$$\ddot{\psi}+n^2\psi=0, \qquad (423)$$

где

$$n^2=\frac{K\Omega_3\cos\varphi}{J\Omega}. \qquad (424)$$

Решение уравнения (423) по аналогии с решением (8) уравнения (6) можем записать в виде

$$\psi=C_1\cos nt+C_2\sin nt. \qquad (425)$$

Продифференцировав (425) и подставив значение $\dot{\psi}$ в первое уравнение системы (422), найдем выражение для угла ϑ:

$$\vartheta=\frac{J\Omega}{K}n\left(C_1\sin nt-C_2\cos nt\right)-\frac{J\Omega}{K}\Omega_3\sin\varphi. \qquad (426)$$

Зависимости (425) и (426) характеризуют собой изменения во времени углов ψ и ϑ отклонения главной оси OA гирокомпаса (рис. 146) соответственно от плоскостей $\xi O\zeta$ меридиана и $\xi O\eta$ горизонта. Будем полагать, что в начальный момент времени главная ось OA гироскопа была совмещена с полуденной линией $O\xi$. При таком положении гироскопа начальные условия будут определяться значениями углов $\vartheta(0)=0$, $\psi(0)=0$, в соответствии с которыми непосредственно из выражений (425) и (426) находим

$$C_1=0,\quad C_2=-\frac{\Omega_3\sin\varphi}{n}.$$

Подставив найденные значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 в выражения (426) и (425), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= \frac{J\Omega\Omega_3 \sin\varphi}{K}(\cos nt - 1); \\ \psi &= -\frac{\Omega_3 \sin\varphi}{n}\sin nt. \end{aligned}\right\} \quad (427)$$

Полученные выражения (427) показывают, что гирокомпас, основание которого установлено неподвижно на земной поверхности, совершает незатухающие гармонические колебания относительно плоскости $\xi O\zeta$ географического меридиана и плоскости

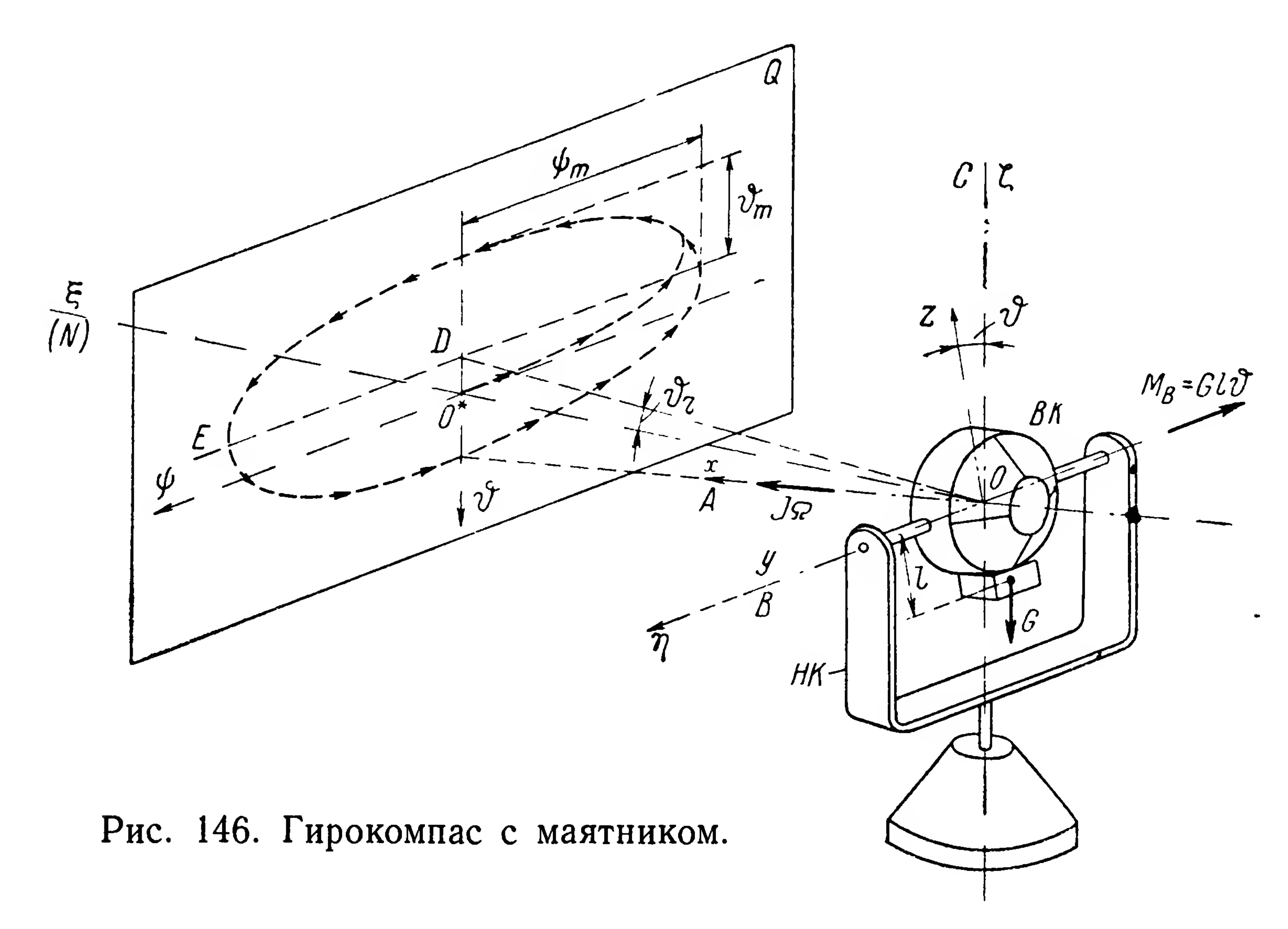


Рис. 146. Гирокомпас с маятником.

ODE, наклоненной к плоскости горизонта $\xi O\eta$ на угол ϑ, определяемый последним членом выражения (426):

$$\vartheta_r = -\frac{J\Omega}{K}\Omega_3 \sin\varphi. \quad (428)$$

Величина ϑ_r характеризует тот необходимый угол наклона главной оси OA к плоскости горизонта $\xi O\eta$, при котором обеспечивается непрерывное движение гирокомпаса в мировом пространстве вслед за плоскостью меридиана $\xi O\zeta$. В самом деле, плоскость меридиана вращается в пространстве вокруг вертикали $O\zeta$ данного пункта земной поверхности с угловой скоростью $\Omega_3 \sin\varphi$ (см. § 27). Чтобы вызвать движение гироскопа вокруг вертикали $O\zeta$ с угловой скоростью $\Omega_3 \sin\varphi$, необходимо создать постоянно действующий относительно внутренней оси подвеса OB момент внешней силы. Этот момент возникает автоматически. Перво-

начально, когда главная ось OA гирокомпаса горизонтальна, плоскость меридиана $\xi O\zeta$, поворачиваясь вокруг вертикали $O\zeta$ с постоянной угловой скоростью $\Omega_3 \sin\varphi$, начнет отклоняться от оси OA, остающейся стабильной в пространстве. Но как только между главной осью OA и плоскостью $\xi O\zeta$ меридиана образуется некоторый угол ψ, так сразу же гироскоп начнет изменять свое положение и относительно плоскости горизонта $\xi O\eta$. Вращение плоскости $\xi O\zeta$ вокруг оси $O\zeta$ с положительной угловой скоростью $\Omega_3 \sin\varphi$ обусловит постепенное отклонение положительного направления главной оси OA гироскопа к востоку от меридиана. При этом она со все увеличивающейся скоростью начнет подниматься над плоскостью горизонта $\xi O\eta$.

Наличие угла — ϑ наклона гироскопа к горизонту вследствие смещения между его центром тяжести и точкой подвеса вызовет воздействие на гироскоп относительно внутренней оси подвеса OB момента внешней силы, равного $K(-\vartheta)$. Под влиянием этого момента возникнет прецессия гироскопа вокруг оси OC с угловой скоростью $\frac{K(-\vartheta)}{J\Omega}$. Первоначально эта скорость будет меньше $\Omega_3 \sin\varphi$. Однако с увеличением угла $-\vartheta$ скорость прецессии будет возрастать и при некотором значении $-\vartheta_r$ сравняется с $\Omega_3 \sin\varphi$.

Значение угла ϑ_r, определяемое по выражению (428), непосредственно вытекает из условия равенства рассматриваемых угловых скоростей:

$$\frac{K(-\vartheta_r)}{J\Omega} = \Omega_3 \sin\varphi.$$

Из (427) следует, что среднее положение главной оси OA характеризуется значениями углов

$$\psi = 0; \quad \vartheta = \vartheta_r = -\frac{J\Omega\Omega_3 \sin\varphi}{K}. \tag{429}$$

Относительно этого среднего положения и происходят колебания гирокомпаса.

Для выяснения характера этих колебаний перепишем выражения (427) с учетом (428) в виде

$$\vartheta^* = \vartheta + \vartheta_r = \frac{J\Omega\Omega_3 \sin\varphi}{K} \cos nt;$$

$$\psi = -\frac{\Omega_3 \sin\varphi}{n} \sin nt.$$

Обозначив в них

$$\frac{J\Omega\Omega_3 \sin\varphi}{K} = \vartheta_m, \quad \frac{\Omega_3 \sin\varphi}{n} = \psi_m, \tag{430}$$

будем иметь

$$\vartheta^* = \vartheta_m \cos nt; \quad \psi = -\psi_m \sin nt.$$

Возводя каждое из полученных равенств в квадрат и затем складывая их, придем к уравнению

$$\left(\frac{\vartheta^*}{\vartheta_m}\right)^2 + \left(\frac{\psi}{\psi_m}\right)^2 = 1,$$

которое является уравнением кривой, описываемой проекцией полюса гироскопа при ее перемещении по картинной плоскости Q.

Как видим, эта кривая представляет собой эллипс с полуосями ψ_m и ϑ_m. Отношение между полуосями рассматриваемого эллипса, учитывая (430), определяется зависимостью

$$\frac{\vartheta_m}{\psi_m} = \frac{nJ\Omega}{K} = \sqrt{\frac{J\Omega}{K}\Omega_з \cos\varphi}\,.$$

Как видим, полуось ϑ_m в несколько раз меньше полуоси ψ_m. Действительно, несмотря на то, что отношение $\frac{J\Omega}{K}$ всегда больше единицы вследствие малости угловой скорости $\Omega_з$ суточного вращения Земли, определяемой равенством (168), величина подкоренного количества всегда меньше единицы.

Период T колебаний гирокомпаса около положения его равновесия (429) в соответствии с равенством (424) определится из выражения

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi\sqrt{\frac{J\Omega}{K\Omega_з\cos\varphi}}\,. \tag{431}$$

Так как в гирокомпасе с маятником коэффициент $K = Gl$, выражение (431) можно переписать в виде

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J\Omega}{Gl\Omega_з\cos\varphi}}\,. \tag{432}$$

Сравнив выражения (432) и (411), характеризующие периоды собственных колебаний соответственно гирокомпаса с маятником (см. рис. 143) и гирокомпаса Фуко (см. рис. 139), убеждаемся в том, что период первого прибора значительно больше, чем второго. Поэтому гирокомпас с маятником в меньшей степени реагирует на внешние возмущения, чем гирокомпас Фуко. Это обстоятельство и обеспечило возможность практического использования гирокомпаса с маятником и с ртутными сосудами на подвижных объектах.

Пример 29. Определить период и амплитуды колебаний гирокомпаса с маятником, установленного на земной поверхности на широте $\varphi = 60°$. Параметры прибора характеризуются отношением $\frac{J\Omega}{K} = \frac{J\Omega}{Gl} = 25$.

Подставим в формулу (432) численные значения входящих в нее величин и учтем равенство (168), в результате будем иметь

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J\Omega}{Gl}\frac{1}{\Omega_з \cos\varphi}} = 2\cdot 3{,}14 \sqrt{25\frac{1}{7{,}3\cdot 10^{-5}\cos 60^\circ}} =$$

$$= 519{,}8 \text{ сек.} = 86{,}63 \text{ мин.}$$

Из зависимости (431) находим круговую частоту колебаний гирокомпаса:

$$n = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\cdot 3{,}14}{519{,}8} = 0{,}012 \text{ сек}^{-1}.$$

Из выражений (430) находим значения амплитуд:

$$\psi_m = \frac{\Omega_з \sin\varphi}{n} = \frac{7{,}3\cdot 10^{-5}\sin 60^\circ}{0{,}012} = 0{,}0053 \text{ рад.}$$

$$\vartheta_m = \frac{J\Omega\Omega_з \sin\varphi}{K} = 25\cdot 7{,}3\cdot 10^{-5}\sin 60^\circ = 0{,}00158 \text{ рад.}$$

или соответственно

$$\psi_m = 0{,}0053\cdot 57{,}3 = 0^\circ{,}3;$$

$$\vartheta_m = 0{,}00158\cdot 57{,}3 = 0{,}^\circ 09.$$

Как видим, амплитуда ϑ_m колебаний гирокомпаса вокруг его внутренней оси подвеса в рассматриваемых условиях в несколько раз меньше амплитуды его колебаний относительно плоскости географического меридиана.

§ 67. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ ГИРОКОМПАСА ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Выводы, полученные в предыдущем параграфе, явились результатами исследования системы (420) при пренебрежении в ее уравнениях членами, содержащими $\ddot{\vartheta}$ и $\ddot{\psi}$. С целью выяснения ошибок, возникающих при таком допущении, вновь обратимся к системе уравнений (420). Переписав ее в символическом виде

$$\left.\begin{aligned} (J_B p^2 + K)\,\vartheta + J\Omega p\psi &= -J\Omega\Omega_з \sin\varphi; \\ (J_C p^2 + J\Omega\Omega_з \cos\varphi)\,\psi - J\Omega p\vartheta &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (433)$$

разрешим систему (433) относительно переменной ψ.

Определив из второго уравнения зависимость

$$\vartheta = \frac{J_C p^2 + J\Omega\Omega_з \cos\varphi}{J\Omega p}\,\psi,$$

подставим найденное значение ϑ в первое уравнение системы (433), в результате получим

$$(J_B p^2 + K)(J_C p^2 + J\Omega\Omega_з \cos\varphi)\,\psi + J^2\Omega^2 p^2\psi =$$

$$= -J\Omega p J\Omega\Omega_з \sin\varphi.$$

Переходя к обычной форме записи и учитывая, что производная от постоянной величины равна нулю, после очевидных преобразований получим уже знакомое дифференциальное уравнение

$$J_B J_C \psi^{IV} + n\ddot{\psi} + KJ\Omega\Omega_3 \cos\varphi \cdot \psi = 0, \qquad (434)$$

где

$$n = J^2\Omega^2 + J_B J\Omega\Omega_3 \cos\varphi + J_C K. \qquad (435)$$

Чтобы получить дифференциальное уравнение, описывающее колебания гироскопа вокруг его внутренней оси подвеса, из первого уравнения системы (433) определим зависимость

$$\psi = -\frac{(J_B p^2 + K)\vartheta + J\Omega\Omega_3 \sin\varphi}{J\Omega p}$$

и подставим ее во второе уравнение, в результате получим

$$-(J_C p^2 + J\Omega\Omega_3 \cos\varphi)\ [(J_B p^2 + K)\vartheta + J\Omega\Omega_3 \sin\varphi] - \\ - J^2\Omega^2 p^2 \vartheta = 0.$$

Умножим обе части уравнения на -1 и учтем обозначение (435). Переходя к обычной форме записи, будем иметь

$$J_B J_C \vartheta^{IV} + n\ddot{\vartheta} + KJ\Omega\Omega_3 \cos\varphi \cdot \vartheta = \\ = -J^2\Omega^2\Omega_3^2 \cos\varphi \sin\varphi. \qquad (436)$$

Найденное дифференциальное уравнение (436) неоднородно. Его частное решение будет иметь вид

$$\vartheta_r = -\frac{J\Omega\Omega_3 \sin\varphi}{K}. \qquad (437)$$

Соответствующее (436) однородное уравнение аналогично (434). Поэтому решения уравнений (434) и (436) будут зависеть от значений корней одного и того же характеристического уравнения

$$J_B J_C p^4 + np^2 + KJ\Omega\Omega_3 \cos\varphi = 0.$$

Решив последнее относительно p^2, находим

$$p^2 = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - 4J_B J_C K J\Omega\Omega_3 \cos\varphi}}{2J_B J_C}. \qquad (438)$$

Второй член подкоренного выражения (438), как это следует из (435), весьма мал по сравнению с первым, поэтому величина подкоренного количества с достаточной степенью точности может быть найдена приближенно

$$\sqrt{n^2 - 4J_B J_C K J\Omega\Omega_3 \cos\varphi} \approx n - \frac{2J_B J_C K J\Omega\Omega_3 \cos\varphi}{n}.$$

В выражении (435) второй и третий члены также несоизмеримо малы по сравнению с первым. Пренебрегая в выражении (438) малыми величинами, получим

$$p^2 \approx \frac{-J^2\Omega^2 \pm \left(J^2\Omega^2 - \dfrac{2J_BJ_CK\Omega_3\cos\varphi}{J\Omega}\right)}{2J_BJ_C},$$

откуда

$$p_{1,2} \approx \pm\sqrt{-\frac{J^2\Omega^2}{J_BJ_C} + \frac{K\Omega_3\cos\varphi}{J\Omega}} \approx \pm\frac{J\Omega}{\sqrt{J_BJ_C}}\,i;$$

$$p_{3,4} \approx \pm\sqrt{-\frac{K\Omega_3\cos\varphi}{J\Omega}} \approx \pm\sqrt{\frac{K\Omega_3\cos\varphi}{J\Omega}}\,i.$$

В соответствии с найденными значениями корней решение исследуемой системы уравнений (433), учитывая частное решение (437), определится следующими двумя выражениями:

$$\vartheta = C_1\cos\frac{J\Omega}{\sqrt{J_BJ_C}}\,t + C_2\sin\frac{J\Omega}{\sqrt{J_BJ_C}}\,t + C_3\cos\sqrt{\frac{K\Omega_3\cos\varphi}{J\Omega}}\,t + $$
$$+ C_4\sin\sqrt{\frac{K\Omega_3\cos\varphi}{J\Omega}}\,t - \frac{J\Omega\Omega_3\sin\varphi}{K};$$

$$\psi = D_1\cos\frac{J\Omega}{\sqrt{J_BJ_C}}\,t + D_2\sin\frac{J\Omega}{\sqrt{J_BJ_C}}\,t + $$
$$+ D_3\cos\sqrt{\frac{K\Omega_2\cos\varphi}{J\Omega}}\,t + D_4\sin\sqrt{\frac{K\Omega_3\cos\varphi}{J\Omega}}\,t.$$

Полученные выражения показывают, что нутационные колебания гирокомпаса, происходящие с весьма малой амплитудой и большой частотой $\frac{J\Omega}{\sqrt{J_BJ_C}}$, не искажают характера его основного движения, описываемого уравнениями (422). Вот почему при исследовании движения гироскопических компасов представляется возможным опускать из рассмотрения их нутационные колебания, которые в указанных приборах практически не влияют на положение их главной оси в подвижной системе координат.

§ 68. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ ГИРОКОМПАСА

Как было показано выше, главная ось гирокомпаса, движущаяся из любого положения к совмещению с плоскостью географического меридиана, не устанавливается в этой плоскости, а совершает относительно нее незатухающие колебания. С целью устранения указанного недостатка конструкцию прибора несколько видоизменяют. Дополнительный груз, создающий маятниковость гироскопической системы, крепят не к гирокамере *ВК*,

как это было показано на рис. 146, а подвешивают на специальных кронштейнах R_1 и R_2 (рис. 147), относительно которых маятнику обеспечивается свобода вращения вокруг горизонтальной оси. Кронштейны R_1 и R_2 жестко монтируются на диске следящей системы, который независимо от гироскопа имеет свободу вращения вокруг оси *ОС* в корпусе прибора. На диске *Д* расположена обмотка, а на оси наружного карданова кольца *НК* установлен движок потенциометра *П*. При повороте гироскопа

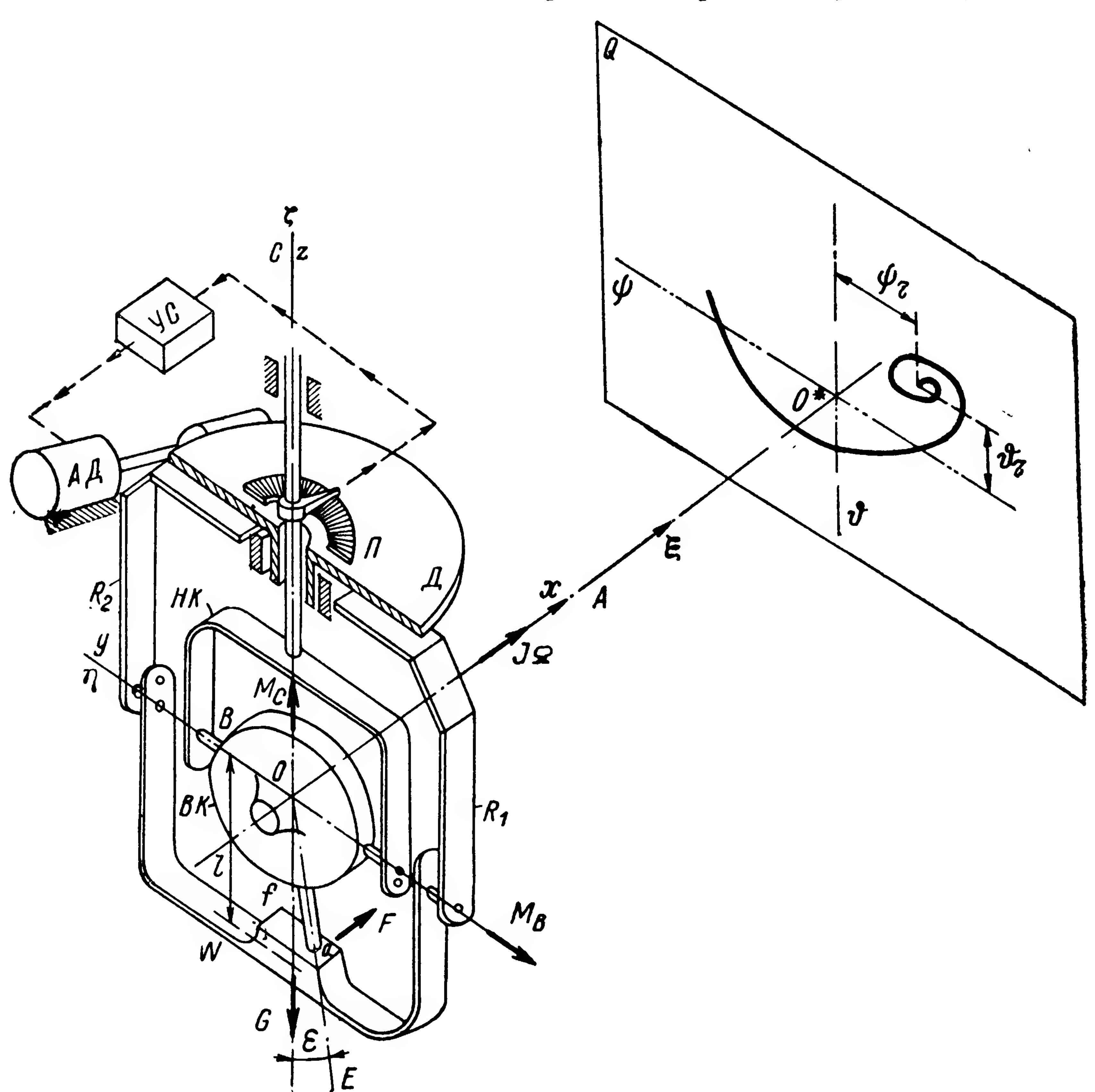


Рис. 147. Гирокомпас с эксцентричным соединением маятника.

вокруг оси *ОС* движок потенциометра *П* смещается с нулевой точки и с его обмотки снимается электрический сигнал, пропорциональный углу поворота гироскопа.

Сигнал подается через усилитель *УС* на электрический двигатель *АД*, который приводит во вращение вокруг оси *ОС* диск *Д*. В процессе вращения нулевая точка обмотки потенциометра *П* совмещается с его движком, обеспечивая тем самым совмещение

оси подвеса маятника W на кронштейнах R_1 и R_2 с внутренней осью OB подвеса гироскопа.

Маятник W соединяется с гирокамерой BK посредством штифта f, ось OE которого расположена в плоскости yOz и составляет с осью Oz небольшой угол ε. Из схемы (рис. 147) видно, что штифт f отклоняется от плоскости меридиана $\xi O \zeta$ в восточном направлении. Такое соединение маятника W с гирокамерой BK, называемое обычно эксцентричным, обеспечивает затухание колебаний гирокомпаса. Несмотря на малость угла ε, величина которого составляет всего лишь 1—2°, при наклоне к горизонту главной оси OA гирокомпаса с эксцентричным подвесом возникают внешние моменты, действующие на гироскоп одновременно относительно обеих осей его подвеса OB и OC. При наклоне главной оси OA гироскопа относительно плоскости горизонта $\xi O \eta$ на угол ϑ на такой же угол ϑ будет выведен из совмещения с вертикальной плоскостью $\eta O \zeta$ и маятник W. При этом сила G его веса создаст относительно оси подвеса маятника момент, равный по величине $Gl \sin \vartheta$, который будет передаваться на гироскопическую систему в точке a (рис. 147) внешней силой

$$F = \frac{Gl \sin \vartheta}{l_0 \cos \varepsilon}, \tag{439}$$

где l_0 — расстояние от точки a приложения силы F до точки O подвеса гироскопа.

Действуя на гироскоп, сила F создаст относительно осей OB и OC его подвеса моменты, соответственно равные

$$M_B = -Fl_0 \cos \varepsilon; \quad M_C = Fl_0 \sin \varepsilon,$$

или, учитывая равенство (439),

$$M_B = -Gl \sin \vartheta; \quad M_C = Gl \sin \vartheta \operatorname{tg} \varepsilon.$$

Чтобы выяснить влияние эксцентричного подвеса маятника на характер движения гироскопического компаса, подставим полученные значения моментов M_B и M_C в систему уравнений (162). Учитывая, как и выше (§ 65), нулевое значение угла ϑ_0, значения угловых скоростей ω_B и ω_C, определяемые по выражениям (419), и малость углов ϑ и ε, будем иметь

$$J_B \ddot{\vartheta} + J\Omega (\dot{\psi} + \Omega_3 \sin \varphi) = -Gl\vartheta,$$

$$J_C \ddot{\psi} - J\Omega (\dot{\vartheta} - \Omega_3 \cos \varphi \cdot \psi) = Gl\varepsilon\vartheta$$

или, опуская из рассмотрения нутационные члены,

$$\left. \begin{aligned} &\dot{\psi} + \frac{Gl}{J\Omega} \vartheta = -\Omega_3 \sin \varphi; \\ &\dot{\vartheta} - \Omega_3 \cos \varphi \cdot \psi + \frac{Gl\varepsilon}{J\Omega} \vartheta = 0. \end{aligned} \right\} \tag{440}$$

Определив из первого уравнения (440) значение ϑ и подставив ϑ и $\dot{\vartheta}$ во второе уравнение рассматриваемой системы, после элементарных преобразований будем иметь

$$\ddot{\psi} + a\dot{\psi} + b\psi = -\frac{Gl\varepsilon}{J\Omega}\Omega_3 \sin\varphi, \tag{441}$$

где

$$a = \frac{Gl\varepsilon}{J\Omega}; \quad b = \frac{Gl}{J\Omega}\Omega_3 \cos\varphi. \tag{442}$$

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения (441) при $\varphi = \text{const}$ с учетом (442) определится из равенства

$$\psi_r = -\frac{Gl\varepsilon}{bJ\Omega}\Omega_3 \sin\varphi = -\varepsilon \operatorname{tg}\varphi. \tag{443}$$

Для нахождения решения соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$\ddot{\psi} + a\dot{\psi} + b\psi = 0$$

составим характеристическое уравнение

$$p^2 + ap + b = 0$$

и определим его корни:

$$p_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}.$$

Из анализа зависимостей (442) следует, что в связи с малостью угла ε в рассматриваемом случае имеет место очевидное неравенство

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{Gl\varepsilon}{2J\Omega}\right)^2 < \frac{Gl}{J\Omega}\Omega_3 \cos\varphi = b,$$

поэтому корни характеристического уравнения будут

$$p_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm in,$$

где согласно (442)

$$n = \sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{Gl\,(4J\Omega\Omega_3 \sin\varphi - Gl\varepsilon^2)}}{2J\Omega}. \tag{444}$$

В соответствии с полученными значениями корней p_1 и p_2 и частным решением (443) общее решение дифференциального

уравнения (441) по аналогии с решением (361) уравнения (360) примет вид

$$\psi = e^{-\frac{a}{2}t}(C_1 \cos nt + C_2 \sin nt) - \varepsilon \operatorname{tg} \varphi. \qquad (445)$$

Продифференцировав выражение (445) и подставив значение $\dot{\psi}$ в первое уравнение системы (440), найдем зависимость угла ϑ от времени t:

$$\vartheta = \frac{J\Omega}{Gl} e^{-\frac{a}{2}t}\left[\left(\frac{a}{2}C_1 - nC_2\right)\cos nt + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{a}{2}C_2 + nC_1\right)\sin nt\right] - \frac{J\Omega}{Gl}\Omega_3 \sin \varphi. \qquad (446)$$

Постоянные интегрирования, входящие в (445) и (446), определяются из начальных условий. Будем полагать, как и выше (§ 66), что в начальный момент при $t = 0$

$$\vartheta(0) = 0; \quad \psi(0) = 0.$$

При этих условиях из выражений (446) и (445) следует

$$\vartheta(0) = \frac{J\Omega}{Gl}\left(\frac{a}{2}C_1 - nC_2\right) - \frac{J\Omega}{Gl}\Omega_3 \sin \varphi = 0;$$

$$\psi(0) = C_1 - \varepsilon \operatorname{tg} \varphi = 0,$$

откуда, учитывая зависимости (442) и (444), находим

$$C_1 = \varepsilon \operatorname{tg} \varphi; \quad C_2 = \frac{2(Gl\varepsilon^2 \operatorname{tg} \varphi - J\Omega\Omega_3 \sin \varphi)}{\sqrt{Gl(4J\Omega\Omega_3 \sin \varphi - Gl\varepsilon^2)}}.$$

Пренебрегая членами, содержащими квадраты малой величины ε, с достаточной для практики степенью точности можем записать

$$C_1 = \varepsilon \operatorname{tg} \varphi; \; C_2 = -\sqrt{\frac{J\Omega\Omega_3 \sin \varphi}{Gl}}.$$

Подставим найденные значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 в выражения (446) и (445). Учитывая зависимости (442) и (444) и опуская, как и выше, члены, содержащие малую величину ε^2, получим

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= e^{-\frac{a}{2}t}\left[\frac{2J\Omega\Omega_3 \sin \varphi}{Gl}\cos nt - \sqrt{\frac{J\Omega\Omega_3 \sin \varphi}{Gl}} \times \right. \\ &\left. \times \varepsilon(1 - \operatorname{tg} \varphi)\sin nt\right] - \frac{J\Omega\Omega_3 \sin \varphi}{Gl}; \\ \psi &= e^{-\frac{a}{2}t}\left(\varepsilon \operatorname{tg} \varphi \cos nt - \sqrt{\frac{J\Omega\Omega_3 \sin \varphi}{Gl}}\sin nt\right) - \varepsilon \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (447)$$

Из выражений (447) следует, что главная ось OA гирокомпаса с эксцентрично подвешенным маятником в положении равновесия отклонена от плоскости $\xi O\zeta$ географического меридиана на угол $\psi_r = -\varepsilon \operatorname{tg} \varphi$ и составляет угол $\vartheta_r = -\frac{J\Omega\Omega_3 \sin \varphi}{Gl}$ с плоскостью

$\xi O \eta$ горизонта. Такое отклонение оси OA гироскопа от полуденной линии $O\xi$ принято называть девиацией гироскопического компаса.

Если гирокомпас будет выведен из положения равновесия, то после прекращения действия возмущения он начнет совершать относительно равновесного положения затухающие колебания. Их период, учитывая (444), равен

$$\tilde{T} = \frac{2\pi}{n} = 4\pi \frac{J\Omega}{\sqrt{Gl(4J\Omega\Omega_з \cos\varphi - Gl\varepsilon^2)}}. \tag{448}$$

Сравнив $\tilde{T}$ с периодом T незатухающих колебаний (432), заметим, что $\tilde{T} > T$, так как

$$4\pi \frac{J\Omega}{\sqrt{Gl(4J\Omega\Omega_з \cos\varphi - Gl\varepsilon^2)}} > 2\pi \sqrt{\frac{J\Omega}{Gl\Omega_з \cos\varphi}}.$$

Эксцентрическое соединение маятника с гирокамерой не единственный способ обеспечения затухания собственных колебаний гирокомпаса. Их демпфирование может быть получено и другими методами, например введением в схему прибора специального датчика моментов (см. § 72) или гидравлического успокоителя, принцип работы которого описан в § 75.

§ 69. РАБОТА ГИРОКОМПАСА НА ПОДВИЖНОМ ОБЪЕКТЕ. СКОРОСТНАЯ ДЕВИАЦИЯ

При использовании гироскопического компаса на объектах приходится считаться с возникновением дополнительных его отклонений от плоскостей меридиана и горизонта. На величину отклонений будут влиять скорости и ускорения объекта, его колебания и вибрации, выполняемые эволюции и другие факторы.

С целью выяснения влияния перечисленных факторов на характер прецессионного движения гироскопического компаса обратимся к системе уравнений (162), в которых пренебрежем нутационными членами, $\omega_D \vartheta$ и учтем, что $\vartheta_0 = 0$. Если принять малым и угол ψ отклонения гирокомпаса от плоскости меридиана, то угловые скорости ω_B и ω_C вращения основания прибора по аналогии с изложенным в § 29 определятся зависимостями

$$\omega_B = -\Omega_з \psi \cos\varphi + \frac{V}{R} \cos(\alpha - \psi);$$

$$\omega_C = \Omega_з \sin\varphi - \frac{V}{R} \sin\alpha \operatorname{tg}\varphi.$$

Таким образом, при перечисленных условиях система уравнений (162) примет вид

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{\psi} + \Omega_з \sin \varphi - \frac{V}{R} \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi = \frac{M_B}{J\Omega};\\
&\dot{\vartheta} - \left(\Omega_з \cos \varphi - \frac{V}{R} \sin \alpha\right) \psi + \frac{V}{R} \cos \alpha = -\frac{M_C}{J\Omega}.
\end{aligned}\right\} \quad (449)$$

Необходимо учесть, что в общем случае, кроме моментов $M_B = -Gl\vartheta$ и $M_C = Gl\varepsilon\vartheta$ (см. § 68), относительно осей OB и OC

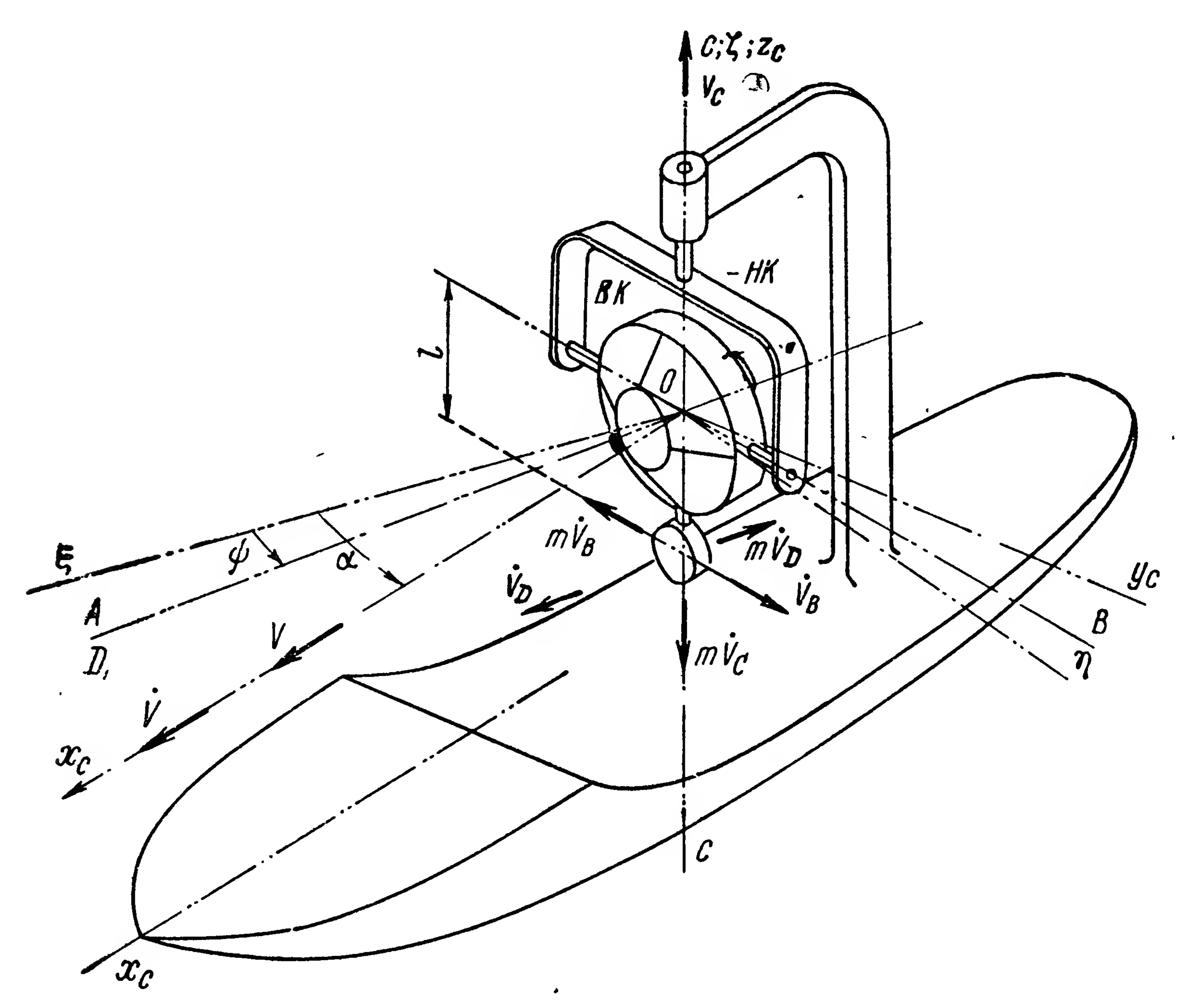


Рис. 148. К определению влияния ускорений объекта на гирокомпас с маятником.

могут действовать еще и моменты сил инерции, возникающие при ускорениях объекта. Вектор $\dot{V}$ линейного ускорения объекта (рис. 148) может занимать произвольное положение в системе координат $ODBC$, совмещенной с наружным кардановым кольцом $НК$. Составляющие $\bar{\dot{V}}_D$, $\bar{\dot{V}}_B$ и $\bar{\dot{V}}_C$ вектора $\bar{\dot{V}}$ по осям OD, OB и OC связаны между собой векторным равенством

$$\bar{\dot{V}} = \bar{\dot{V}}_D + \bar{\dot{V}}_B + \bar{\dot{V}}_C.$$

При ускорении объекта вследствие инертности массы гирокомпаса возникнут силы инерции $m\dot{V}_D$, $m\dot{V}_B$ и $m\dot{V}_C$, направления

действия которых будут проходить через центр тяжести системы противоположно ускорениям $\dot{V}_D$, $\dot{V}_B$ и $\dot{V}_C$.

Нетрудно видеть, что моменты, создаваемые силами инерции $m\dot{V}_B$ и $m\dot{V}_C$, погашаются силами реакции опор подвеса гироскопа. И только сила $m\dot{V}_D$, направление действия которой проходит на расстоянии l от точки подвеса O, будет создавать момент относительно оси OB. Так как ось OA гирокомпаса составляет с плоскостью горизонта $\xi O\eta$ незначительный угол, то величина указанного момента практически будет равна $m\dot{V}_D l$.

Подставив приведенные значения моментов в систему уравнений (449), получим

$$\dot{\psi} + \Omega_з \sin\varphi - \frac{V}{R}\sin\alpha \operatorname{tg}\varphi = -\frac{Gl}{J\Omega}\vartheta + \frac{m\dot{V}_D l}{J\Omega};$$

$$\dot{\vartheta} - \left(\Omega_з \cos\varphi - \frac{V}{R}\sin\alpha\right)\psi + \frac{\dot{V}}{R}\cos\alpha = -\frac{Gl\varepsilon}{J\Omega}\vartheta.$$

Продольная ось Ox_c объекта составляет с осью OD гироскопа угол $\alpha - \psi$. Поэтому проекция вектора $\dot{V}$ на ось OD при малом угле ψ и $\dot{V}_B = 0$ будет

$$\dot{V}_D = \dot{V}\cos(\alpha - \psi) = \dot{V}(\cos\alpha + \psi\sin\alpha),$$

в связи с чем рассматриваемая система уравнений принимает вид

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\psi} + \frac{Gl}{J\Omega}\vartheta - \frac{m\dot{V}l}{J\Omega}\psi\sin\alpha = -\Omega_з\sin\varphi + \\ &\qquad + \frac{V}{R}\sin\alpha \operatorname{tg}\varphi + \frac{m\dot{V}l}{J\Omega}\cos\alpha; \\ &\dot{\vartheta} - \left(\Omega_з\cos\varphi - \frac{V}{R}\sin\alpha\right)\psi + \frac{Gl\varepsilon}{J\Omega}\vartheta = -\frac{\dot{V}}{R}\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (450)$$

Определим положение равновесия гирокомпаса при движении объекта с постоянной скоростью $V = \mathrm{const}$. При этом условии $\dot{V} = 0$ и система уравнений (450) будет иметь вид

$$\dot{\psi} + \frac{Gl}{J\Omega}\vartheta = -\Omega_з\sin\varphi + \frac{V}{R}\sin\alpha\operatorname{tg}\varphi;$$

$$\dot{\vartheta} - \left(\Omega_з\cos\varphi - \frac{V}{R}\sin\alpha\right)\psi + \frac{Gl\varepsilon}{J\Omega}\vartheta = -\frac{\dot{V}}{R}\cos\alpha.$$

Из первого уравнения этой системы находим величину угла ϑ_r, соответствующую положению равновесия гирокомпаса:

$$\vartheta_r = -J\Omega\frac{R\Omega_з\sin\varphi - V\sin\alpha\operatorname{tg}\varphi}{GlR}. \qquad (451)$$

Подставив во второе уравнение рассматриваемой системы вместо ϑ значение ϑ_r, определим величину угла ψ_r:

$$\psi_r = \frac{1}{\Omega_з \cos\varphi - \frac{V}{R}\sin\alpha}\left(-\frac{Gl\varepsilon}{J\Omega} J\Omega \frac{R\Omega_з \sin\varphi - V\sin\alpha \operatorname{tg}\varphi}{GlR} + \frac{V}{R}\cos\alpha\right),$$

или, произведя преобразования,

$$\psi_r = -\varepsilon \operatorname{tg}\varphi + \frac{V\cos\alpha}{R\Omega_з\cos\varphi - V\sin\alpha}. \qquad (452)$$

Выражения (451) и (452) показывают, что при работе на подвижном объекте величина девиации гирокомпаса, характеризуемая значениями углов ϑ_r и ψ_r, претерпевает изменение по сравнению с ее значением (447) при неподвижном основании прибора. В частности, изменяется отклонение главной оси гирокомпаса от плоскости географического меридиана. Если при неподвижном основании прибора девиация определялась зависимостью (443), то при работе гирокомпаса на объекте, перемещающемся с постоянной скоростью V при постоянном курсе α, ее величина достигнет значения (452).

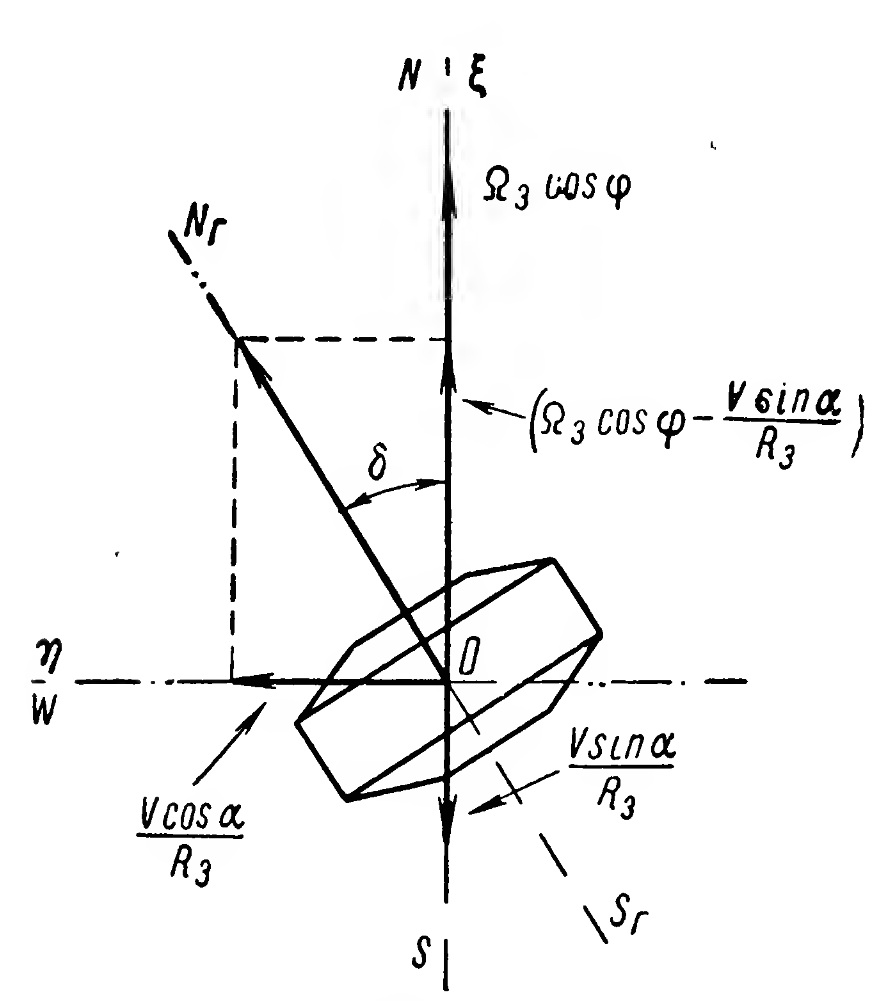


Рис. 149. Положение гироскопического меридиана.

Сравнив (443) и (452), видим, что при работе гирокомпаса на подвижном объекте угол ψ_r его отклонения от плоскости меридиана изменяется на величину угла $\delta_г$, определяемую по зависимости (416). Угол $\delta_г$ называется скоростной девиацией гироскопического компаса. В рассматриваемом случае, когда $h = 0$,

$$\delta_г = \frac{V\cos\alpha}{R_з\Omega_з\cos\varphi - V\sin\alpha}. \qquad (453)$$

Возникновение скоростной девиации гирокомпаса имеет простое физическое объяснение. Как было показано выше (§ 62 и 65), главная ось гирокомпаса, принудительно удерживаемая в плоскости горизонта, стремится совместиться с вектором угловой скорости вращения в пространстве плоскости горизонта. При неподвижном относительно земной поверхности положении точки подвеса гирокомпаса плоскость горизонта, согласно изложенному в § 27, вращается лишь вокруг полуденной линии $O\xi$ (рис. 149) с угловой скоростью $\Omega_з\cos\varphi$. Если совместно с объектом, дви-

жущимся с постоянными скростью V и курсом α, перемещается и точка подвеса гирокомпаса, то плоскость горизонта будет вращаться вокруг точки подвеса уже с другой угловой скоростью. Ее величина будет теперь определяться суммой трех составляющих: угловой скоростью $\Omega_з \cos \varphi$ и двумя дополнительными угловыми скоростями ω_ξ и ω_η, определяемыми по выражениям (182).

В рассматриваемом случае при перемещении объекта по земной поверхности угловая скорость ω_ξ, равная $-\frac{V \sin \alpha}{R_з}$, характеризует вращение плоскости горизонта вокруг оси $O\xi$, а угловая скорость ω_η, равная $\frac{V \cos \alpha}{R_з}$, — вокруг оси $O\eta$. Вектор суммарной угловой скорости, совмещенный с направлением $N_г S_г$, составит с полуденной линией $O\xi$ угол δ, величина которого в соответствии со схемой (рис. 149) определится из выражения

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\frac{V}{R_з} \cos \alpha}{\Omega_з \cos \varphi - \frac{V}{R_з} \sin \alpha} = \frac{V \cos \alpha}{R_з \Omega_з \cos \varphi - V \sin \alpha}. \qquad (454)$$

Именно с направлением $N_г S_г$, получившим название гироскопического меридиана, и совмещается главная ось гирокомпаса, установленного на объекте, перемещающемся с постоянными скоростью V и курсом α. Для объектов, движущихся со сравнительно малыми скоростями V, когда угловая скорость $\frac{V}{R}$ значительно меньше угловой скорости $\Omega_з$ суточного вращения Земли, величина скоростной девиации невелика. В этом случае $\operatorname{tg} \delta$ может быть приравнен значению самого угла $\delta_г$, величина которого будет определяться по формуле (453).

Пример 30. Определить величину скоростной девиации гирокомпаса, установленного на корабле, движущемся на широте $\varphi = 53°$ со скоростью $V = 64$ *км/час*, курсом $\alpha = 30°$.

Вычислим угловую скорость вращения Земли в радианах в час. Учитывая равенство (168), будем иметь

$$\Omega_з = 7{,}29 \cdot 10^{-5} \cdot 60 \cdot 60 = 0{,}26 \text{ час}^{-1}.$$

Подставив в формулу (454) значения входящих в нее величин, находим

$$\operatorname{tg} \delta_г = \frac{V \cos \alpha}{R_з \Omega_з \cos \varphi - V \sin \alpha} = \frac{64 \cos 30°}{6370 \cdot 0{,}26 \cos 53° - 64 \sin 30°} = 0{,}0574,$$

откуда

$$\delta_г = 3° \, 17'.$$

§ 70. ВЛИЯНИЕ УСКОРЕНИЙ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА НА РАБОТУ ГИРОКОМПАСА

Ускорение объекта вдоль оси OD гироскопической системы (рис. 148) вызывает прецессию гирокомпаса с маятником вокруг наружной оси OC его подвеса с угловой скоростью, согласно

(450) равной

$$\dot{\psi}_б = \frac{m\dot{V}_D l}{J\Omega}. \quad (455)$$

Эта скорость получила название угловой скорости инерционной, или баллистической, прецессии.

В результате такого прецессионного движения гирокомпас будет отклоняться от плоскости меридиана.

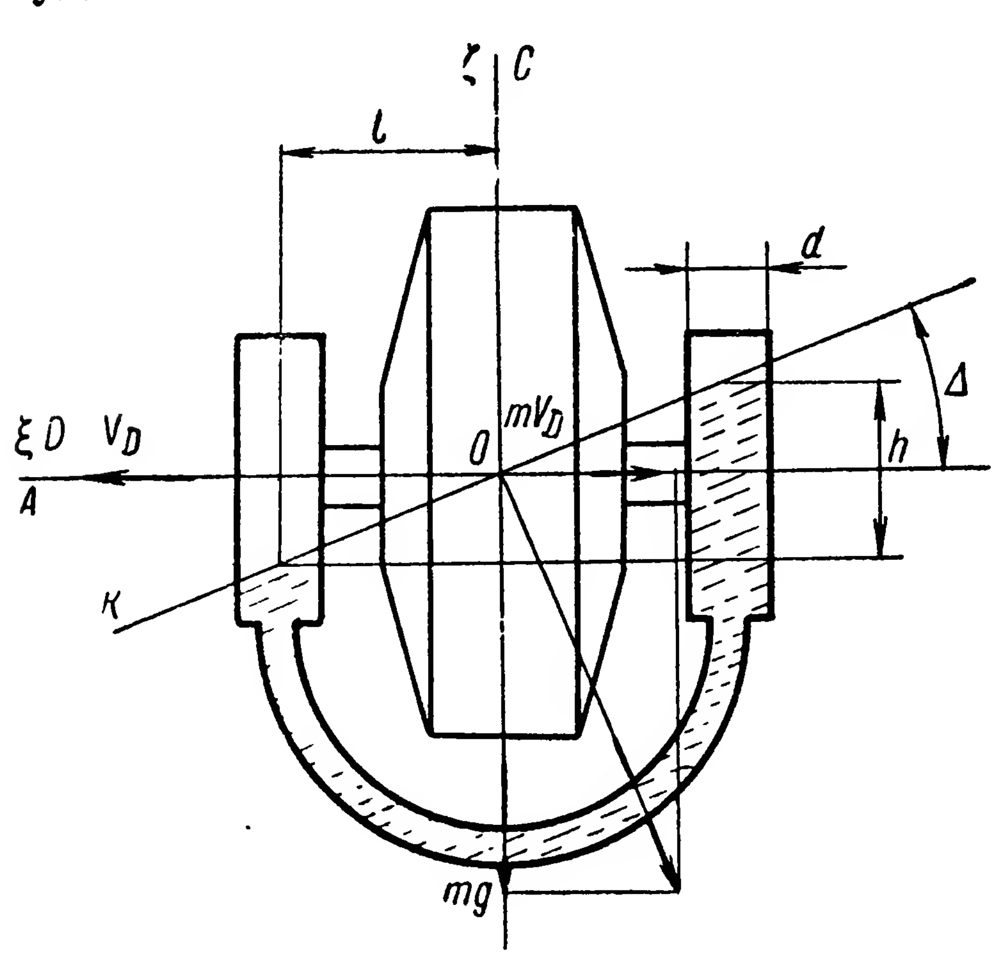


Рис. 150. К пояснению влияния ускорения объекта на гирокомпас с ртутными сосудами.

Аналогичное явление наблюдается и у гирокомпаса с ртутными сосудами. При перемещениях объекта вдоль оси OD с ускорением $\dot{V}_D$ (рис. 150) жидкость, заполняющая сосуды, стремится установить свой уровень по линии кажущегося горизонта, поэтому она начнет перетекать из одного сосуда в другой. Если колебания объекта отсутствуют, то можно считать, что уровень жидкости в сообщающихся сосудах в любой момент времени практически совпадает с кажущимся горизонтом.

Кажущийся горизонт составляет с истинным углом Δ, величина которого (рис. 150) определяется из отношения

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{m\dot{V}_D}{mg} = \frac{\dot{V}_D}{g}.$$

Следовательно, высота h избыточного объема жидкости в одном из сосудов будет равна

$$h = 2l \operatorname{tg} \Delta = 2l \frac{\dot{V}_D}{g},$$

где l — расстояние от осей симметрии сосудов до точки O подвеса гироскопа.

Избыточный объем Q жидкости зависит от внутреннего диаметра d сосудов:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} h = \frac{\pi d^2 l}{2g} \dot{V}_D.$$

Обладая удельным весом γ, жидкость, заполняющая объем Q, создаст момент, действующий на гироскоп относительно его

внутренней оси подвеса,

$$M_B = \gamma Q l = \gamma \frac{\pi d^2 l^2}{2g} \dot{V}_D,$$

который вызовет прецессию гирокомпаса вокруг его наружной оси подвеса OC с угловой скоростью

$$\dot{\psi}_б = \gamma \frac{\pi d^2 l^2}{2gJ\Omega} \dot{V}_D. \qquad (456)$$

Сравнив выражения (455) и (456), убеждаемся в их общности. Как видим, в обоих случаях угловая скорость $\dot{\psi}_б$ прецессионного

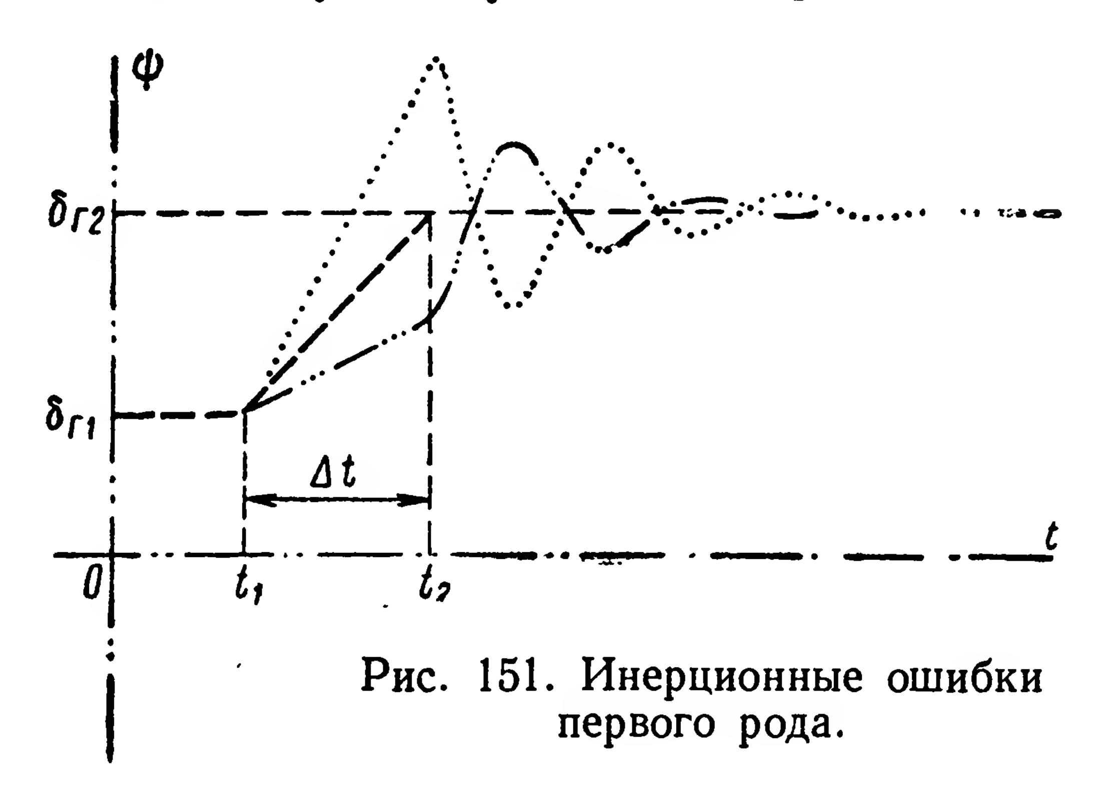


Рис. 151. Инерционные ошибки первого рода.

движения гирокомпаса пропорциональна ускорению $\dot{V}_D$ объекта вдоль оси OD гироскопической системы. При отсутствии качки объекта эта общность позволяет исследовать влияние его ускорений на гирокомпасы с маятником и с ртутными сосудами с помощью одной системы уравнений.

Обозначив конструктивные постоянные гирокомпасов через коэффициент пропорциональности U, приведем равенства (455) и (456) к одному виду:

$$\dot{\psi}_б = \frac{U}{J\Omega} \dot{V}_D. \qquad (457)$$

Для гирокомпасов с маятником $U = ml$, с ртутными сосудами $U = \gamma \frac{\pi d^2 l^2}{2g}$.

По формуле (457) можно определить угол $\psi_б$ отклонения гирокомпаса от плоскости географического меридиана за то время, в течение которого объект, совершая тот или иной маневр, двигался с ускорением. Представим, что в некоторый момент времени (рис. 151) объект, движущийся до этого со скоростью V_1 курсом α_1, начал изменять скорость и направление своего движения. По прошествии некоторого времени Δt к моменту t_2 объект приобретет новую скорость V_2 и продолжит дальнейшее движение новым

курсом α_2. За время маневра гирокомпас повернется вокруг своей наружной оси подвеса OC на угол

$$\psi_б = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\psi}_б \, dt = \frac{U}{J\Omega} \int_{t_1}^{t_2} \dot{V}_D \, dt = \frac{U}{J\Omega} (V_{D2} - V_{D1}).$$

При сравнительно небольших скоростях движения объекта главная ось OA гирокомпаса (см. рис. 148) сохраняет свое среднее положение вблизи плоскости географического меридиана. Пренебрегая на этом основании влиянием угла ψ на разность проекций скорости V объекта на ось OD гироскопической системы в моменты времени t_2 и t_1, перепишем полученное выражение в упрощенном виде:

$$\psi_б = \frac{U}{J\Omega} (V_2 \cos \alpha_2 - V_1 \cos \alpha_1). \tag{458}$$

Таково значение угла инерционного перемещения гирокомпаса вокруг наружной оси подвеса за время Δt совершения объектом маневра, изменившего скорость и направление его движения.

Изменение скорости и направления движения объекта вызовет изменение величины скоростной девиации гирокомпаса, определяемой по выражению (453). Ее приращение за время Δt будет равно:

$$\Delta\delta_г = \delta_{г2} - \delta_{г1} = \frac{V_2 \cos \alpha_2}{R_з\Omega_з \cos \varphi - V_2 \sin \alpha_2} - \frac{V_1 \cos \alpha_1}{R_з\Omega_з \cos \varphi - V_1 \sin \alpha_1}.$$

При пренебрежении малыми по сравнению с $R_з\Omega_з \cos \varphi$ величинами $V_1 \sin \alpha_1$ и $V_2 \sin \alpha_2$

$$\Delta\delta_г = \frac{V_2 \cos \alpha_2 - V_1 \cos \alpha_1}{R_з\Omega_з \cos \varphi}. \tag{459}$$

К концу маневра между величинами углов инерционного смещения $\psi_б$ гирокомпаса и приращения его скоростной девиации $\Delta\delta_г$ могут возникнуть три зависимости: $\psi_б = \Delta\delta_г$; $\psi_б < \Delta\delta_г$ и $\psi_б > \Delta\delta_г$. В двух последних случаях главная ось гирокомпаса к моменту t_2 окончания маневра (рис. 151) не придет в новое положение равновесия, характеризуемое углом $\delta_{г2}$. В результате после окончания маневра у гирокомпаса возникнут затухающие колебания около положения равновесия с начальной амплитудой, определяемой разностью $\Delta\delta_г - \psi_б$.

Таким образом, в рассматриваемых случаях, когда $\psi_б \neq \Delta\delta_г$, у гирокомпаса к концу маневра объекта будет существовать погрешность относительно нового положения равновесия $\delta_{г2}$. Эта погрешность, получившая название баллистической погрешности гирокомпаса первого рода, имеет максимальное значение в момент окончания маневра, а затем постепенно уменьшается.

В том случае, когда $\psi_б = \Delta\delta_г$, главная ось гирокомпаса в процессе маневра объекта непрерывно совмещена с положением динамического равновесия гироскопической системы в азимуте. После окончания маневра она сразу же займет новое положение равновесия, в связи с чем у гирокомпаса не будет наблюдаться баллистической погрешности первого рода. Указанное перемещение получило название апериодического перехода гирокомпаса к новому положению равновесия.

При эксцентричном соединении маятника W с гироскопической камерой BK (см. рис. 147) у гирокомпаса при маневрах объекта будут возникать баллистические погрешности не только первого, но и второго рода. Сила инерции $m\dot{V}_D$ (см. рис. 148) при эксцентричном соединении маятника (см. рис. 147) будет создавать момент не только относительно внутренней оси OB подвеса гирокомпаса, но и относительно его наружной оси OC. Под влиянием этого момента, величина которого по аналогии с изложенным в § 68 может быть выражена зависимостью

$$M_C = m\dot{V}_D l \sin\varepsilon,$$

возникнет прецессионное движение гирокомпаса вокруг его внутренней оси подвеса OB.

Указанное движение будет происходить с угловой скоростью, определяемой при малом угле ε равенством

$$\dot{\vartheta}_б = -\frac{ml\varepsilon}{J\Omega}\dot{V}_D.$$

В результате за время маневра главная ось гирокомпаса совершит вокруг оси OB поворот на угол [при $\vartheta_б(0) = 0$]

$$\vartheta_б = -\int_{t_1}^{t_2} \dot{\vartheta}_б\, dt = -\frac{ml\varepsilon}{J\Omega}\int_{t_1}^{t_2} \dot{V}_D dt = -\frac{ml\varepsilon}{J\Omega}(V_{D2} - V_{D1}).$$

Учитывая, как и в формуле (458), приближенные значения скоростей объекта V_{D1} и V_{D2}, последнее выражение можно переписать в следующем виде:

$$\vartheta_б = -\frac{ml\varepsilon}{J\Omega}(V_2\cos\alpha_2 - V_1\cos\alpha_1). \qquad (460)$$

Поворот главной оси гирокомпаса к моменту окончания маневра на угол $\vartheta_б$ по отношению к плоскости горизонта и является причиной, порождающей дополнительную погрешность в показаниях прибора. Для выяснения ее физической природы спроектируем, как и выше (см. рис. 147), на картинную плоскость Q положения полюса гироскопа, соответствующие его равновесным состояниям в моменты времени t_1 начала и t_2 окончания маневра объекта (см. рис. 151).

Как было показано в § 69, равновесие гирокомпаса характеризуется величинами углов ϑ_r и ψ_r, определяемыми по зависимостям (451) и (452). Их значения ϑ_{r1} и ψ_{r1} обусловят положение на картинной плоскости точки a (рис. 152), являющейся проекцией полюса гирокомпаса в момент времени t_1, соответствующий движению объекта со скоростью V_1 и курсом α_1. Значения ϑ_{r2} и ψ_{r2} определят проекцию b полюса гирокомпаса в момент времени t_2, начиная с которого дальнейшее движение объекта будет происходить со скоростью V_2 и курсом α_2.

При апериодическом переходе гирокомпаса из одного положения равновесия в другое проекция его полюса в процессе маневра объекта переместилась бы на картинной плоскости строго по линии ab. При этом к моменту окончания маневра главная ось гирокомпаса составила бы с плоскостью горизонта угол ϑ_{r2}, что обеспечило бы отсутствие баллистической погрешности в показаниях прибора. Однако в действительности при эксцентричном соединении маятника с гирокамерой главная ось гирокомпаса за время маневра объекта повернется вокруг внутренней оси подвеса еще и на угол $\vartheta_б$. Вследствие этого главная ось гирокомпаса к концу маневра составит с плоскостью горизонта угол, отличный от ϑ_{r2} на величину $\vartheta_б$, определяемую по выражению (460). В результате к моменту окончания маневра проекция полюса гироскопа совместится на картинной плоскости не с точкой b, а с некоторой точкой c.

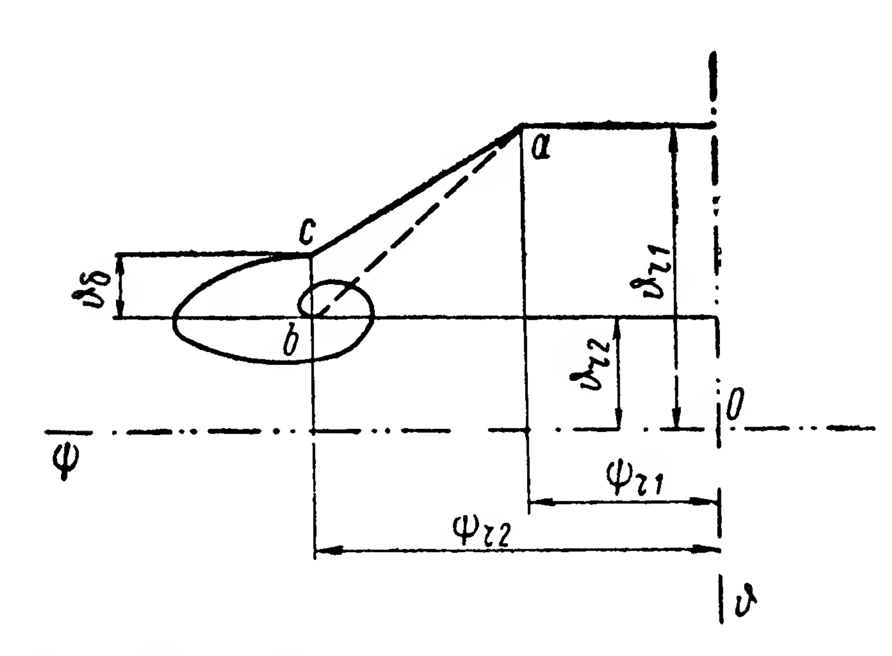


Рис. 152. Инерционные ошибки второго рода.

Избыточный наклон главной оси к плоскости горизонта вызовет (см. § 68) затухающие колебания гирокомпаса около положения равновесия. В процессе этих колебаний его главная ось будет отклоняться от плоскости гироскопического меридиана, обусловливая тем самым дополнительные погрешности прибора, которые и получили название баллистических погрешностей гирокомпаса второго рода.

Как видим, погрешность обусловливается введением в гирокомпас демпфирующего устройства, поэтому ее часто называют погрешностью ускорения — затухания. Характерной особенностью рассматриваемой погрешности является то, что ее максимальное значение наступает не сразу же после окончания маневра, а лишь по прошествии некоторого времени, равного примерно четверти периода прецессионных колебаний гирокомпаса.

§ 71. УСЛОВИЕ АПЕРИОДИЧЕСКОГО ПЕРЕХОДА ГИРОКОМПАСА В НОВОЕ ПОЛОЖЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ

Апериодический переход гирокомпаса из одного положения равновесия в другое характерен тем, что в любой момент времени угол отклонения его главной оси от плоскости географического меридиана должен точно соответствовать мгновенным значениям курса и скорости движения объекта. При апериодических переходах гирокомпаса решения (451) и (452) должны в любой момент времени удовлетворять системе уравнений (450).

Чтобы выяснить условие, необходимое для обеспечения указанного требования, продифференцируем выражения (451) и (452), полагая угол φ величиной постоянной:

$$\dot{\vartheta}_r = J\Omega \frac{\dot{V}\sin\alpha + V\dot{\alpha}\cos\alpha}{GlR_з} \operatorname{tg}\varphi$$

и соответственно

$$\dot{\psi}_r = \frac{(R_з\Omega_з\cos\varphi - V\sin\alpha)(\dot{V}\cos\alpha - V\dot{\alpha}\sin\alpha)}{(R_з\Omega_з\cos\varphi - V\sin\alpha)^2} + \frac{V\cos\alpha(\dot{V}\sin\alpha + V\dot{\alpha}\cos\alpha)}{(R_з\Omega_з\cos\varphi - V\sin\alpha)^2}$$

или после преобразований

$$\dot{\psi}_r = \frac{R_з\Omega_з\dot{V}\cos\alpha\cos\varphi - (R_з\Omega_з\sin\alpha\cos\varphi - V)V\dot{\alpha}}{(R_з\Omega_з\cos\varphi - V\sin\alpha)^2}.$$

Подставив найденные значения $\dot{\vartheta}_r$ и $\dot{\psi}_r$, а также значения ϑ_r и ψ_r, определяемые по выражениям (451) и (452), в уравнения (450), будем иметь

$$\frac{R_з\Omega_з\dot{V}\cos\alpha\cos\varphi - (R_з\Omega_з\sin\alpha\cos\varphi - V)V\dot{\alpha}}{(R_з\Omega_з\cos\varphi - V\sin\alpha)^2} + \frac{Gl}{J\Omega}\cdot\frac{-J\Omega(R_з\Omega_з\sin\varphi - V\sin\alpha\operatorname{tg}\varphi)}{GlR_з} -$$

$$- \frac{m\dot{V}l\sin\alpha}{J\Omega}\left(-\varepsilon\operatorname{tg}\varphi + \frac{V\cos\alpha}{R_з\Omega_з\cos\varphi - V\sin\alpha}\right) =$$

$$= -\Omega_з\sin\varphi + \frac{V}{R_з}\sin\alpha\operatorname{tg}\varphi + \frac{m\dot{V}l}{J\Omega}\cos\alpha;$$

$$J\Omega\frac{\dot{V}\sin\alpha + V\dot{\alpha}\cos\alpha}{GlR_з}\operatorname{tg}\varphi -$$

$$- \frac{R_з\Omega_з\cos\varphi - V\sin\alpha}{R_з}\left(-\varepsilon\operatorname{tg}\varphi + \frac{V\cos\alpha}{R_з\Omega_з\cos\varphi - V\sin\alpha}\right) +$$

$$+ \frac{Gl\varepsilon}{J\Omega}\cdot\frac{-J\Omega(R_з\Omega_з\sin\varphi - V\sin\alpha\operatorname{tg}\varphi)}{GlR_з} = -\frac{V\cos\alpha}{R_з},$$

откуда после очевидных преобразований найдем

$$\left.\begin{aligned}&\frac{R_3\Omega_3\dot{V}\cos\alpha\cos\varphi-(R_3\Omega_3\sin\alpha\cos\varphi-V)V\dot{\alpha}}{(R_3\Omega_3\cos\varphi-V\sin\alpha)^2}+\\&+\frac{m\dot{V}l\sin\alpha}{J\Omega}\left(\varepsilon\operatorname{tg}\varphi-\frac{V\cos\alpha}{R_3\Omega_3\cos\varphi-V\sin\alpha}\right)=\frac{m\dot{V}l}{J\Omega}\cos\alpha;\\&\frac{J\Omega}{Gl}\cdot\frac{\dot{V}\sin\alpha+V\dot{\alpha}\cos\alpha}{R_3}\operatorname{tg}\varphi=0.\end{aligned}\right\}\quad(461)$$

Таковы условия, при которых будет существовать апериодический переход гирокомпаса из одного положения равновесия в другое. Анализируя их, замечаем, что во втором равенстве (461) множитель $\frac{J\Omega}{GlR_3}\neq 0$. Следовательно,

$$(\dot{V}\sin\alpha+V\dot{\alpha}\cos\alpha)\operatorname{tg}\varphi=0.\quad(462)$$

Движение объекта, в процессе которого $\operatorname{tg}\varphi$ остается равным нулю, не представляет практического интереса. При этом условии объект может перемещаться лишь только по экватору с постоянным курсом α, равным либо $\frac{\pi}{2}$, либо $\frac{3\pi}{2}$. В обоих случаях равенства (461) удовлетворяются при любых соотношениях между конструктивными параметрами прибора.

В общем случае, когда $\varphi\neq 0$, из равенства (462) вытекает зависимость

$$V\dot{\alpha}=-\dot{V}\operatorname{tg}\alpha.$$

Подставив ее в первое равенство (461), будем иметь

$$\frac{R_3\Omega_3\dot{V}\cos\alpha\cos\varphi+(R_3\Omega_3\sin\alpha\cos\varphi-V)\dot{V}\operatorname{tg}\alpha}{(R_3\Omega_3\cos\varphi-V\sin\alpha)^2}+$$
$$+\frac{m\dot{V}l\sin\alpha}{J\Omega}\left(\varepsilon\operatorname{tg}\varphi-\frac{V\cos\alpha}{R_3\Omega_3\cos\varphi-V\sin\alpha}\right)=\frac{m\dot{V}l}{J\Omega}\cos\alpha,$$

откуда после сокращения на $\dot{V}$.

$$\frac{ml}{J\Omega}\left[\frac{R_3\Omega_3\cos\alpha\cos\varphi-V\sin\alpha\cos\alpha-R_3\Omega_3\varepsilon\sin\alpha\sin\varphi}{R_3\Omega_3\cos\varphi-V\sin\alpha}+\right.$$
$$\left.+\frac{V\varepsilon\sin^2\alpha\operatorname{tg}\varphi+V\cos\alpha}{R_3\Omega_3\cos\varphi-V\sin\alpha}\right]=$$
$$=\frac{R_3\Omega_3\cos\alpha\cos\varphi+R_3\Omega_3\sin\alpha\cos\varphi\operatorname{tg}\alpha-V\operatorname{tg}\alpha}{(R_3\Omega_3\cos\varphi-V\sin\alpha)^2}$$

или после преобразований

$$\frac{ml}{J\Omega}=\frac{1}{R_3\Omega_3\cos\varphi-V\sin\alpha}\times$$
$$\times\frac{R_3\Omega_3\cos\alpha\cos\varphi+(R_3\Omega_3\sin\alpha\cos\varphi-V)\operatorname{tg}\alpha}{R_3\Omega_3\cos\alpha\cos\varphi+V\cos\alpha(1-\sin\alpha)-\varepsilon(R_3\Omega_3\sin\varphi-V\sin\alpha\operatorname{tg}\varphi)\sin\alpha}.\quad(463)$$

Только при соблюдении условия (463) гирокомпас с эксцентрично подвешенным маятником будет апериодически переходить из одного положения равновесия в другое и, следовательно, не будет подвержен влиянию ускорений. Однако, как нетрудно видеть, выполнение условия (463) связано с значительными практическими трудностями. Величины m, l и J, являющиеся конструктивными параметрами гирокомпаса, в процессе его работы сохраняют свои значения постоянными. Поэтому при изменениях курса α скорости V и широты φ условие (463) принципиально может быть выполнено лишь за счет соответствующего изменения угловой скорости Ω собственного вращения ротора гироскопа.

Между тем, изменение величины Ω требует значительного времени (см. § 19) и не может быть осуществлено в течение даже нескольких секунд. Вследствие большого кинетического момента $J\Omega$ и способности двигателей, приводящих во вращение ротор гироскопа, к значительным перегрузкам, регулирование угловой скорости Ω столь значительно отстает по времени от изменения величин α, V и φ, что условие (463) практически невыполнимо. Именно по этим причинам пока не удается получить гирокомпас, полностью свободный от воздействия инерционных сил.

Однако гирокомпасы, весьма близко отвечающие условию (463), реально существуют уже в течение многих лет. Этому способствовало то, что при сравнительно малых скоростях V движения объекта величины $(R_3\Omega_3 \sin\alpha\cos\varphi - V)\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $V\cos\alpha\,(1-\sin\alpha)$ и $\varepsilon\,(R_3\Omega_3\sin\varphi - V\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi)\sin\alpha$ несоизмеримо малы по сравнению с $R_3\Omega_3\cos\alpha\cos\varphi$. Поэтому входящий в равенство (463) множитель

$$\frac{R_3\Omega_3\cos\alpha\cos\varphi + (R_3\Omega_3\sin\alpha\cos\varphi - V)\,\mathrm{tg}\,\alpha}{R_3\Omega_3\cos\alpha\cos\varphi + V\cos\alpha\,(1-\sin\alpha) - \varepsilon\,(R_3\Omega_3\sin\varphi - V\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi)\sin\alpha} \approx 1,$$

и само равенство, если пренебречь в нем величиной $V\sin\alpha$ по сравнению с $R_3\Omega_3\cos\varphi$, принимают вид

$$\frac{ml}{J\Omega} = \frac{1}{R_3\Omega_3\cos\varphi}. \qquad (464)$$

Условие (464) можно получить и более простым методом. При апериодическом переходе гирокомпаса из одного положения равновесия в другие углы $\psi_б$ его инерционного смещения и $\Delta\delta_г$ приращения скоростной девиации должны быть равны между собой. Согласно этому условию, приравняв значения углов $\psi_б$ и $\Delta\delta_г$, определяемые по выражениям (458) и (459), будем иметь

$$\frac{U}{J\Omega}(V_2\cos\alpha_2 - V_1\cos\alpha_1) = \frac{V_2\cos\alpha_2 - V_1\cos\alpha_1}{R_3\Omega_3\cos\varphi},$$

откуда после замены величины U ее значением, равным для гирокомпаса с маятником, согласно (457), произведению ml, непосредственно вытекает найденная выше зависимость (464).

Выполнение приближенного условия (464) не вызывает тех затруднений, которые возникают при необходимости выполнения зависимости (463). Действительно, выразив в равенстве (464) массу m гирокомпаса через его вес G, можем записать

$$\frac{Gl}{J\Omega} = \frac{g}{R_3 \Omega_3 \cos \varphi}. \qquad (465)$$

Подставив зависимость (465) в выражение (432), характеризующее величину периода T колебаний гирокомпаса, найдем

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_3 \Omega_3 \cos \varphi}{g} \cdot \frac{1}{\Omega_3 \cos \varphi}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_3}{g}},$$

или, вводя значение радиуса Земли $R_3 = 6{,}378 \cdot 10^6$ *м* и величину ускорения силы тяжести $g = 9{,}81$ *мсек*$^{-2}$,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{6{,}378 \cdot 10^6}{9{,}81}} = 84{,}4 \text{ мин}.$$

Таким образом, для уменьшения инерционных погрешностей гирокомпаса необходимо, чтобы период T его незатухающих колебаний был равен 84,4 мин. Это условие впервые было получено М. Шулером в 1910 году. При его соблюдении гирокомпас будет апериодически, с точностью принятых выше допущений, переходить из одного положения равновесия в другое. Условие Шулера уточнялось советскими исследователями В. Г. Железновым, А. Ю. Ишлинским, Я. Н. Ройтенбергом [14], Э. И. Сливом [37] и некоторыми другими специалистами.

Так как условие (463) апериодических переходов гирокомпаса с эксцентричным подвесом маятника на практике обычно не выполняется, гирокомпас к моменту окончания объектом маневра, как правило, будет обладать инерционной погрешностью. При выполнении объектом нескольких следующих один за другим маневров инерционная погрешность может накапливаться, увеличиваясь с течением времени. Исследованию влияния различных видов маневрирования объекта на величину и характер изменения во времени указанной погрешности гирокомпаса посвящены работы ряда авторов [1, 2, 13, 37]. Необходимо иметь в виду, что инерционная погрешность гирокомпаса в общем случае зависит не только от относительного путевого ускорения объекта, но и от его переносного и кориолисова ускорений, обусловливаемых суточным вращением Земли. Учет влияния этих ускорений объекта осуществляется при более полном исследовании точности работы гирокомпаса [14], что выходит за рамки данной книги.

§ 72. ДВУХРЕЖИМНЫЕ ГИРОКОМПАСЫ

Инерционные погрешности гирокомпасов, устанавливаемых на объектах, движущихся с большими скоростями и ускорениями, достигают столь высоких значений, что использовать прибор для

целей навигации становится невозможным. Между тем, в настоящее время, когда объекты могут перемещаться относительно земной поверхности на весьма большие расстояния, гирокомпас становится одним из необходимейших приборов. Только гироскопический компас может быть использован для коррекции навигационной системы относительно плоскости географического меридиана, в условиях отсутствия внешней информации. Естественно, что от такого гирокомпаса требуется высокая точность сохранения положения его главной оси относительно плоскости географического меридиана в случае больших ускорений объекта.

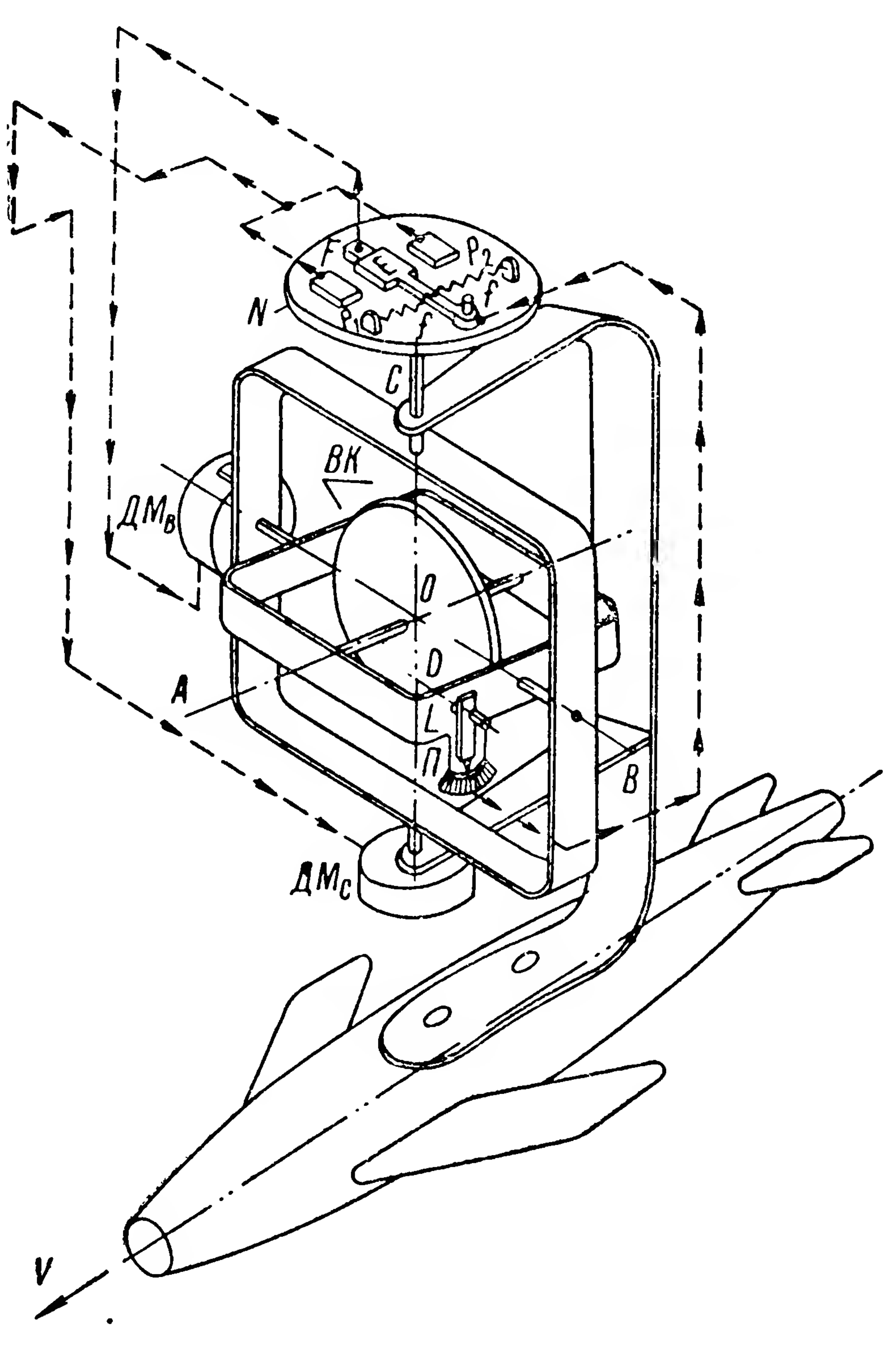


Рис. 153. Принципиальная схема двухрежимного гирокомпаса.

Удовлетворить указанные требования обычными гирокомпасами, схемы которых были рассмотрены выше, невозможно. Поэтому пришлось искать новые пути решения возникшей проблемы, в результате чего и были созданы так называемые двухрежимные гироскопические компасы, используемые не только на морских судах, но и на летательных аппаратах.

В настоящее время существует несколько типов двухрежимных гирокомпасов [15, 16, 54]. Принципиальная схема одного из них приведена на рис. 153. Основным элементом прибора является гироскоп с тремя степенями свободы, центр тяжести которого совмещен с точкой O подвеса системы. Для измерения углов наклона главной оси OA гироскопа относительно плоскости горизонта на внутреннем кардановом кольце $ВК$ установлен маятник L, ось DD подвеса которого параллельна внутренней оси OB.

В случае наклона главной оси OA на тот или иной угол ϑ к плоскости горизонта маятник L, стремящийся при отсутствии ускорений объекта сохранить отвесное положение, перемещается по обмотке потенциометра $П$. В результате с него снимается электрический сигнал, пропорциональный углу ϑ. Этот сигнал

подается на акселерометр E, выполненный в виде плоского маятника. Акселерометр E установлен на картушке N и может поворачиваться вокруг оси, параллельной оси OC подвеса гироскопа.

С помощью двух пружин f плоский маятник E фиксируется в среднем положении. Поэтому при отсутствии ускорений объекта снимаемый с потенциометра Π сигнал, проходя через акселерометр E, поступает на средний контакт F и далее на датчик моментов $ДМ_B$. В результате на гироскоп относительно его внутренней оси OB начинает действовать внешний момент M_B, пропорциональный по величине углу ϑ наклона главной оси гироскопа к плоскости горизонта. Направление действия момента M_B выбирается противоположным знаку угла ϑ. Таким образом, при отсутствии ускорений объекта рассматриваемый гироскопический прибор будет работать как гироскопический компас. Его движение будет описываться системой уравнений (449), в которой, если не учитывать сил трения в опорах подвеса, $M_B = -K_B\vartheta$, $M_C = 0$, где K_B — коэффициент пропорциональности.

Если объект начнет двигаться с ускорением, дающим составляющую на плоскость AOC, то вследствие инерции своей массы акселерометр E выйдет из среднего симметричного положения и замкнет один из крайних контактов P_1 или P_2. В результате сигнал, снимаемый с потенциометра Π, будет теперь поступать на датчик моментов $ДМ_C$. Поэтому при нарушении перпендикулярности между маятником L и осью OA гироскопа будет создаваться действующий уже относительно наружной оси OC момент M_C, пропорциональный углу рассогласования ϑ. Направление действия момента $M_C = K_C\vartheta$ устанавливается одного знака с углом ϑ, а коэффициент пропорциональности K_C выбирается значительно меньшим, чем K_B. Как видим, при наличии ускорений объекта прибор работает как гироскоп направления. Его движение в этом случае описывается системой уравнений (291).

Вследствие возможности автоматического перевода работы прибора с режима гирокомпаса на режим гироскопа направления и обратно прибор был назван двухрежимным гирокомпасом.

В связи с тем, что при ускорениях объекта прибор работает в режиме гироскопа направления, период его колебаний в режиме гирокомпаса не требуется выдерживать равным 84,4 мин. Поэтому главная ось OA двухрежимного компаса совмещается с положением равновесия (453) значительно быстрее, а его габариты могут быть значительно меньше, чем у однорежимного гироскопического компаса (см. § 65). Благодаря автоматическому переключению прибора на режим гироскопа направления линейные ускорения объекта не порождают больших отклонений главной оси OA гироскопа от плоскости меридиана. Действительно, при ускорениях объекта в плоскости AOC маятник L будет устанавливаться по направлению кажущейся вертикали, в результате чего с потенциометра Π будет сниматься сигнал, пропорциональный углу между

истинной и кажущейся вертикалями. Если бы этот сигнал продолжал подаваться на датчик моментов $ДМ_B$, то возникло бы прецессионное движение гироскопа вокруг оси OC и его главная ось OA начала бы непрерывно отклоняться от плоскости географического меридиана. Его полюс перемещался бы на картинной плоскости (рис. 154) от некоторой начальной точки d вдоль прямой de, параллельной оси координат $O^*\psi$.

В действительности при ускорении объекта подача снимаемого с потенциометра $П$ сигнала автоматически переключается с $ДМ_B$ на датчик моментов $ДМ_C$. Момент $M_C = K_C\vartheta$ вызовет прецессию гироскопа вокруг его внутренней оси OB. Перемещение полюса гироскопа по картинной плоскости будет происходить по прямой, параллельной оси $O^*\vartheta$, показывая тем самым, что главная ось OA гироскопа сохраняет неизменное положение относительно плоскости географического меридиана.

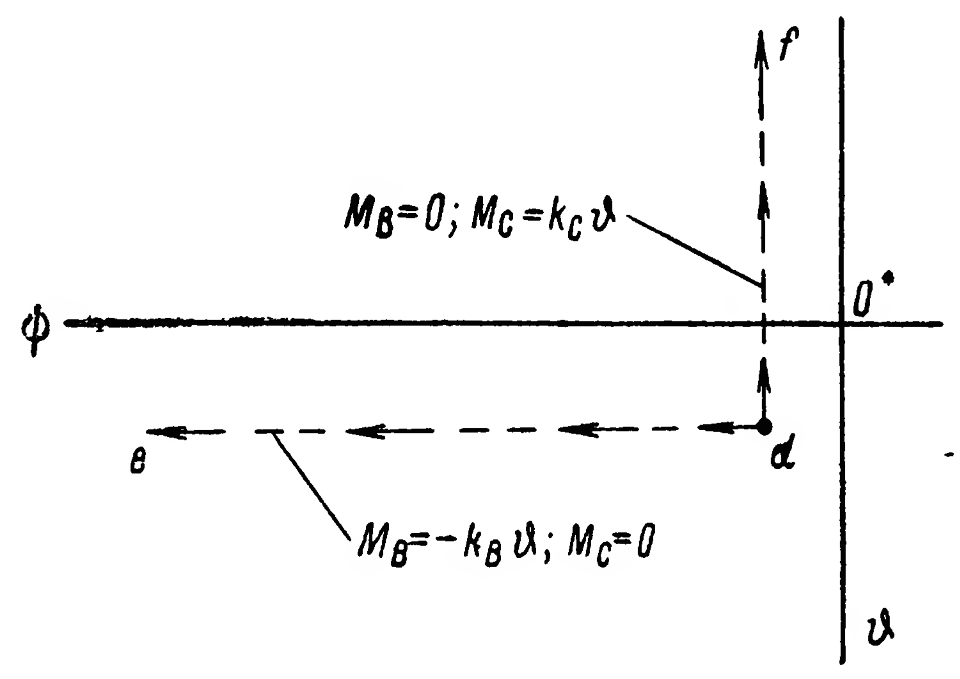
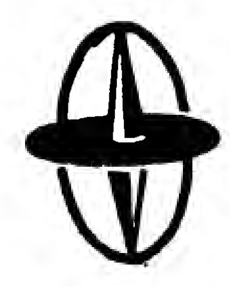


Рис. 154. Инерционные ошибки гирокомпаса и азимутального гироскопа.

Соответствующим выбором коэффициента K_C угловая скорость отклонения главной оси гироскопа от плоскости горизонта может быть ограничена весьма малой величиной. За время ускоренного движения объекта угол отклонения оси OA гироскопа от плоскости горизонта будет при этом оставаться достаточно малым. Вот почему, как только прекратится ускорение объекта и прибор будет переключен на режим гирокомпаса, его главная ось OA через короткий промежуток времени вновь совместится с положением равновесия, определяемым по выражению (453).

В схеме двухрежимного гирокомпаса может быть введено затухание его собственных колебаний. С этой целью при работе прибора в режиме гирокомпаса сигнал, снимаемый с потенциометра $П$, подается не только на датчик моментов $ДМ_B$, но одновременно и на датчик моментов $ДМ_C$. Чтобы момент, создаваемый датчиком $ДМ_C$, удовлетворял требованиям, изложенным в § 68, в цепь датчика моментов $ДМ_C$ включается сопротивление, уменьшающее соответствующим образом подаваемое напряжение. В результате датчики $ДМ_B$ и $ДМ_C$ будут создавать моменты $M_B = -K_B\vartheta$ и $M_C = \varepsilon K_B\vartheta$, обусловливая тем самым затухание колебаний гирокомпаса около положения равновесия, определяемого формулами (451) и (452).



Глава X

ГИРОВЕРТИКАЛЬ

§ 73. ПРОСТЕЙШАЯ СХЕМА МАЯТНИКОВОЙ ГИРОВЕРТИКАЛИ

Как было показано выше (см. гл. VI), для перемещения объекта по заданной в инерциальном пространстве траектории на его борту должны быть установлены два астатических гироскопа. В тех случаях, когда траектория движения задана в системе координат, связанных с земными ориентирами, объект также должен быть оборудован двумя гироскопическими приборами, которые позволяли бы измерять углы его отклонения от плоскостей меридиана и горизонта. Курс объекта, характеризующий направление его движения относительно плоскости меридиана, может быть определен с помощью одного из трех рассмотренных выше гироскопических приборов — либо гироскопа направления (гл. VII), либо гиромагнитного компаса (гл. VIII), либо гироскопического компаса (гл. IX). Для определения положения объекта относительно плоскости горизонта необходим такой гироскопический прибор, главная ось которого в течение всего времени работы оставалась бы в вертикальном положении.

Совмещение главной оси гироскопа с вертикалью данного места, непрерывно изменяющей свое положение в инерциальном пространстве (см. § 27), может быть осуществлено лишь в результате непрерывной прецессии гироскопа. Но для прецессионного движения необходимо, чтобы при отклонении главной оси от вертикали на гироскоп действовали внешние силы, создающие относительно осей подвеса необходимые моменты. В качестве такой силы может быть использована сила ве́са самого гироскопа. Достаточно сместить его центр тяжести на расстояние l от точки подвеса O вдоль главной оси OA (рис. 155), чтобы при отклонении оси OA от вертикали $O\zeta$ сила G создавала восстанавливающий момент, действующий на гироскоп относительно точки O. Но гироскоп может поворачиваться вокруг осей OC и OB. Поэтому его главная ось OA в общем случае может отклониться от вертикали $O\zeta$ на угол ψ в плоскости $BO\zeta$ и на угол ϑ в плоскости AOC.

Вследствие этих поворотов сила G обусловит возникновение восстанавливающих моментов, действующих на гироскоп относительно обеих осей подвеса OC и OB. Для определения их значений вычислим предварительно величины проекций смещения l

на оси OC и OE. Учитывая, что отрезок l расположен на отрицательной стороне оси OA, можем записать

$$l_C = l \cos [(-A),\ C]; \quad l_E = l \cos [(-A),\ E].$$

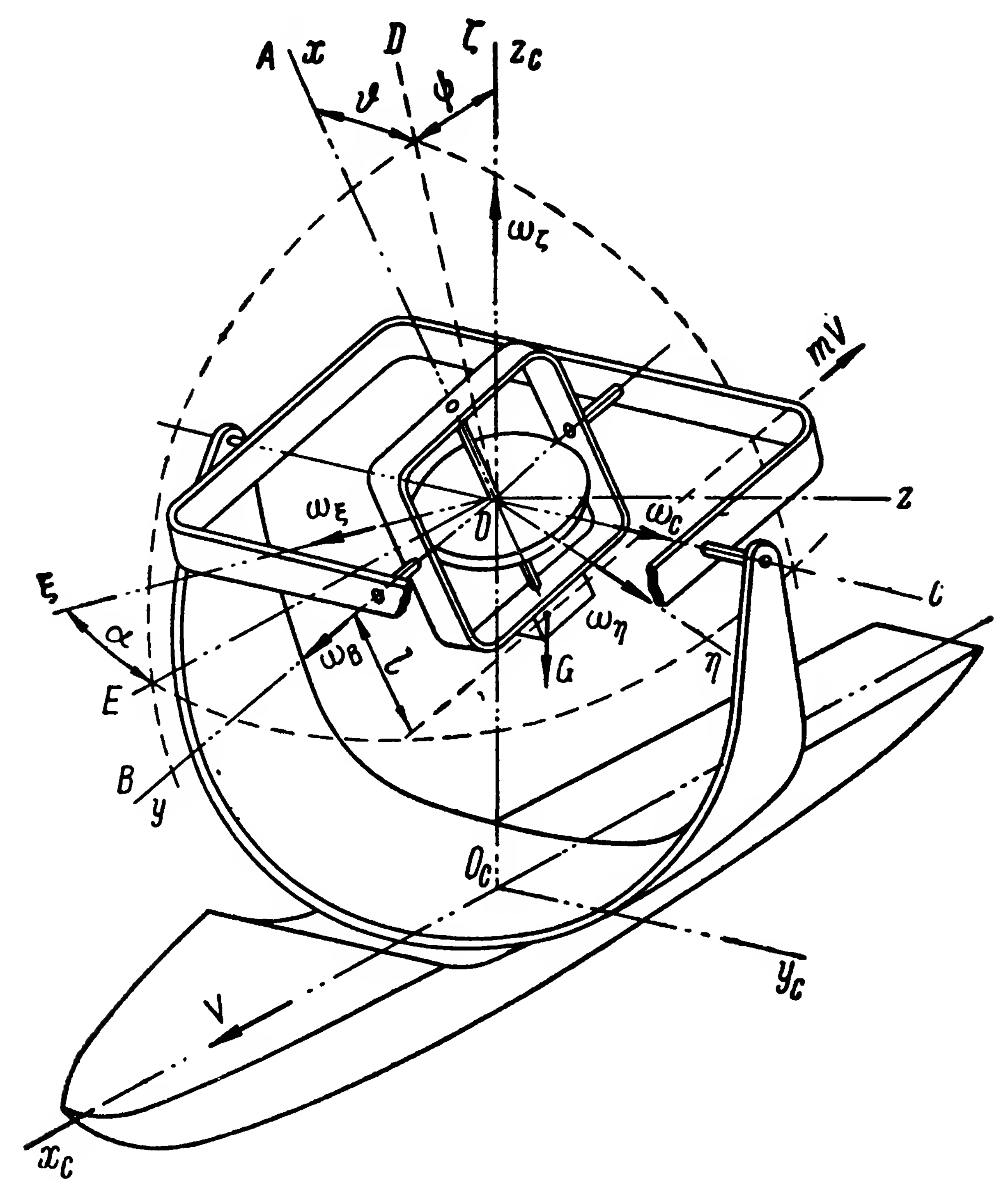


Рис. 155. Принципиальная схема маятниковой гировертикали.

Косинусы углов между рассматриваемыми осями в соответствии со схемой (рис. 155) и формулой (30) характеризуются равенствами

$$\cos [(-A),\ C] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right);$$

$$\cos [(-A),\ E] = \cos (\pi - \vartheta) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) +$$

$$+ \sin (\tau - \vartheta) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) \cos \frac{\pi}{2};$$

следовательно, искомые значения проекций будут равны

$$l_C = l \sin \vartheta; \quad l_E = -l \cos \vartheta \sin \psi.$$

Из анализа схемы (рис. 155) следует, что сила G, действуя на гироскоп на расстоянии l_C от точки его подвеса O, создает относительно оси OE момент M_E, отрицательный по направлению и равный $Gl \sin \vartheta$. При этом его проекция на внутреннюю ось подвеса OB гироскопа определится из выражения

$$M_B = -M_E \cos \psi = -Gl \sin \vartheta \cos \psi.$$

Действуя на гироскоп на расстоянии l_E от точки подвеса O, сила G будет создавать относительно оси OC момент

$$M_C = -Gl \cos \vartheta \sin \psi.$$

Кроме того, при движении объекта с ускорением $\dot{V}$ в гироскопической системе будет возникать сила инерции $m\dot{V}$, создающая момент относительно оси OC в положительном направлении, равный произведению $m\dot{V}l_\zeta$. Расстояние l_ζ, равное проекции l на ось $O\zeta$, определится из выражения

$$l_\zeta = l \cos [(-A), \zeta] = l \left[\cos \vartheta \cos (\pi + \psi) + \sin \vartheta \sin (\pi + \psi) \cos \frac{\pi}{2}\right],$$

или

$$l_\zeta = -l \cos \vartheta \cos \psi.$$

Таким образом, суммарные значения моментов, действующих относительно осей подвеса рассматриваемого гироскопического прибора, вследствие малости углов ϑ и ψ равны

$$M_B = -Gl\vartheta; \quad M_C = -Gl\psi + ml\dot{V}.$$

Подставим найденные значения моментов M_B и M_C в систему уравнений (162) и учтем, что восстанавливающие моменты будут стремиться удерживать главную ось гироскопа вблизи вертикали $O\zeta$. При этом условии угол $\vartheta_0 = 0$ и уравнения (162) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\left(\dot{\psi} + \omega_C\right) + J\Omega\omega_D\vartheta &= -Gl\vartheta; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\left(\dot{\vartheta} + \omega_B\right) &= -Gl\psi + ml\dot{V}. \end{aligned}\right\} \qquad (466)$$

Угловые скорости ω_B, ω_C и ω_D, входящие в (466), определятся значениями проекций угловых скоростей координатной системы $O\xi\eta\zeta$, совмещенной с плоскостями горизонта и меридиана, на оси OB, OC и OD гироскопа. Как было показано выше (§ 29), вращение осей $O\xi\eta\zeta$ в пространстве происходит с угловыми скоростями, определяемыми по выражениям (183). Для случая дви-

жения объекта по поверхности моря эти выражения упрощаются:

$$\left.\begin{aligned}\omega_\xi &= \Omega_з \cos\varphi - \frac{V}{R_з}\sin\alpha;\\ \omega_\eta &= \frac{V}{R_з}\cos\alpha;\\ \omega_\zeta &= \Omega_з \sin\varphi - \frac{V}{R_з}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi.\end{aligned}\right\} \quad (467)$$

Спроектировав $\bar{\omega}_\xi$, $\bar{\omega}_\eta$ и $\bar{\omega}_\zeta$ на оси OB, OC и OD гироскопа, можем записать:

$$\left.\begin{aligned}\omega_B &= \omega_\xi \cos(\xi, B) + \omega_\eta \cos(\eta, B) + \omega_\zeta \cos(\zeta, B);\\ \omega_C &= \omega_\xi \cos(\xi, C) + \omega_\eta \cos(\eta, C) + \omega_\zeta \cos(\zeta, C);\\ \omega_D &= \omega_\xi \cos(\xi, D) + \omega_\eta \cos(\eta, D) + \omega_\zeta \cos(\zeta, D).\end{aligned}\right\} \quad (468)$$

Из формулы (30) находим:

$$\cos(\xi, B) = \cos\alpha\cos\psi + \sin\alpha\sin\psi\cos\frac{\pi}{2} = \cos\alpha\cos\psi;$$

$$\cos(\eta, B) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\psi + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\psi\cos\frac{\pi}{2} =$$

$$= \sin\alpha\cos\psi;$$

$$\cos(\zeta, B) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) = -\sin\psi;$$

$$\cos(\xi, C) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha;$$

$$\cos(\eta, C) = \cos\alpha;$$

$$\cos(\zeta, C) = \cos\psi\cos\frac{\pi}{2} + \sin\psi\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0;$$

$$\cos(\xi, D) = \cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) + \sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)\cos\frac{\pi}{2} =$$

$$= \cos\alpha\sin\psi;$$

$$\cos(\eta, D) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \times$$

$$\times \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)\cos\frac{\pi}{2} = \sin\alpha\sin\psi;$$

$$\cos(\zeta, D) = \cos\psi.$$

Подставим найденные значения косинусов и значения угловых скоростей ω_B, ω_C и ω_D из (467) в выражения (468); после элементарных преобразований, учитывая малость ψ, получим

$$\left.\begin{aligned}\omega_B &= \Omega_з \cos\varphi\cos\alpha - \left(\Omega_з \sin\varphi - \frac{V}{R_з}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi\right)\psi;\\ \omega_C &= -\Omega_з\cos\varphi\sin\alpha + \frac{V}{R_з};\\ \omega_D &= \Omega_з\psi\cos\varphi\cos\alpha + \Omega_з\sin\varphi - \frac{V}{R_з}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi.\end{aligned}\right\} \quad (469)$$

Следовательно, исходная система уравнений (466) примет вид

$$\left.\begin{aligned}&J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\Big[\dot{\psi} + \Omega_з\cos\varphi\sin\alpha + \frac{V}{R_з} + \Omega_з\vartheta\psi\cos\varphi\cos\alpha +\\ &\quad + \left(\Omega_з\sin\varphi - \frac{V}{R_з}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi\right)\vartheta\Big] = -Gl\vartheta;\\ &J_C\ddot{\psi} - J\Omega\Big[\dot{\vartheta} + \Omega_з\cos\varphi\cos\alpha -\\ &\quad - \left(\Omega_з\sin\varphi - \frac{V}{R_з}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi\right)\psi\Big] = -Gl\psi + ml\dot{V}.\end{aligned}\right\} \quad (470)$$

Проанализировав (470), нетрудно заметить, что члены $\left(\Omega_з\sin\varphi - \frac{V}{R_з}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi\right)\vartheta$ и $\left(\Omega_з\sin\varphi - \frac{V}{R_з}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi\right)\psi$ являются величинами второго, а $\Omega_з\vartheta\psi\cos\varphi\cos\alpha$ — третьего порядка малости по сравнению с $\Omega_з\cos\varphi\sin\alpha$ и $\Omega_з\cos\varphi\cos\alpha$. Пренебрегая малыми величинами, можем записать:

$$\left.\begin{aligned}J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\psi} + Gl\vartheta &= J\Omega\left(\Omega_з\cos\varphi\sin\alpha - \frac{V}{R_з}\right);\\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\dot{\vartheta} + Gl\psi &= J\Omega\Omega_з\cos\varphi\cos\alpha + ml\dot{V}.\end{aligned}\right\} \quad (471)$$

Полученные уравнения с принятой степенью точности описывают движение рассматриваемого гироскопического прибора. Если пренебречь в (471) нутационными членами и исследовать лишь прецессионное движение гироскопа, то система уравнений примет вид

$$\left.\begin{aligned}\dot{\psi} + \frac{Gl}{J\Omega}\vartheta &= \Omega_з\cos\varphi\sin\alpha - \frac{V}{R_з};\\ \dot{\vartheta} - \frac{Gl}{J\Omega}\psi &= -\Omega_з\cos\varphi\cos\alpha - \frac{ml}{J\Omega}\dot{V}.\end{aligned}\right\} \quad (472)$$

Выясним характер движения гироскопического прибора для случая, когда его корпус расположен на земной поверхности не-

подвижно. Полагая в уравнениях (472) скорость V и ускорение $\dot{V}$ объекта равными нулю, находим:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} + \frac{Gl}{J\Omega}\vartheta &= \Omega_з \cos\varphi \sin\alpha; \\ \dot{\vartheta} - \frac{Gl}{J\Omega}\psi &= -\Omega_з \cos\varphi \cos\alpha. \end{aligned} \qquad (473)$$

Если считать, что φ и α постоянны, система (473) будет иметь частные решения

$$\begin{aligned} \vartheta_r &= \frac{J\Omega}{Gl}\Omega_з \cos\varphi \sin\alpha; \\ \psi_r &= \frac{J\Omega}{Gl}\Omega_з \cos\varphi \cos\alpha. \end{aligned} \qquad (474)$$

Соответствующую однородную систему уравнений запишем в символическом виде

$$\begin{aligned} p\psi + \frac{Gl}{J\Omega}\vartheta &= 0; \\ p\vartheta - \frac{Gl}{J\Omega}\psi &= 0, \end{aligned} \qquad (475)$$

а ее характеристическое уравнение в виде определителя

$$\begin{vmatrix} p, & \frac{Gl}{J\Omega} \\ -\frac{Gl}{J\Omega}, & p \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим

$$p^2 + \left(\frac{Gl}{J\Omega}\right)^2 = 0,$$

откуда находим корни характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = \pm\sqrt{-\left(\frac{Gl}{J\Omega}\right)^2} = \pm i\frac{Gl}{J\Omega} = \pm in. \qquad (476)$$

В соответствии с полученными значениями корней характеристического уравнения решения для одной из переменных системы (475), например для ϑ, примут вид

$$\vartheta_p = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt.$$

Продифференцировав полученное значение ϑ_p и подставив его во второе уравнение системы (475), найдем выражение для угла ψ:

$$\psi_p = C_1 \sin nt - C_2 \cos nt.$$

Таким образом, общее решение системы (473), учитывая ее частные решения (474), можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned}\vartheta &= C_1 \cos nt + C_2 \sin nt + \frac{J\Omega}{Gl}\Omega_3 \cos\varphi \sin\alpha;\\ \psi &= C_1 \sin nt - C_2 \cos nt + \frac{J\Omega}{Gl}\Omega_3 \cos\varphi \cos\alpha.\end{aligned}\right\} \quad (477)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 будем полагать, что при $t = 0$

$$\vartheta(0) = 0; \ \psi(0) = 0.$$

Тогда непосредственно из выражений (477) следует:

$$C_1 = -\frac{J\Omega}{Gl}\Omega_3 \cos\varphi \sin\alpha; \quad C_2 = \frac{J\Omega}{Gl}\Omega_3 \cos\varphi \cos\alpha.$$

Подставив найденные значения C_1 и C_2 в (477), будем иметь

$$\vartheta = -\frac{J\Omega\Omega_3 \cos\varphi \sin\alpha}{Gl}\cos nt + \frac{J\Omega\Omega_3 \cos\varphi \cos\alpha}{Gl}\sin nt + \\ + \frac{J\Omega\Omega_3 \cos\varphi \sin\alpha}{Gl};$$

$$\psi = -\frac{J\Omega\Omega_3 \cos\varphi \sin\alpha}{Gl}\sin nt - \frac{J\Omega\Omega_3 \cos\varphi \cos\alpha}{Gl}\cos nt + \\ + \frac{J\Omega\Omega_3 \cos\varphi \cos\alpha}{Gl},$$

или

$$\left.\begin{aligned}\vartheta &= \frac{J\Omega\Omega_3 \cos\varphi}{Gl}\sin(nt - \alpha) + \frac{J\Omega\Omega_3 \cos\varphi \sin\alpha}{Gl};\\ \psi &= -\frac{J\Omega\Omega_3 \cos\varphi}{Gl}\cos(nt - \alpha) + \frac{J\Omega\Omega_3 \cos\varphi \cos\alpha}{Gl}.\end{aligned}\right\} \quad (478)$$

Как видим, рассматриваемый гироскопический прибор (рис. 155) в случае неподвижного положения его основания на земной поверхности совершает незатухающие колебания вокруг оси $O\zeta_г$ (рис. 156) с круговой частотой n, равной согласно (476)

$$n = \frac{Gl}{J\Omega},$$

и периодом

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi\frac{J\Omega}{Gl}. \quad (479)$$

В процессе этих колебаний проекция полюса гироскопа на картинную плоскость Q будет описывать замкнутую траекторию. Перепишем (478) в виде

$$\vartheta - \frac{J\Omega\Omega_з \cos\varphi \sin\alpha}{Gl} = \frac{J\Omega\Omega_з \cos\varphi}{Gl} \sin(nt - \alpha);$$

$$\psi - \frac{J\Omega\Omega_з \cos\varphi \cos\alpha}{Gl} = -\frac{J\Omega\Omega_з \cos\varphi}{Gl} \cos(nt - \alpha).$$

Возводя каждое из полученных выражений в квадрат и складывая, получим уравнение траектории, описываемой проекцией полюса гироскопа на картинной плоскости:

$$\left(\vartheta - \frac{J\Omega\Omega_з \cos\varphi \sin\alpha}{Gl}\right)^2 + \left(\psi - \frac{J\Omega\Omega_з \cos\varphi \cos\alpha}{Gl}\right)^2 = \left(\frac{J\Omega\Omega_з \cos\varphi}{Gl}\right)^2.$$

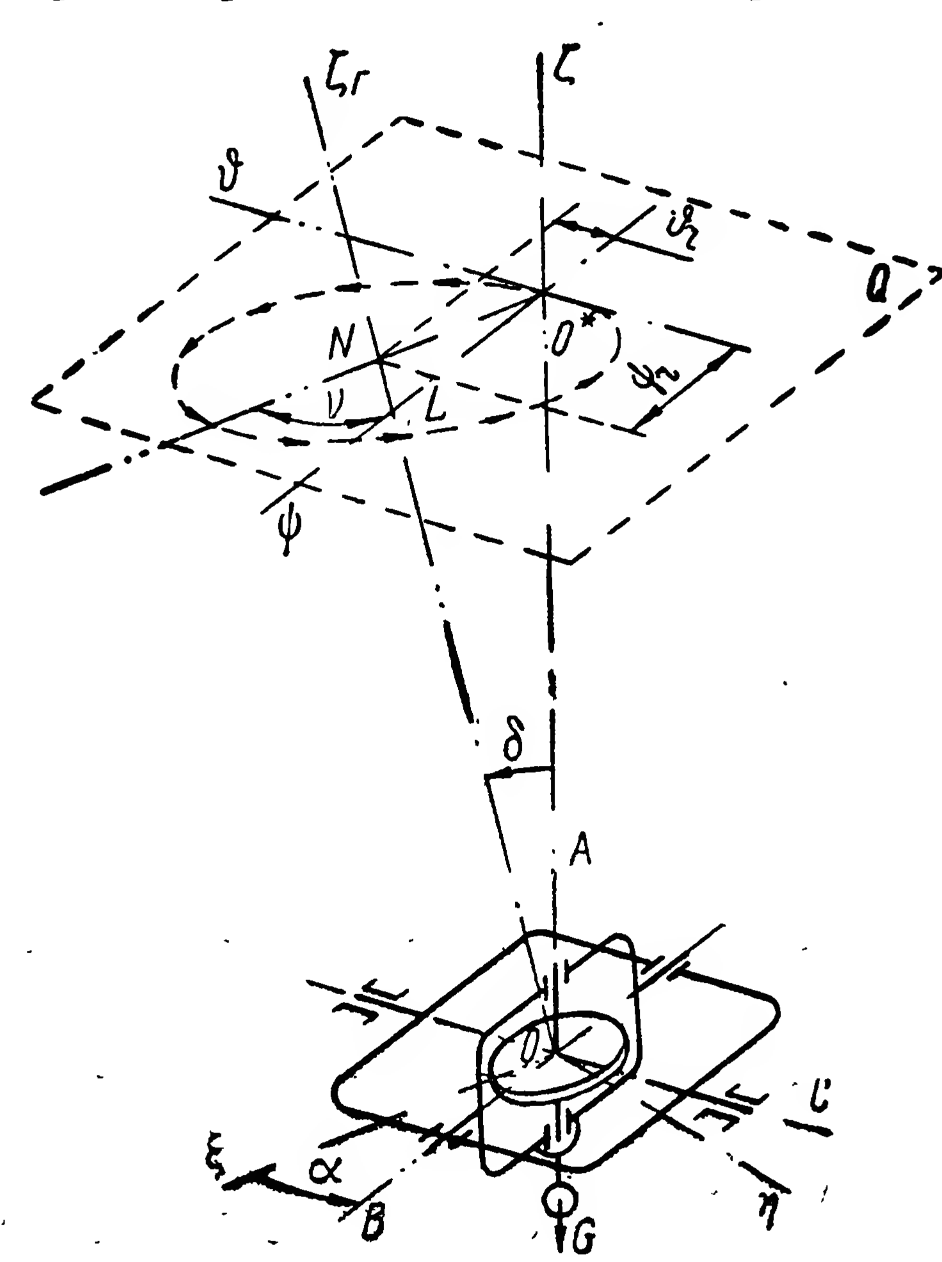


Рис. 156. Девиация маятниковой гировертикали.

Рассматриваемая траектория представляет собой окружность радиуса

$$NO^* = \frac{J\Omega\Omega_з \cos\varphi}{Gl}$$

с центром в точке N, координаты которой определяются значениями углов ϑ_r и ψ_r из (474).

Для уточнения положения оси $O\zeta_г$ в системе координат $O\xi\eta\zeta$, неизменно связанной с земными ориентирами, вычислим значение угла ν между плоскостями $NO^*\zeta$ и $BO\zeta$. Из прямоугольного треугольника O^*NL, расположенного на картинной плоскости Q, учитывая формулы (474), находим

$$\operatorname{tg}\nu = \frac{\vartheta_r}{\psi_r} = \frac{J\Omega\Omega_з \cos\varphi \sin\alpha\, Gl}{-GlJ\Omega\Omega_з \cos\varphi \cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$$

и, следовательно,

$$\nu = -\alpha.$$

Таким образом, ось $O\zeta_г$, характеризующая положение динамического равновесия гироскопа, отклоняется в данном случае от вертикали $O\zeta$ в плоскости $\xi O\zeta$ географического меридиана. Величина угла δ этого отклонения, или так называемой девиации при-

бора, может быть определена из того же прямоугольного треугольника O^*NL, стороны которого связаны между собой зависимостью

$$NO^* = \sqrt{\vartheta_r^2 + \psi_r^2}.$$

Из этой зависимости, учитывая (474), при малых углах ϑ_r и ψ_r находим значение угла при вершине конуса, по поверхности которого перемещается главная ось OA гироскопа в процессе его колебаний вокруг оси $O\zeta_r$:

$$\delta = NO^* = \frac{J\Omega\Omega_3 \cos\varphi}{Gl}. \qquad (480)$$

Так как угловая скорость Ω_3, согласно равенству (168), весьма мала, угол δ также достаточно мал. Последнее обстоятельство позволяет считать, что главная ось гироскопа практически совпадает с вертикалью места, в связи с чем описанный прибор и получил название маятниковой гироскопической вертикали или гировертикали.

Пример 31. Определить период T прецессионных колебаний и угол δ девиации маятниковой гировертикали, установленной неподвижно на земной поверхности под географической широтой $\varphi = 50°$ таким образом, что плоскость BOA (рис. 156) составляет с плоскостью меридиана угол $\alpha = 20°$. Гировертикаль обладает кинетическим моментом $J\Omega = 13\,700$ *Гсмсек* и весом $G = 500$ *Г*. Смещение центра тяжести системы от точки ее подвеса $l = 1{,}5$ *см*.

Из выражения (479) находим

$$T = 2\pi\frac{J\Omega}{Gl} = 2\cdot 3{,}14\frac{13\,700}{500\cdot 1{,}5} = 114{,}74 \text{ сек}.$$

Из равенства (480), учитывая значение угловой скорости Ω_3 (168), находим

$$\delta = \frac{J\Omega\Omega_3\cos\varphi}{Gl} = \frac{13\,700\cdot 7{,}29\cdot 10^{-5}\cos 50°}{500\cdot 1{,}5} = 8{,}56\cdot 10^{-4} \text{ рад}.$$

или соответственно

$$\delta = 0{,}000856\cdot 57{,}3\cdot 60 = 2{,}94 \approx 3 \text{ мин}.$$

§ 74. СКОРОСТНАЯ ДЕВИАЦИЯ МАЯТНИКОВОЙ ГИРОВЕРТИКАЛИ. УСЛОВИЕ ЕЕ НЕВОЗМУЩАЕМОСТИ

Для выяснения характера движения маятниковой гировертикали при перемещениях объекта со скоростью V (см. рис. 155) вновь обратимся к системе уравнений (472). Примем, что движение объекта происходит с постоянной скоростью $V = \text{const}$. При этом условии система уравнений (472) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} \dot\psi + \frac{Gl}{J\Omega}\vartheta &= \Omega_3\cos\varphi\sin\alpha - \frac{V}{R_3}; \\ \dot\vartheta - \frac{Gl}{J\Omega}\psi &= -\Omega_3\cos\varphi\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (481)$$

Система (481) имеет частные решения

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_r &= \frac{J\Omega}{Gl}\left(\Omega_з \cos\varphi \sin\alpha - \frac{V}{R_з}\right),\\ \psi_r &= -\frac{J\Omega}{Gl}\Omega_з \cos\varphi \cos\alpha,\end{aligned}\right\} \qquad (482)$$

которые характеризуют величину девиации маятниковой гировертикали.

Соответствующая однородная система уравнений имеет вид (475). Ее решение определится найденными выше (§ 73) значениями ϑ_p и ψ_p. Таким образом, общее решение уравнений (481) будет

$$\vartheta = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt + \frac{J\Omega}{Gl}\left(\Omega_з \cos\varphi \sin\alpha - \frac{V}{R_з}\right);$$

$$\psi = C_1 \sin nt - C_2 \cos nt - \frac{J\Omega}{Gl}\Omega_з \cos\varphi \cos\alpha.$$

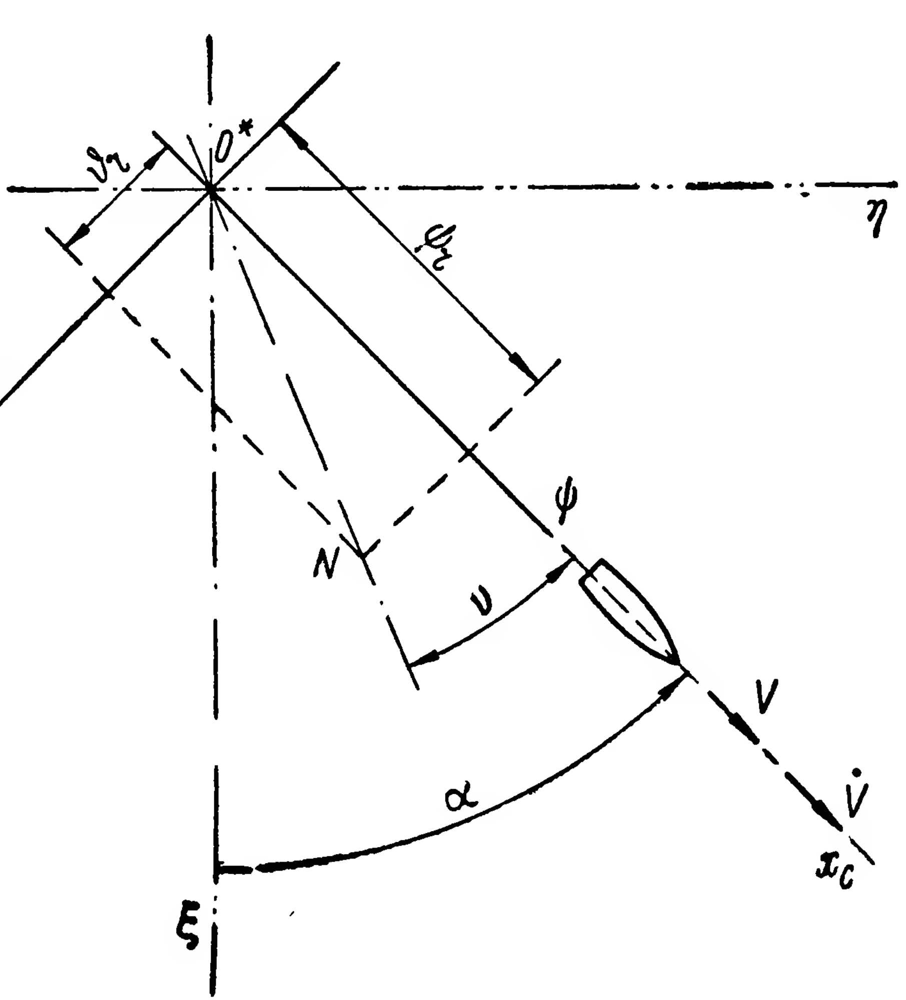


Рис. 157. К определению скоростной девиации маятниковой гировертикали.

Из анализа полученных равенств следует, что и в данном случае маятниковая гировертикаль совершает незатухающие гармонические колебания вокруг оси динамического равновесия, которая теперь не совмещена с плоскостью географического меридиана. Действительно, положение на картинной плоскости точки N (рис. 157), через которую проходит ось динамического равновесия, обусловливается значениями (482). Следовательно, угол ν, определяемый зависимостью

$$\operatorname{tg}\nu = \frac{\vartheta_r}{\psi_r} = \frac{J\Omega\left(\Omega_з \cos\varphi \sin\alpha - \frac{V}{R_з}\right)Gl}{-GlJ\Omega\Omega_з \cos\varphi \cos\alpha} =$$

$$= -\operatorname{tg}\alpha + \frac{V}{R_з\Omega_з \cos\varphi \cos\alpha},$$

будет уже отличаться от курса α.

В связи с этим азимутальная плоскость, содержащая точку N, составляет теперь с плоскостью географического меридиана угол, равный разности $\alpha - \nu$. Из схемы (рис. 157) видно, что перемещение точки подвеса маятниковой гировертикали относительно

земной поверхности вызывает отклонение оси ее динамического равновесия от плоскости географического меридиана в сторону левого борта подвижного объекта. Это дополнительное по сравнению с (474) отклонение оси динамического равновесия от вертикали места на угол

$$\delta_V = \frac{V}{R_з}$$

получило название скоростной девиации маятниковой вертикали.

В процессе движения объекта его скорость может изменяться как по величине, так и по направлению. Поэтому точка подвеса маятниковой вертикали в общем случае будет перемещаться относительно земной поверхности с ускорением. В связи с этим в гироскопической системе будут возникать силы инерции, порождающие дополнительные отклонения главной оси прибора от вертикали места.

Выясним, при каком условии можно избежать указанных ошибок в показаниях маятниковой гировертикали. При отсутствии инерционных ошибок частные решения (482) должны удовлетворять системе уравнений (472) в любой момент времени даже при переменной скорости движения V. Основываясь на сказанном, подставим в уравнения (472) вместо переменных ϑ и ψ значения ϑ_r и ψ_r из (482) и их первых производных. Учтем также, что в рассматриваемом случае (см. рис. 155) при ускорении объекта вдоль его продольной оси $O_c x_c$ углы α (курса) и φ (географической широты места) за время маневра практически не изменяются. В результате подстановки будем иметь

$$\Omega_з \cos\varphi \sin\alpha - \frac{V}{R_з} = \Omega_з \cos\varphi \sin\alpha - \frac{V}{R_з};$$

$$-\frac{J\Omega \dot{V}}{GlR_з} - \Omega_з \cos\varphi \cos\alpha = -\Omega_з \cos\varphi \cos\alpha - \frac{ml}{J\Omega} \dot{V}.$$

Нетрудно заметить, что первое из полученных равенств удовлетворяется во всех случаях, второе — только при соблюдении условия

$$\frac{J\Omega}{GlR_з} = \frac{ml}{J\Omega}.$$

Заменив в этом равенстве массу m гироскопа его весом G, находим

$$\left(\frac{Gl}{J\Omega}\right)^2 = \frac{g}{R_з}. \qquad (483)$$

При соблюдении условия (483) маятниковая гировертикаль не будет реагировать на ускорения объекта в горизонтальной плоскости. Подставив соотношение (483) между конструктивными

параметрами маятниковой гировертикали в выражение (479), определяющее значение периода ее незатухающих прецессионных колебаний, получим

$$T = 2\pi \frac{J\Omega}{Gl} = 2\pi \sqrt{\frac{R_з}{g}}. \tag{484}$$

Как видим, для того, чтобы маятниковая гировертикаль не возмущалась при ускорениях объекта, период ее прецессионных колебаний, так же как и период колебаний гироскопического компаса (см. § 70), должен удовлетворять условию Шулера и быть равным 84,4 мин.

Необходимо иметь в виду, что условие (483) невозмущаемости маятниковой гировертикали, так же как и условие (465) невозмущаемости гирокомпаса, является приближенным. Его соблюдение не обеспечивает апериодических переходов гировертикали из одного положения равновесия в другое при любых режимах движения объекта. По причинам, которые были изложены в § 70, создание абсолютно невозмущаемых маятниковых гировертикалей связано с преодолением значительных технических трудностей. Более того, при малых габаритах прибора соблюдение даже приближенного условия невозмущаемости (483) практически неосуществимо.

Для подтверждения сказанного обратимся к равенству (484). Выразим в нем момент инерции J и вес G ротора через его массу m; учтем, что период T колебаний гировертикали должен быть равен 84,4 мин. или 5064 сек. Пренебрегая массой внутреннего карданова кольца, найдем требуемую величину смещения центра тяжести гировертикали

$$l = \frac{2\pi m\varrho^2\Omega}{5064 mg}, \tag{485}$$

где ϱ — радиус инерции ротора относительно главной оси гироскопа;

g — ускорение силы тяжести, равное 981 *смсек*$^{-2}$.

Одновременно центр тяжести гироскопа должен быть смещен вдоль его главной оси по отношению к точке подвеса на такое расстояние l, чтобы при допустимом значении угла Δ застоя прибора момент силы G превышал или в крайнем случае был равен моменту сил трения в опорах подвеса. Это требование будет соблюдаться лишь при условии

$$Gl \sin \Delta \geqslant \lambda G,$$

из которого при малой величине допустимого угла застоя Δ следует

$$l \geqslant \frac{\lambda}{\Delta}, \tag{486}$$

где λ — коэффициент момента сил трения качения.

Приравняв между собой правые части выражений (485) и (486), найдем минимально необходимую величину радиуса инерции ϱ ротора гироскопа:

$$\varrho = \sqrt{\frac{\lambda}{1{,}26 \cdot 10^{-6} \cdot \Delta\Omega}}. \qquad (487)$$

Как следует из выражения (487), вследствие малого значения допустимого угла застоя Δ даже при малой величине коэффициента λ момента сил трения радиус инерции ϱ ротора маятниковой гировертикали, а следовательно, и ее габариты приобретают значительные размеры. Это усугубляется еще и тем, что с увеличением ϱ угловую скорость Ω приходится ограничивать определенными пределами, обусловливаемыми требованиями прочности ротора. С уменьшением угловой скорости Ω, как это следует из (487), радиус инерции ϱ, при всех прочих равных условиях, будет увеличиваться. В то же время смещение l центра тяжести гироскопа относительно точки его подвеса, определяемое по выражениям (485) или (486), оказывается весьма малым и во многих случаях невыполнимым технологически.

Пример 32. Определить необходимые радиус ротора и смещение центра тяжести маятниковой гировертикали, период колебаний которой равен 84,4 мин. Ротор выполнен в виде цилиндра. Допустимый угол застоя Δ не превышает 5 угл. мин. Угловая скорость собственного вращения ротора $\Omega = 3000$ сек.$^{-1}$. Коэффициент момента сил трения $\lambda = 0{,}2 \cdot 10^{-3}$ *см*.

Переведем значение угла застоя в радианы:

$$\Delta = 5' = \frac{5}{60 \cdot 57{,}3} = 1{,}46 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Подставив численные значения величин, входящих в выражение (487), найдем необходимый размер радиуса инерции ротора:

$$\varrho = \sqrt{\frac{\lambda}{1{,}26 \cdot 10^{-6} \cdot \Delta\Omega}} = \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 10^{-3}}{1{,}26 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}46 \cdot 10^{-3} \cdot 3000}} = 7{,}3 \text{ см}.$$

Как известно,[1] радиус инерции цилиндра равен 0,7071 его наружного радиуса. Следовательно, необходимое значение радиуса в рассматриваемом случае

$$R = \frac{\varrho}{0{,}7071} = \frac{7{,}3}{0{,}7071} = 10{,}3 \text{ см}.$$

Величину смещения центра тяжести гироскопа l определим из зависимости (486):

$$l = \frac{\lambda}{\Delta} = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-3}}{1{,}46 \cdot 10^{-3}} = 0{,}137 \text{ см}.$$

Чтобы сравнить полученные результаты расчета с практическими данными, укажем, что наружный радиус ротора шаровой гировертикали Сперри [см. 18, стр. 108], работающей на воздушной опоре, $R = 7{,}6$ *см*.

[1] См.: Техническая энциклопедия, т. 13, Гостехиздат, 1941, стр. 431.

§ 75. УСПОКОЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКОВОЙ ГИРОВЕРТИКАЛИ

Анализ уравнений (472) показал, что маятниковая гировертикаль совершает незатухающие гармонические колебания вокруг оси динамического равновесия. Воспользоваться для демпфирования собственных колебаний гировертикали естественными силами сопротивления, например силами трения в опорах подвеса,

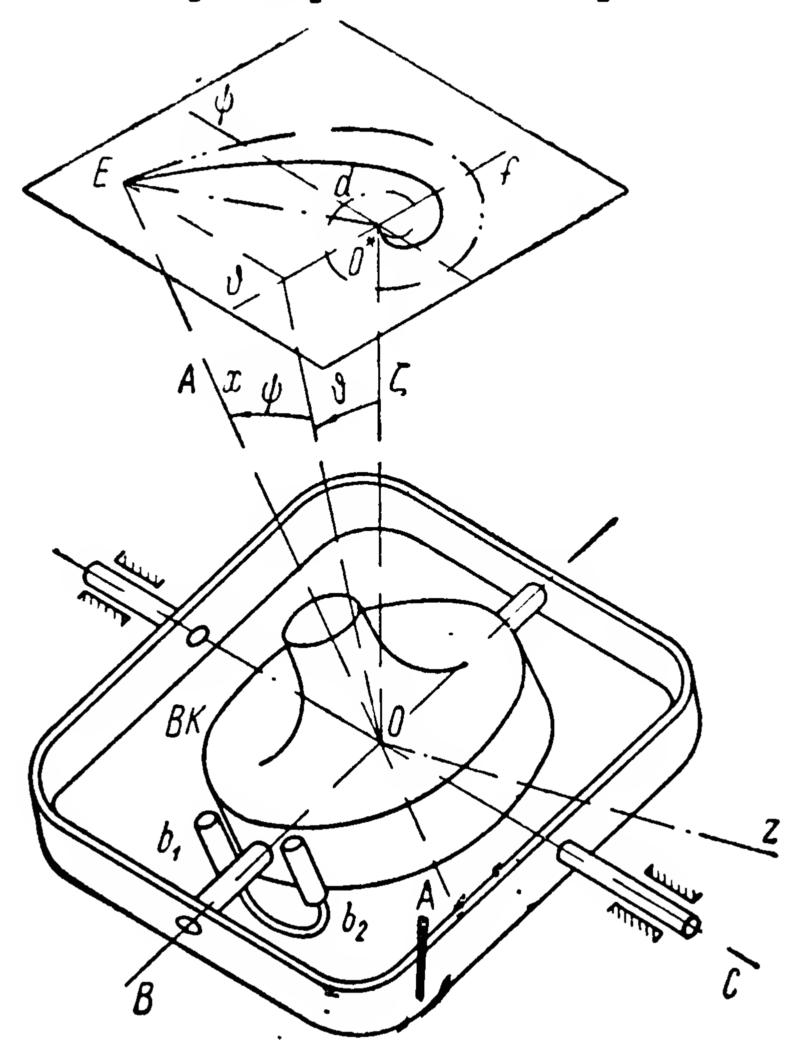


Рис. 158. Маятниковая гировертикаль с гидравлическим успокоителем.

практически не представляется возможным. При качке или маневрах объекта силы трения будут не столько гасить собственные, сколько возбуждать вынужденные колебания гироскопа. Поэтому на практике, как и говорилось выше (§ 34), стремятся уменьшить силы трения в опорах подвеса до возможного минимума, а для демпфирования собственных колебаний гироскопа используют специальные, в частности гидравлические, успокоители.

Представим маятниковую гировертикаль (рис. 158), на гирокамере *ВК* которой установлены два сообщающихся между собой сосуда b_1 и b_2, соединенные тонкой трубкой. Сосуды смонтированы на гирокамере *ВК* симметрично оси подвеса *OB* и заполнены до определенного уровня жидкостью. Вес сообщающихся сосудов с жидкостью при вертикальном положении главной оси *OA* гироскопа уравновешивается соответствующим грузом.

До тех пор, пока главная ось *OA* вертикальна, в каждом сосуде находятся одинаковые объемы жидкости. [1] Следовательно, сила веса жидкости, заключенной в сообщающихся сосудах, лежит

[1] Рассматривается движение объекта с постоянной скоростью.

в этом случае в плоскости $BO\zeta$ и не вызывает относительно оси OB моментов. При отклонении главной оси OA от вертикали $O\zeta$ одновременно с гироскопом совершат поворот вокруг оси подвеса и сообщающиеся сосуды. Один из них поднимается над плоскостью горизонта, второй опустится (рис. 159). Вследствие малого диаметра соединительной трубки жидкость, обладающая определенной вязкостью, не сможет мгновенно переместиться из одного сосуда в другой. Для такого перемещения потребуется некоторое время, причем скорость перетекания жидкости будет зависеть от разности уровней h, коэффициента λ, определяемого длиной и диаметром соединительной трубки, и вязкости жидкости [17, стр. 208]:

$$v = \lambda h.$$

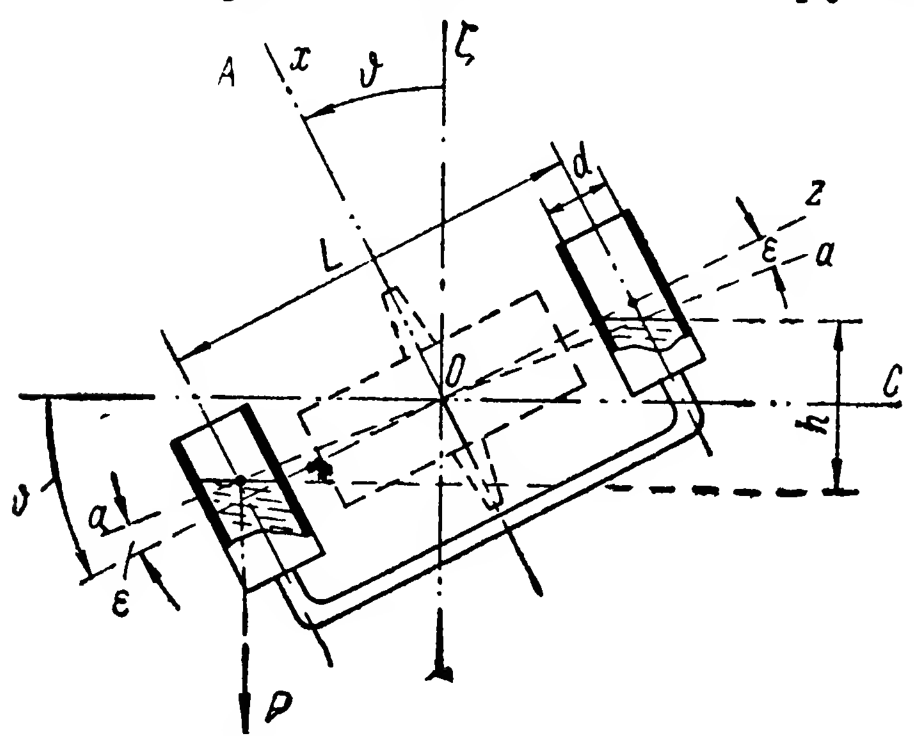


Рис. 159. Гидравлический успокоитель.

В результате перетекания в нижнем сосуде появится избыточный объем жидкости, сила веса которого будет создавать момент относительно соответствующей оси подвеса гироскопа. Чтобы выяснить влияние указанного момента на характер движения маятниковой гировертикали, представим, что она повернулась вокруг внутренней оси подвеса OB на угол ϑ (рис. 159). Из-за увеличения объема жидкости в нижнем сосуде линия aa, соединяющая центры площадей поверхности жидкости в сообщающихся сосудах, составит с осью Oz ротора гироскопа угол ε. Таким образом, разность уровней h при расстоянии L между центрами сообщающихся сосудов определится зависимостью

$$h = L \sin(\vartheta - \varepsilon),$$

согласно которой выражение для скорости v перетекания жидкости из одного сосуда в другой, учитывая малость углов ϑ и ε, примет вид

$$v = \lambda L (\vartheta - \varepsilon). \qquad (488)$$

Угол ε не остается неизменным. Перетекание жидкости обусловит его постепенное увеличение, причем угловая скорость $\dot{\varepsilon}$ изменения угла ε будет связана со скоростью жидкости следующим равенством (см. рис. 159):

$$0{,}5L\dot{\varepsilon} = v.$$

Подставив эту зависимость в выражение (488), получим дифференциальное уравнение

$$\dot{\varepsilon} = 2\lambda (\vartheta - \varepsilon), \qquad (489)$$

описывающее изменение во времени угла ε.

Появляющийся в нижнем сосуде избыточный объем жидкости Q, определяемый внутренним диаметром d сосуда и углом ε:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} l \sin \varepsilon,$$

обусловит воздействие на гироскоп силы P, зависящей от удельного веса γ жидкости:

$$P = \gamma Q = \gamma \frac{\pi d^2}{4} l \sin \varepsilon.$$

Сила P веса избыточного объема жидкости в нижнем сосуде создаст относительно оси OB момент

$$M_B = P \cdot 0{,}5 l \cos \vartheta = \gamma \frac{\pi d^2}{8} l^2 \sin \varepsilon \cos \vartheta,$$

который будет действовать на гироскоп в положительном направлении.

Объединив в полученном выражении постоянные величины общим коэффициентом $K = \gamma \frac{\pi d^2}{8} l^2$, можем величину момента M_B выразить зависимостью $M_B = K \sin \varepsilon \cos \vartheta$.

Подставив найденное значение момента M_B в систему уравнений (471) и опустив в них нутационные члены и члены, характеризующие положение динамического равновесия, для малых углов ϑ и ε найдем

$$J\Omega\dot{\psi} + Gl\vartheta = K\varepsilon;$$
$$J\Omega\dot{\vartheta} - Gl\psi = 0.$$

Полученная система двух уравнений содержит три переменные: ϑ, ψ и ε; дополним ее третьим уравнением (489), описывающим изменение угла ε; в результате исходная система уравнений примет вид

$$\left.\begin{aligned} J\Omega\dot{\psi} + Gl\vartheta - K\varepsilon &= 0; \\ J\Omega\dot{\vartheta} - Gl\psi &= 0; \\ \dot{\varepsilon} + 2\lambda\varepsilon - 2\lambda\vartheta &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (490)$$

Определим из первого уравнения системы (490) величину ε и подставим значения ε и $\dot{\varepsilon}$ в третье уравнение исследуемой системы:

$$\left.\begin{aligned} J\Omega\dot{\vartheta} - Gl\psi &= 0; \\ J\Omega\ddot{\psi} + Gl\dot{\vartheta} + 2\lambda J\Omega\dot{\psi} + 2\lambda(Gl - K)\vartheta &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (491)$$

Разрешив систему (491) относительно переменной ϑ, придем к дифференциальному уравнению

$$\dddot{\vartheta} + 2\lambda\ddot{\vartheta} + \left(\frac{Gl}{J\Omega}\right)^2 \dot{\vartheta} + \frac{2\lambda Gl\,(Gl - K)}{J^2\Omega^2}\vartheta = 0. \qquad (492)$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$p^3 + 2\lambda p^2 + \left(\frac{Gl}{J\Omega}\right)^2 p + \frac{2\lambda Gl\,(Gl - K)}{J^2\Omega^2}\vartheta = 0. \qquad (493)$$

Произведя в нем подстановку

$$p = q - \frac{2\lambda}{3}, \qquad (494)$$

приведем уравнение (493) к виду

$$q^3 + a^*q + b^* = 0, \qquad (495)$$

где

$$a^* = -\frac{4\lambda^2}{3} + \left(\frac{Gl}{J\Omega}\right)^2;$$

$$b^* = \frac{4\lambda^3}{27} - \frac{2\lambda}{3}\left(\frac{Gl}{J\Omega}\right)^2 + \frac{2\lambda Gl\,(Gl - K)}{J^2\Omega^2}.$$

Коэффициенты уравнения (495) положительны, поэтому они будут удовлетворять условию

$$\left(\frac{b^*}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^*}{3}\right)^3 > 0$$

и, следовательно, уравнение (495) будет иметь один вещественный и два комплексных сопряженных корня: [1]

$$q_1 = -m; \quad q_{2,3} = \frac{m}{2} \pm in.$$

Корни характеристического уравнения (493) с учетом (494) равны

$$p_1 = -m - \frac{2\lambda}{3} = -a;$$

$$p_{2,3} = \frac{m}{2} - \frac{2\lambda}{3} \pm in = -b \pm in.$$

Таким образом, согласно изложенному в § 13, решение уравнения (492) может быть записано в виде

$$\vartheta = e^{-bt}(C_1\cos nt + C_2\sin nt) + C_3e^{-at}. \qquad (496)$$

---

[1] См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Т. I, Гостехиздат, 1948, стр. 442.

Продифференцировав выражение для ϑ и подставив величину $\dot{\vartheta}$ в первое уравнение системы (491), найдем

$$\psi = \frac{J\Omega}{Gl} e^{-bt} [-(nC_1 + bC_2) \sin nt + (nC_2 - bC_1) \cos nt] - \\ - \frac{J\Omega a}{Gl} C_3 e^{-at}. \quad (497)$$

Из анализа выражений (496) и (497) следует, что при отклонении главной оси от вертикального положения маятниковая гировертикаль, снабженная успокоителем, начинает совершать затухающие колебания около положения равновесия. В процессе рассматриваемого движения проекции полюса гироскоп совершит на картинной плоскости сложное перемещение, состоящее из двух элементарных. Одно из них, описываемое третьими членами выражений (496) и (497), есть движение проекции полюса по кратчайшему расстоянию EO^* (рис. 158) из отклоненного положения к совмещению с точкой O^*. Другое, описываемое первыми двумя членами рассматриваемых выражений, является движением проекции полюса по спирали. В результате сложения этих элементарных перемещений проекция полюса гироскопа придет к совмещению с точкой O^*, совершив путь по некоторой кривой, лежащей между прямой EO^* и спиралью $EfdO^*$. Как видим, установка на маятниковой вертикали гидравлического успокоителя, создающего момент относительно одной из осей подвеса, обеспечивает демпфирование ее колебаний около положения динамического равновесия.

§ 76. ГИРОГОРИЗОНТЫ

Как было показано выше (§ 74), условие (483) невозмущаемости маятниковой гировертикали выполнимо лишь в приборах, имеющих большие габариты. Между тем, для управления движением летательных аппаратов, морских катеров и подобных им объектов необходимы высокопрецизионные гироскопические вертикали малых габаритов. Это требование было удовлетворено лишь в результате создания особого типа приборов, получивших название гироскопических горизонтов, или сокращенно гирогоризонтов.

В гирогоризонтах (рис. 160) в отличие от маятниковых гировертикалей (см. рис. 155) центр тяжести системы совмещается с точкой ее подвеса. Такой гироскоп, как известно (см. гл. IV), не реагирует на ускорения объекта, но зато систематически отклоняется от направления вертикали $O\zeta$, так как не обладает избирательностью. Чтобы предотвратить указанное отклонение, в гирогоризонтах применяются корректирующие устройства, аналогичные описанным в § 45, 50 и 57.

Для измерения углов ϑ и ψ отклонения главной оси OA гироскопа от вертикали $O\zeta$ на гирокамере, или внутреннем кардановом кольце BK, устанавливается блок L, внутри которого размещаются два маятника с потенциометрическими датчиками. При отклонении главной оси OA от вертикали $O\zeta$ один из маятников измеряет угол ψ поворота гироскопа вокруг его наружной оси подвеса OC, второй — угол ϑ поворота вокруг внутренней оси OB.

Сигналы, снимаемые с потенциометров маятников, подаются на датчики моментов $ДМ_B$ и $ДМ_C$, которые и создают действующие на гироскоп относительно осей подвеса OB и OC корректирующие моменты $M_{кB}$ и $M_{кC}$. Сигнал, снимаемый с потенциометра маятника, измеряющего величину угла ψ, подается на датчик моментов $ДМ_B$. Сигнал, снимаемый с потенциометра второго маятника, измеряющего величину угла ϑ, подается на датчик моментов $ДМ_C$.

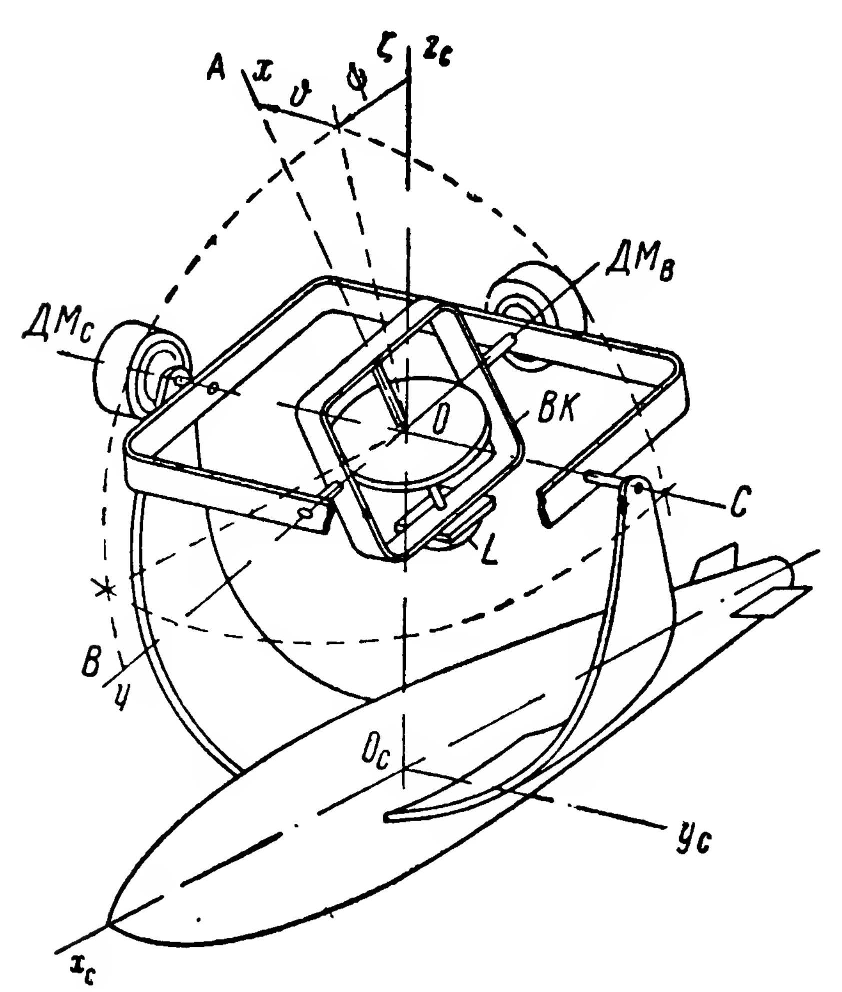


Рис. 160. Принципиальная схема гирогоризонта.

Будем полагать, что величины корректирующих моментов $M_{кB}$ и $M_{кC}$, создаваемых датчиками моментов $ДМ_B$ и $ДМ_C$, пропорциональны соответственно углам ψ и ϑ. Направления их действия выбираются таким образом, чтобы под влиянием корректирующих моментов ось OA гироскопа совмещалась с вертикалью $O\zeta$. Из схемы (рис. 160) видно, что это условие соблюдается, если корректирующие моменты при положительных значениях углов ϑ и ψ отклонения гироскопа будут равны

$$M_{кB} = -K_B\psi; \quad M_{кC} = K_C\vartheta. \tag{498}$$

Для выяснения характера движения гирогоризонта подставим значения корректирующих моментов из (498) в систему (162). Учитывая, что в рассматриваемом случае угол $\vartheta_0 = 0$, можем записать

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega(\dot{\psi} + \omega_C + \omega_D\vartheta) &= -K_B\psi, \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega(\dot{\vartheta} + \omega_B) &= K_C\vartheta \end{aligned}\right\} \tag{499}$$

или, подставив значения угловых скоростей ω_B, ω_C и ω_D из (469) и заменив для общности, согласно (1), $R_з$ на R, получим

$$J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\Big[\dot{\psi} - \Omega_з\cos\varphi\sin\alpha + \frac{V}{R} + \Omega_з\psi\vartheta\cos\varphi\cos\alpha +$$

$$+\left(\Omega_з \sin\varphi - \frac{V}{R}\sin\alpha \operatorname{tg}\varphi\right)\vartheta\Big] = -K_B\psi;$$

$$J_C\ddot{\psi} - J\Omega\left[\dot{\vartheta} + \Omega_з\cos\varphi\cos\alpha - \left(\Omega_з \sin\varphi - \frac{V}{R}\sin\alpha \operatorname{tg}\varphi\right)\psi\right] = K_C\vartheta.$$

Опуская из рассмотрения нутационные члены и величины высших порядков малости, перепишем полученные уравнения в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi} + \frac{K_B}{J\Omega}\psi &= \Omega_з\cos\varphi\sin\alpha - \frac{V}{R}; \\ \dot{\vartheta} + \frac{K_C}{J\Omega}\vartheta &= -\Omega_з\cos\varphi\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (500)$$

Система уравнений (500) имеет частные решения:

$$\left.\begin{aligned} \psi_r &= \frac{J\Omega}{K_B}\left(\Omega_з\cos\varphi\sin\alpha - \frac{V}{R}\right); \\ \vartheta_r &= -\frac{J\Omega}{K_C}\Omega_з\cos\varphi\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (501)$$

Решения соответствующих однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi} + \frac{K_B}{J\Omega}\psi = 0, \quad \dot{\vartheta} + \frac{K_C}{J\Omega}\vartheta = 0$$

определяются по выражениям (286).

Таким образом, общее решение системы уравнений (500) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \psi &= C_1 e^{-\frac{K_B}{J\Omega}t} + \frac{J\Omega}{K_B}\left(\Omega_з\cos\varphi\sin\alpha - \frac{V}{R}\right); \\ \vartheta &= C_2 e^{-\frac{K_C}{J\Omega}t} - \frac{J\Omega}{K_C}\Omega_з\cos\varphi\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (502)$$

Проанализировав выражения (502), нетрудно установить различие в характере движения гирогоризонта и маятниковой гировертикали. Как было показано выше, маятниковая вертикаль при наличии успокоителя движется к положению динамического равновесия так, что проекция полюса гироскопа описывает на картинной плоскости спираль (см. рис. 158). При движении к положению равновесия гирогоризонта проекция его полюса перемещается на картинной плоскости более коротким путем, описывая одну из траекторий, показанных на рис. 103.

Положение динамического равновесия гирогоризонта будет также отличным от положения динамического равновесия маятниковой гировертикали. Действительно, положение на картинной

плоскости точки N (рис. 161), через которую проходит ось динамического равновесия гироскопического горизонта, характеризуется углами ϑ_r и ψ_r, определяемыми по (501). В соответствии с этим угол ν характеризуется отношением

$$\operatorname{tg}\nu = \frac{\vartheta_r}{\psi_r} = \frac{K_B}{K_C}\cdot\frac{\Omega_з\cos\varphi\cos\alpha}{\Omega_з\cos\varphi\sin\alpha - \frac{V}{R}}.$$

В случае неподвижного объекта при $V = 0$ и $K_B = K_C$

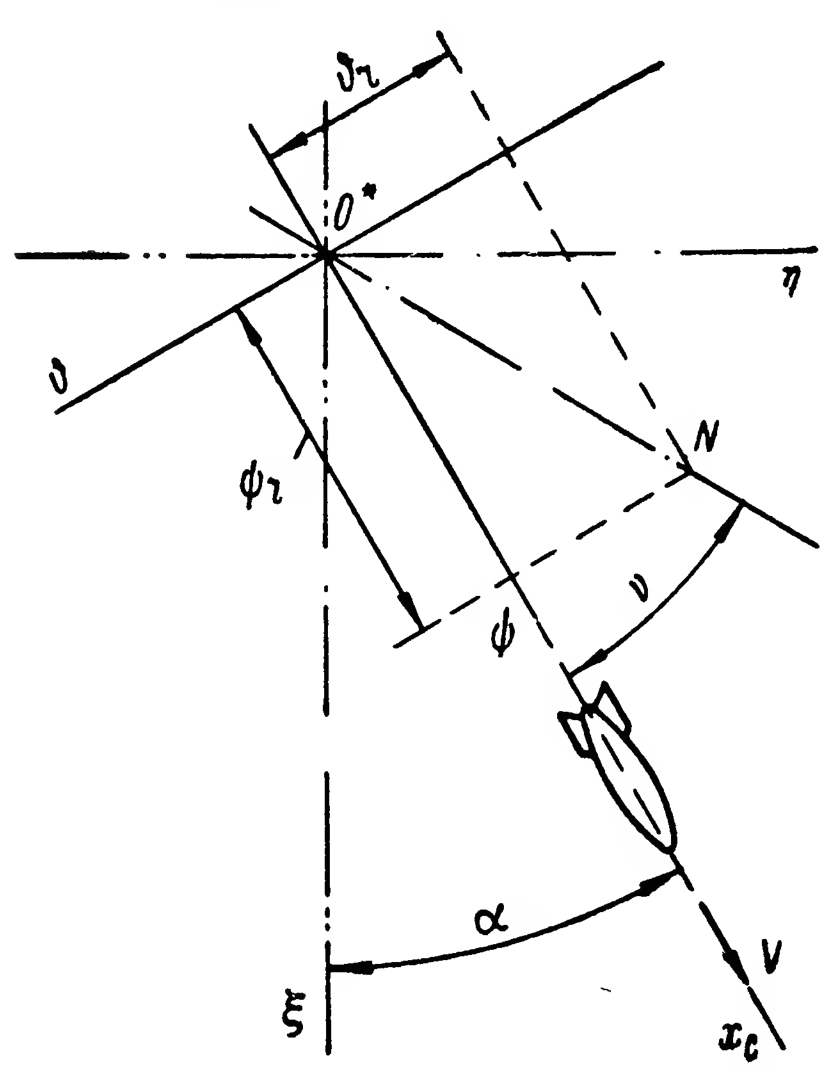


Рис. 161. К определению девиации гирогоризонта.

$$\operatorname{tg}\nu = \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

следовательно,

$$\nu = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Как видим, при неподвижном положении точки подвеса гирогоризонта на земной поверхности и при равенстве коэффициентов K_B и K_C положение оси его динамического равновесия совмещено с азимутальной плоскостью, перпендикулярной плоскости географического меридиана. Движение объекта, как это следует из первого выражения (501), отклоняет ось динамического равновесия в сторону отрицательных значений оси $O^*\psi$, противоположную направлению движения объекта.

П р и м е р 33. Определить девиацию гирогоризонта, установленного на летательном аппарате, если высота полета $h = 9000$ *м*, скорость $V = 800$ *км/ч*, курс $\alpha = 20°$, широта $\varphi = 40°$. Параметры гироскопа: $J\Omega = 2300$ *Гсмсек*, $K_B = K_C = 450$ *Гсм/рад*.

Учитывая значение радиуса Земли $R_з = 6371$ *км*, вычислим угловую скорость:

$$\frac{V}{R} = \frac{V}{R_з + h} = \frac{800}{6371 + 9} = 0{,}125 \text{ рад./час.} = 3{,}47\cdot10^{-5} \text{ сек.}^{-1}.$$

Из выражений (501) и (168) находим:

$$\psi_r = \frac{J\Omega}{K_B}\left(\Omega_з\cos\varphi\sin\alpha - \frac{V}{R}\right) =$$

$$= \frac{2300}{450}(7{,}29\cdot10^{-5}\cos 40°\sin 20° - 3{,}47\cdot10^{-5}) =$$

$$= -7{,}46\cdot10^{-5} \text{ рад.} = -0{,}25 \text{ угл. мин.};$$

$$\vartheta_r = -\frac{J\Omega}{K_C}\Omega_з \cos\varphi \cos\alpha = -\frac{2300}{450} 7{,}29\cdot 10^{-5} \cos 40^\circ \cos 20^\circ =$$

$$= -26{,}7\cdot 10^{-5} \text{ рад.} = -0{,}92 \text{ угл. мин.}$$

Следовательно, суммарная девиация

$$\delta = \sqrt{\vartheta_r^2 + \psi_r^2} = \sqrt{0{,}92^2 + 0{,}25^2} = 0{,}95 \text{ угл. мин.}$$

§ 77. ОСНОВНЫЕ РАЗНОВИДНОСТИ ПРИНЦИПИАЛЬНЫХ СХЕМ КОРРЕКЦИИ ГИРОГОРИЗОНТОВ

Практическое осуществление корректирующих устройств гирогоризонтов весьма разнообразно. Насчитывается большое количество вариантов принципиального и конструктивного решения вопроса. На рис. 162 представлен один из вариантов системы коррекции гирогоризонта.

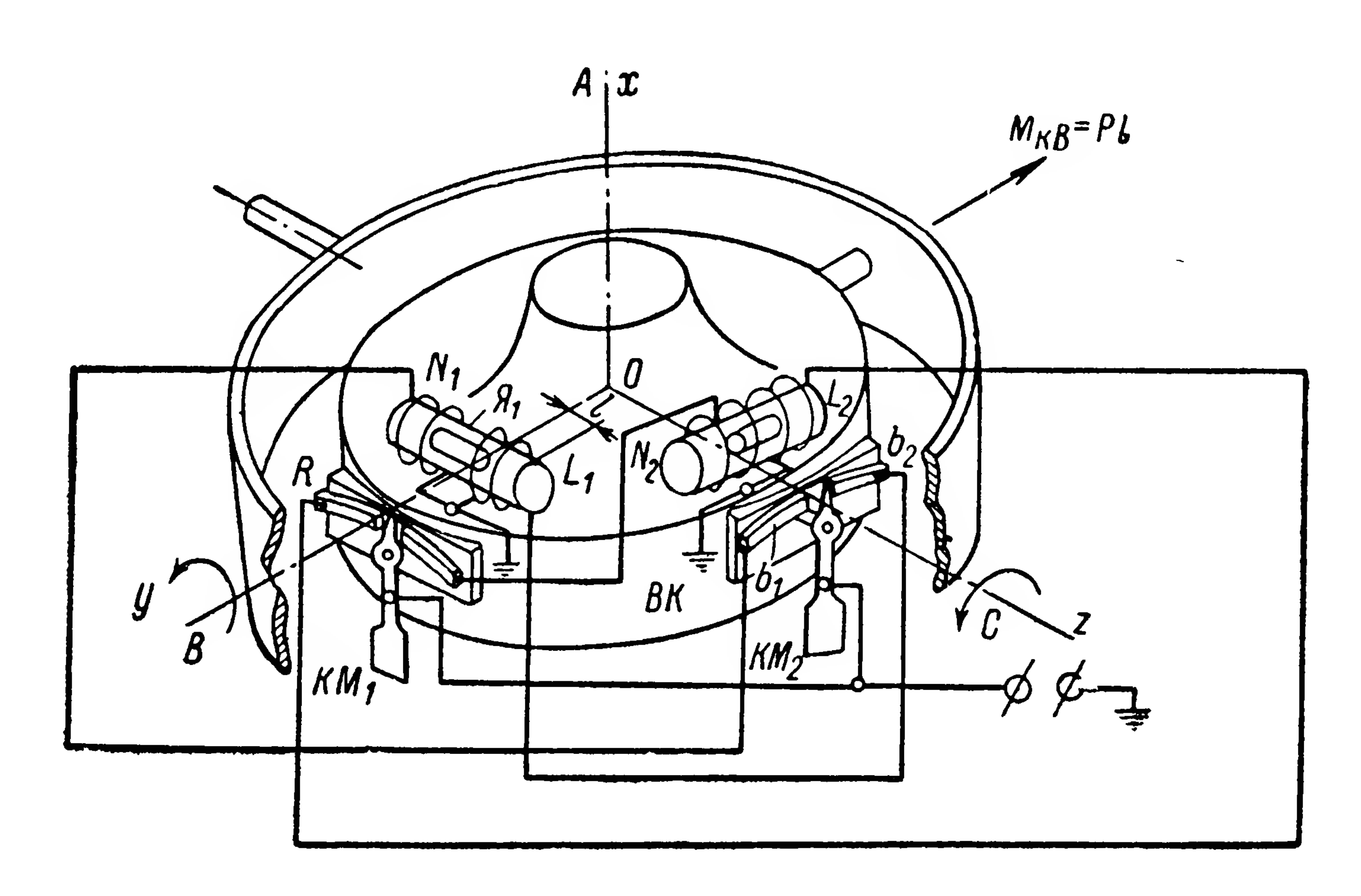


Рис. 162. Гирогоризонт с коррекцией перемещающимися грузиками.

На гирокамере *ВК* такого прибора установлены два цилиндра из антимагнитного материала, продольные оси которых взаимно перпендикулярны и параллельны осям *OB* и *OC* подвеса гироскопа. С обоих концов цилиндров располагаются катушки соленоидов *N* и *L*, включаемые в сеть электрического тока посредством корректирующих маятников $КМ_1$ и $КМ_2$, оси подвесов которых параллельны осям *Oy* и *Oz* гирокамеры. Предположим, что в результате поворота вокруг оси *OC* гироскоп наклонился относительно плоскости горизонта. В этом случае маятник $КМ_2$, сохраняя отвесное положение, замкнет ламель b_2, расположенную вместе с ламелью b_1 на изолированном основании *R*, установленном на гирокамере *ВК*.

Замыкая контактную ламель b_2, маятник KM_2 включит ток в катушку L_1 соленоида, расположенного перпендикулярно оси Oy гироскопа. Возникшее электромагнитное поле соленоида воздействует на помещенный внутри цилиндра якорь $Я_1$, в результате чего он переместится вдоль оси Oz. Вес P якоря $Я_1$ создаст на плече l внешний момент $M_{кB} = Pl$, действующий относительно оси Oy. Момент $M_{кB}$ вызовет прецессионное движение гироскопа вокруг оси OC, в результате которого его главная ось OA будет двигаться к вертикали. По аналогичной схеме будет работать и второй соленоид, якорь которого перемещается внутри цилиндра при наклонах гироскопа вокруг оси OB. При совместной работе обоих датчиков моментов главная ось гироскопа удерживается в вертикальном положении. Как видим, для создания моментов $M_{кB}$ и $M_{кC}$ в описываемой схеме коррекции используется вес якорей соленоидов N и L, поэтому она и получила название коррекции перемещающимися грузиками.

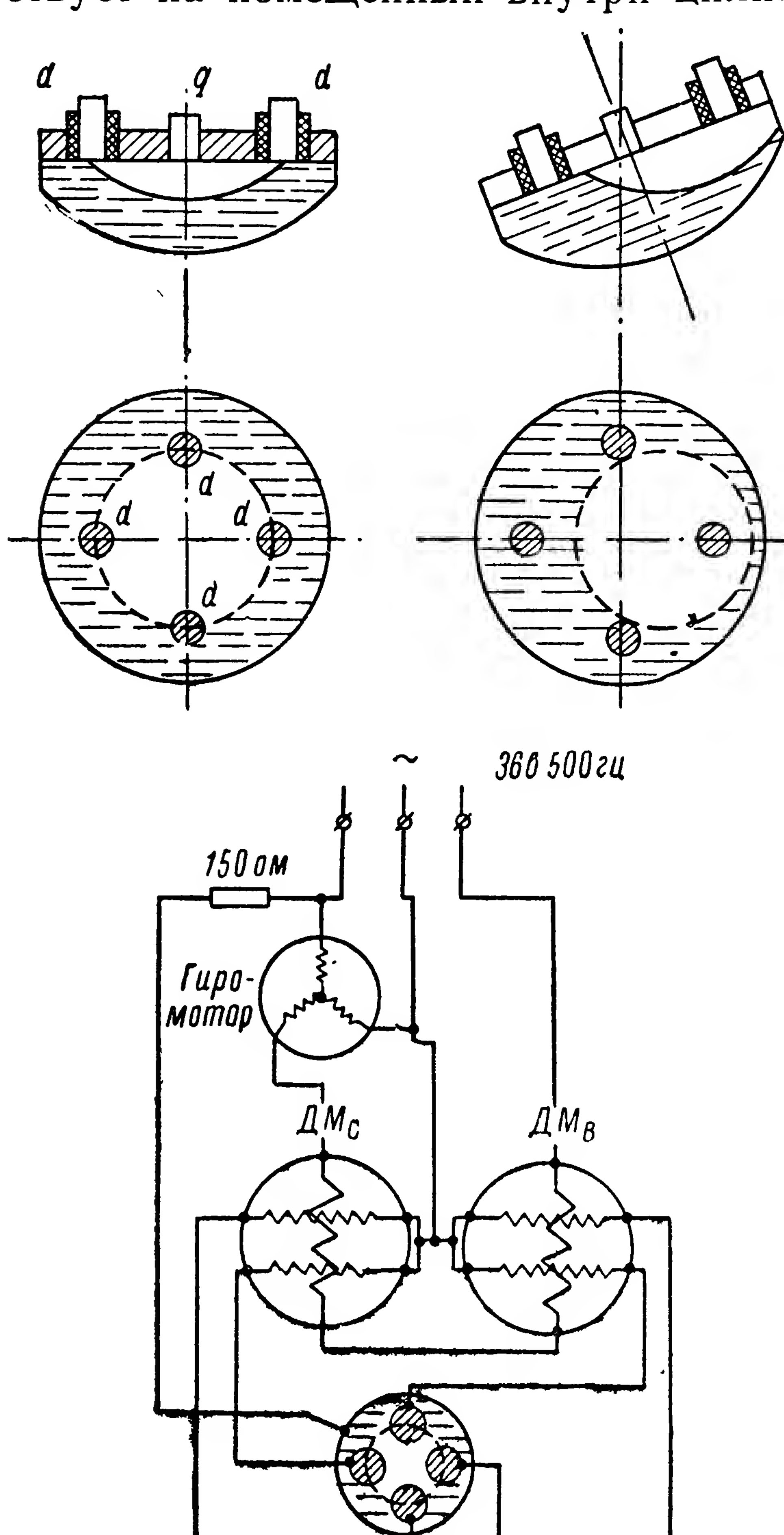


Рис. 163. Пространственный электролитический маятник.

В современных гирогоризонтах вместо двух физических маятников KM_1 и KM_2 на гирокамере или внутреннем кардановом кольце BK устанавливают общий блок L (см. рис. 160), представляющий собой пространственный электролитический маятник.

Он состоит из изоляционной платы, на которой по окружности, на равном расстоянии друг от друга, смонтированы четыре контакта d (рис. 163). Эти контакты размещаются на гирокамере BK попарно по двум взаимно перпендикулярным осям Oy и Oz.

Контакты d закрыты медным выпуклым кожухом. Пространство между кожухом и платой почти полностью, за исключением малого пузырька воздуха, заполнено электропроводящей жидкостью с относительно высоким удельным сопротивлением. Контакты d маятника соединены с обмотками датчиков моментов $ДМ_В$ и $ДМ_С$, а кожух является пятым электродом с выводом через центральный контакт q.

Если корпус маятника занимает горизонтальное положение, что соответствует совмещению главной оси гироскопа с вертикалью места, пузырек воздуха устанавливается в центре между

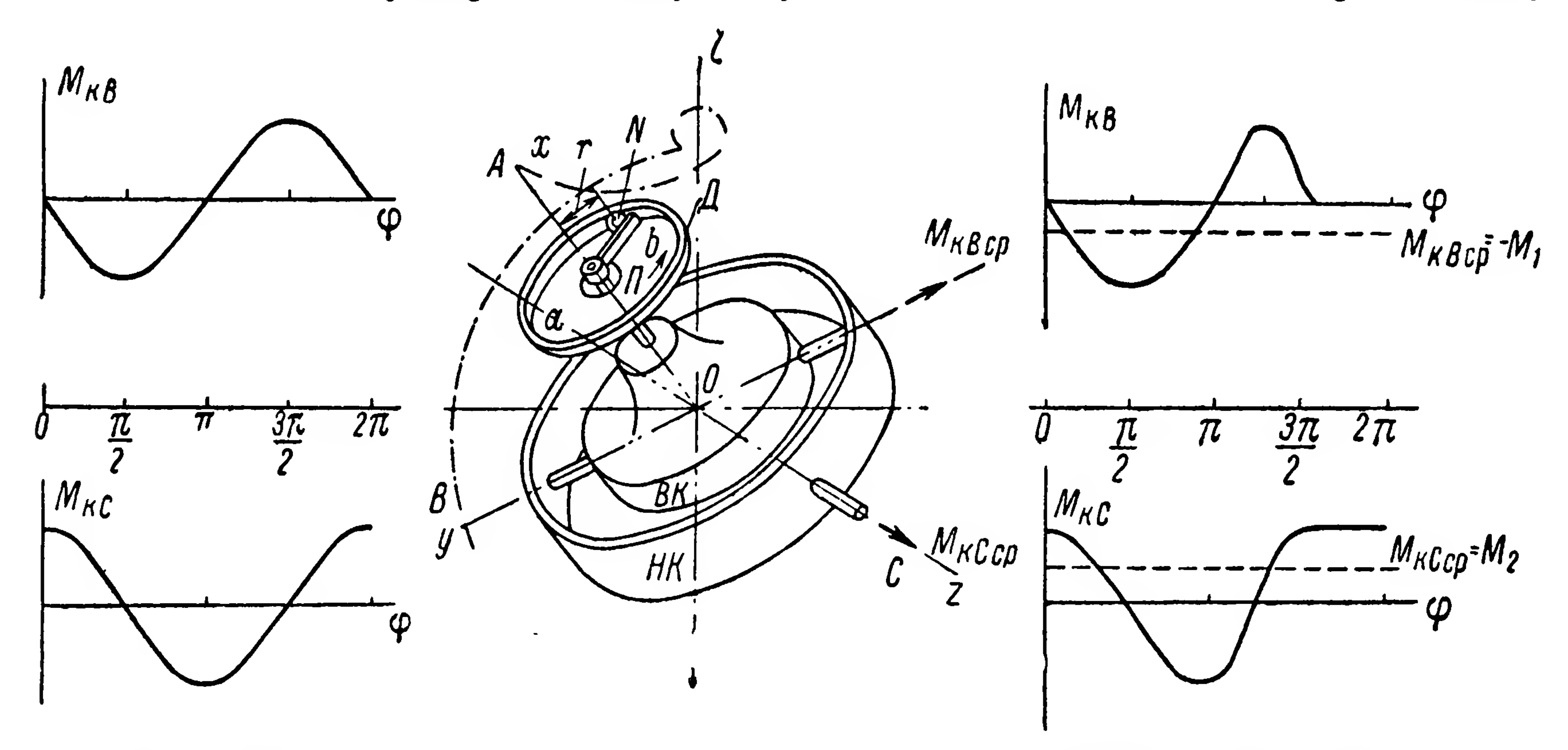


Рис. 164. Гирогоризонт с шариковой коррекцией и графики изменения корректирующих моментов.

контактами d. В этом случае последовательно с обмотками датчиков моментов вводятся одинаковые жидкостные сопротивления. По обеим секциям этих обмоток проходят равные токи. Их действие взаимно уничтожается, и величина корректирующего момента становится равной нулю.

При отклонении главной оси гироскопа от вертикали пузырек воздуха смещается относительно центрального положения и равенство сопротивлений в цепях обмоток нарушается. В результате ток в одной из секций обмоток датчиков моментов возрастает, благодаря чему на гироскоп начинают действовать корректирующие моменты требуемого направления.

Оригинальным является и другой вариант корректирующего устройства с так называемой шариковой коррекцией. Представим себе гироскоп, на гирокамере $ВК$ которого закреплен диск $Д$ (рис. 164). Вращающийся внутри гирокамеры ротор с помощью понижающей фрикционной передачи приводит во вращение вокруг главной оси $ОА$ гироскопа поводок $П$, который двигает перед собой по периферии диска корректирующий шарик N.

Вес P шарика N, действуя на гироскоп на расстоянии r от оси $ОА$, создает внешний момент $М_к$, вектор которого также вращается

вокруг оси OA со скоростью вращения шарика N. При горизонтальном положении диска $Д$, что имеет место при совмещении главной оси OA гироскопа с вертикалью $O\zeta$, шарик, перемещаясь по орбите диска с постоянной скоростью, будет создавать внешние моменты, переменные относительно обеих осей подвеса. Однако, как в этом нетрудно убедиться, суммарное значение моментов $M_{кB}$ и $M_{кC}$ за один оборот поводка $П$ будет равно нулю.

Проследим за изменениями корректирующих моментов $M_{кB}$ и $M_{кC}$ в процессе одного оборота поводка $П$. Условимся рассматривать его движение начиная с положения a, совмещенного с плоскостью yOx. Нанеся изменения $M_{кB}$ и $M_{кC}$ на график, убеждаемся, что они подчинены гармоническим законам. Следовательно, средние значения рассматриваемых моментов за один поворот поводка $П$ будут равны нулю. Таким образом, главная ось гироскопа, прецессирующего в результате действия момента $M_к$, создаваемого силой веса шарика N, будет описывать вокруг вертикали $O\zeta$ конус, угол при вершине которого весьма мал.

Если же в силу тех или иных причин главная ось OA отклонится от вертикали $O\zeta$, то суммарные значения корректирующих моментов, создаваемых весом шарика N, будут отличными от нуля. Предположим, что главная ось OA отклонилась от вертикали $O\zeta$ в результате поворота гироскопа, а вместе с ним и диска $Д$ вокруг наружной оси подвеса OC. При таком наклоне диска $Д$ шарик N будет перемещаться по его периферии на участке между точками a и b с прежней скоростью. Но как только поводок $П$ переведет шарик N за точку b, последний под влиянием собственного веса оторвется от поводка $П$ и достигнет точки a диска $Д$ быстрее, чем с ней совместится сам поводок. Таким образом, за время одного поворота поводка $П$ вокруг оси OA шарик N будет находиться на диске $Д$ по одну сторону его диаметра ab более продолжительное время, чем по другую сторону.

Естественно, что при таком перемещении шарика N средние значения моментов $M_{кB}$ и $M_{кC}$ будут определяться некоторыми, отличными от нуля, величинами

$$M_{кB\,ср} = -M_1; \quad M_{кC\,ср} = M_2.$$

Именно под влиянием этих моментов у гироскопа и возникает прецессионное движение, в результате которого его главная ось OA будет двигаться к вертикали $O\zeta$. Необходимо подчеркнуть, что характер восстанавливающего движения в описанном приборе будет близок к движению маятниковой гировертикали с успокоителем.

Своеобразная принципиальная схема корректирующего устройства применена в авиационном гирогоризонте, устройство которого показано на рис. 165. На продолжении главной оси OA гироскопа расположены два ролика R, приводимые во вращение вокруг оси OA ротором гироскопа через понижающий шестеренчатый

редуктор N. Ролики R, вращающиеся вокруг оси OA в одном направлении с ротором гироскопа, помещены в прорезях двух полуколец L_B и L_C, обладающих свободой вращения соответственно вокруг осей Ox_C и OC.

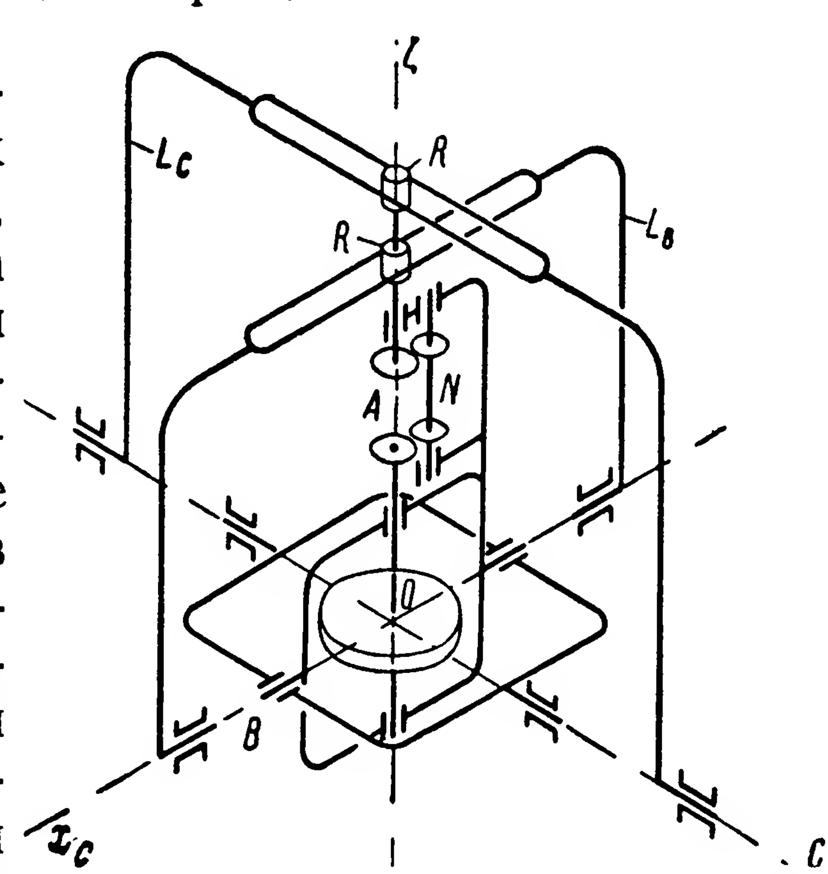


Рис. 165. Гирогоризонт с коррекцией маятниковыми полукольцами.

Центры тяжести каждого полукольца L_B и L_C лежат выше их осей подвеса, однако до тех пор, пока главная ось OA гироскопа совмещена с вертикалью $O\zeta$, силы веса полуколец поглощаются реакцией их опор и на гироскоп влияния не оказывают. В этом случае ролики R свободно вращаются в прорезях полуколец L_B и L_C, находящихся в вертикальном положении. При отклонении главной оси OA от вертикали $O\zeta$ полукольца L_B и L_C наклонятся к плоскости горизонта, в связи с чем силы их веса создадут моменты, действующие на гироскоп.

Предположим, что главная ось OA отклонилась от вертикали $O\zeta$ в результате поворота гироскопа в отрицательном направлении вокруг внутренней оси подвеса на угол ϑ (рис. 166). На такой же

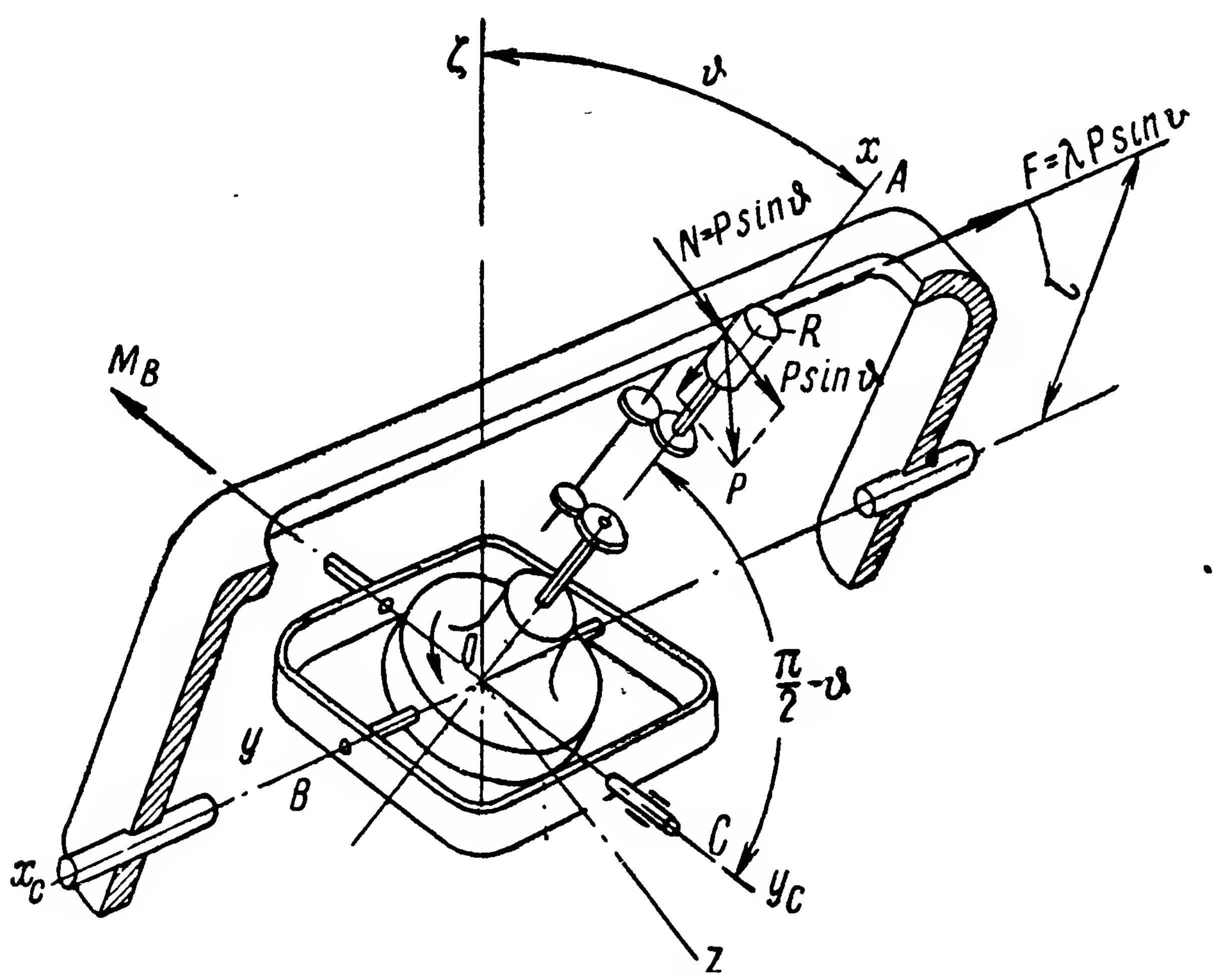


Рис. 166. Схема коррекции гирогоризонта силами трения.

угол отклонится от вертикальной плоскости $x_c O\zeta$ и полукольцо L_B, сила P веса которого теперь уже не будет проходить через точку O подвеса гироскопа. Составляющая $N = P\sin\vartheta$ веса P полукольца начнет действовать на вращающийся ролик R, в результате чего

между соприкасающимися поверхностями ролика и полукольца возникнут силы трения. Нетрудно заметить, что величина силы трения F, которая действует на гироскоп параллельно оси OB его подвеса в направлении ее отрицательных значений, зависит от угла ϑ наклона гироскопа и равна

$$F = \lambda P \sin \vartheta,$$

где λ — коэффициент сил трения между соприкасающимися поверхностями полукольца L_B и ролика R.

Сила трения F, действуя на гироскоп на плече $l \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)$, создаст относительно оси OB внешний момент

$$M_B = \lambda P l \sin \vartheta \cos \vartheta.$$

При этом направление вектора момента $\overline{M}_B$ будет совпадать с отрицательным направлением оси OC. Под действием момента M_B возникнет прецессионное движение гироскопа вокруг оси OB с угловой скоростью

$$\dot{\vartheta} = \frac{\lambda P l \sin \vartheta \cos \vartheta}{J\Omega},$$

равной при малом угле ϑ

$$\dot{\vartheta} = \frac{\lambda P l}{J\Omega} \vartheta.$$

В результате такого движения главная ось OA гироскопа начнет возвращаться к вертикали $O\zeta$, и в тот момент, когда угол ϑ станет равным нулю, прецессия прекратится. При наклоне гироскопа относительно оси OC его прецессионное движение будет вызываться силами трения, возникающими между поверхностями ролика R и полукольца L_C (см. рис. 165). Одновременное взаимодействие между роликами R и полукольцами L_B, L_C обеспечивает совмещение главной оси описанного гирогоризонта с вертикалью.

Укажем еще на один вариант корректирующего устройства гирогоризонта. Представим, что электродвигатель *ЭД* подвешен с помощью кардановых колец в корпусе прибора так, что его центр тяжести *ЦТ* находится ниже точки O_D подвеса (рис. 167). Поэтому ось $O_D A_D$ ротора двигателя *ЭД* будет перемещаться вокруг точки подвеса O_D аналогично рассмотренному выше (§ 73) движению маятниковой гировертикали. Тем самым вал электродвигателя *ЭД* будет с определенной точностью сохранять вертикальное положение. Вал двигателя *ЭД* заканчивается шаровой опорой O, на которой монтируется ротор P гироскопа, аналогично тому, как это было описано в § 9.

С помощью шайбы F, на которую действуют упругие силы диафрагмы D, создают необходимое давление между соприкасаю-

щимися поверхностями шаровой опоры O и ротора P. Вследствие сил трения, возникающих между этими поверхностями, вращение вала двигателя *ЭД* вокруг оси O_DA_D передается ротору P. При совмещении осей OA и O_DA_D крутящий момент M_D, развиваемый двигателем *ЭД*, полностью расходуется на сообщение ротору кинетического момента $J\Omega$. В случае возникновения между указанными осями угла ϑ на поддержание вращения ротора вокруг оси OA будет затрачиваться лишь составляющая $M_D \cos \vartheta$ крутящего момента M_D двигателя. Вторая составляющая $M_D \sin \vartheta$, вектор которой направлен перпендикулярно $\overline{J\Omega}$, вызовет прецессию ротора P, приводящую его ось OA к совмещению с осью O_DA_D двигателя *ЭД*, выдерживающей вертикальное положение.

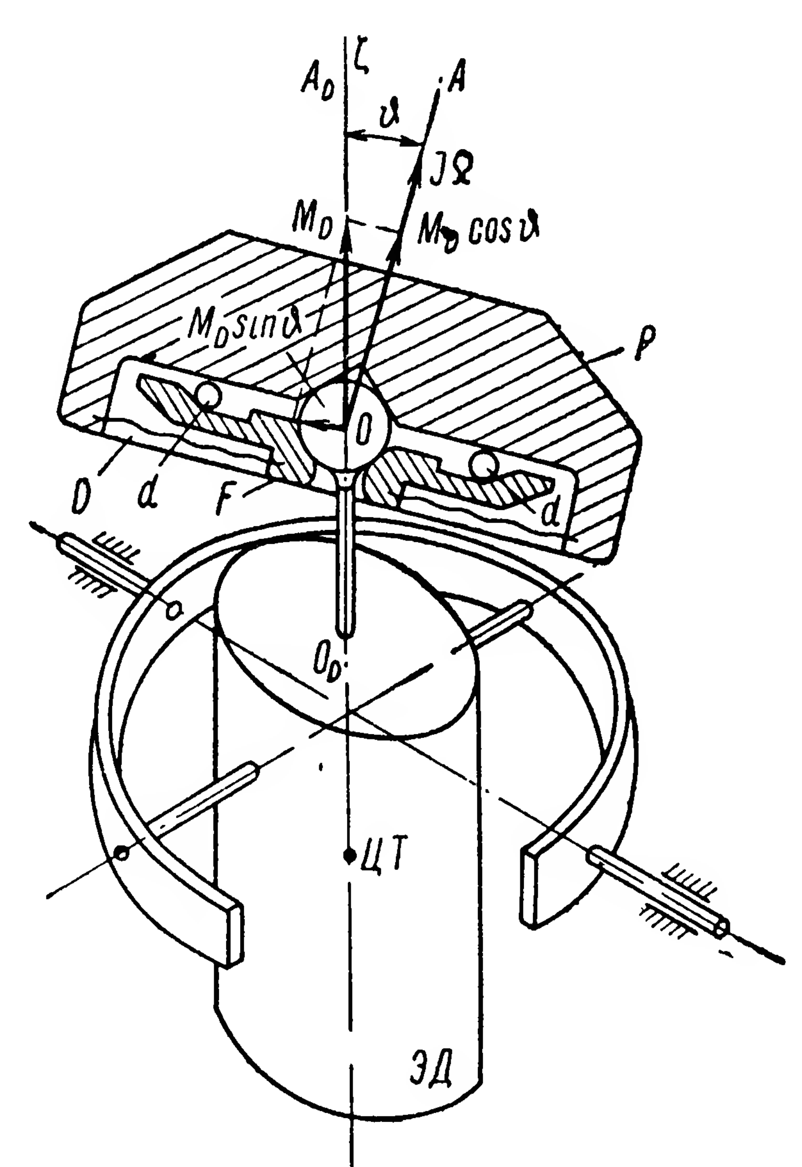


Рис. 167. Схема коррекции гирогоризонта маятниковой гировертикалью.

Чтобы числа оборотов ротора вокруг оси OA оставались постоянными, между ним и шайбой F помещают стальные шарики d. Вследствие центробежных сил инерции шарики стремятся занять наиболее удаленное положение от оси вращения OA. При номинальных оборотах ротора они устанавливаются на границе цилиндрического и конусного участков внутренней поверхности шайбы F. С увеличением оборотов возрастают центробежные силы инерции и шарики d начинают находить на конусную поверхность, отжимая тем самым шайбу F от ротора P. Давление между ними уменьшается, и ротор начинает проскальзывать относительно вращающегося вала двигателя *ЭД*, в результате чего обороты ротора снижаются.

Из рассмотренных схем коррекции гироскопического горизонта следует, что стабильное удерживание его главной оси в вертикальном положении зависит от того, насколько точно среднее положение корректирующих маятников совпадает с направлением вертикали.

Следует иметь в виду, что при ускорениях объекта корректирующие маятники отклоняются от вертикали. Если ускорение в одном направлении будет длительным, то корректирующие моменты могут за это время вызвать отклонение главной оси гирогоризонта от вертикали на значительный угол.

§ 78. ВЛИЯНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОРРЕКЦИИ НА ДВИЖЕНИЕ ГИРОГОРИЗОНТА К ПОЛОЖЕНИЮ РАВНОВЕСИЯ

Характер движения главной оси гирогоризонта к положению динамического равновесия обусловливается в первую очередь зависимостью корректирующих моментов от углов поворота гироскопа вокруг осей подвеса. При пропорциональной зависимости

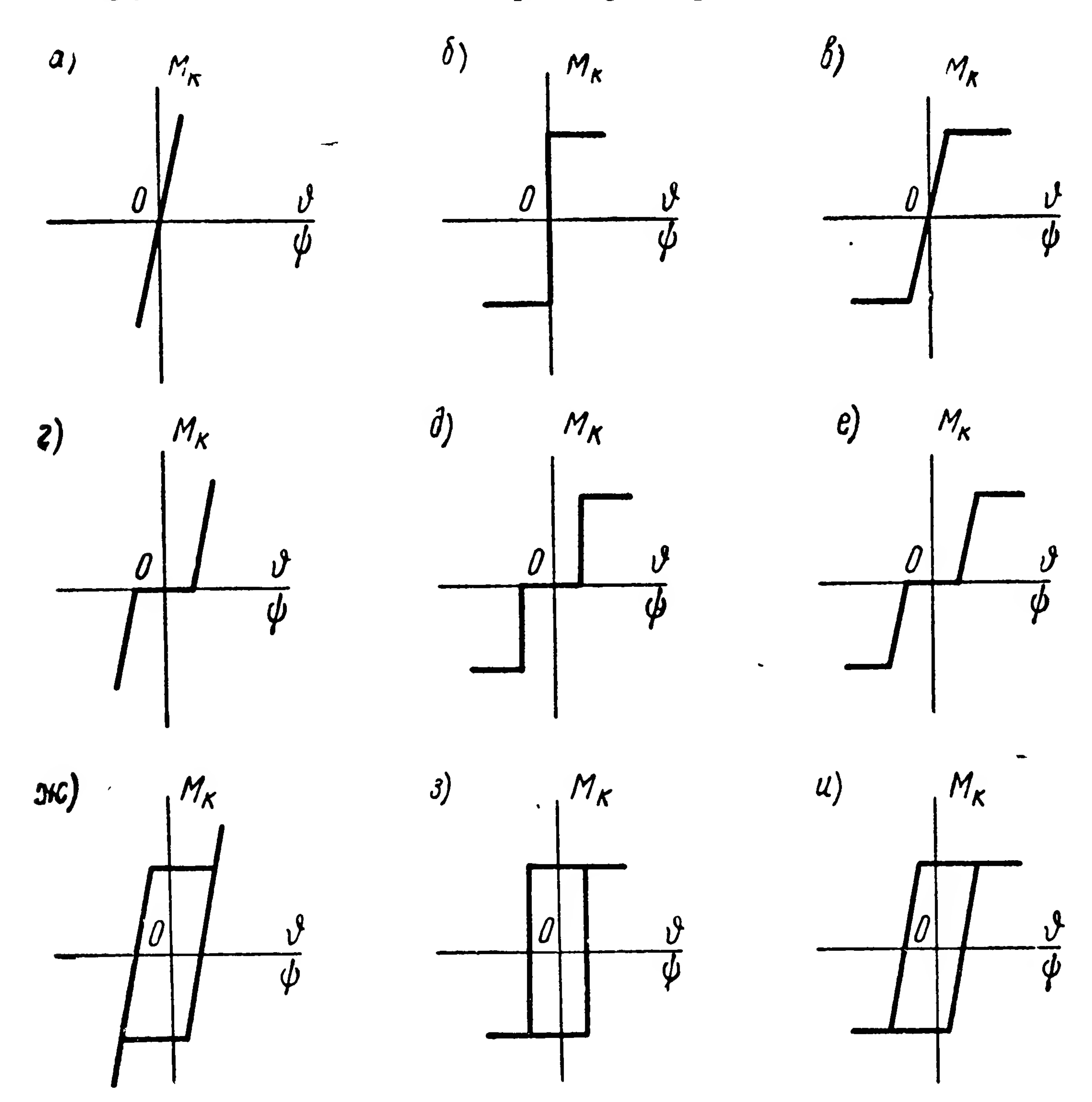


Рис. 168. Характеристики коррекции гирогоризонтов.

между этими величинами (рис. 168, *а*), или, как говорят, при пропорциональной характеристике коррекции, полюс гироскопа будет перемещаться по траекториям, аналогичным рассмотренным в § 46.

В гироскопическом приборостроении используются также постоянные (рис. 168, *б*) и смешанные (рис. 168, *в*) характеристики коррекции. Каждая из них может обладать зоной нечувствительности (рис. 168, *г* — *е*), а в некоторых случаях и гистерезисной петлей (рис. 168, *ж*, *з*—*и*).

Более сложная характеристика коррекции обусловливает и более сложный вид траектории проекции полюса гироскопа на картинной плоскости при его движении к положению равновесия. Так, например, при смешанной характеристике (рис. 168, *в*)

корректирующие моменты $\dot{M}_{\text{к}B}$ и $\dot{M}_{\text{к}C}$ пропорциональны углам ϑ и ψ

$$M_{\text{к}B} = -K_B\psi, \quad M_{\text{к}C} = K_C\vartheta \tag{503}$$

лишь в пределах их малых значений, ограниченных на картинной плоскости (рис. 169) областью IX.

При отклонении гирогоризонта от вертикали на углы ϑ и ψ, превышающие значения, ограниченные областью IX, корректирующие моменты будут определяться зависимостями

$$M_{\text{к}B} = -M_{0B}\,\text{sign}\,\psi,$$
$$M_{\text{к}C} = M_{0C}\,\text{sign}\,\vartheta, \tag{504}$$

соответствующими положению проекции полюса гироскопа на картинной плоскости в областях I — IV.

В областях V и VII корректирующие моменты будут равны

$$M_{\text{к}B} = -K_B\psi,$$
$$M_{\text{к}C} = M_{0C}\,\text{sign}\,\vartheta, \tag{505}$$

а в областях VI и $VIII$

$$M_{\text{к}B} = -M_{0B}\,\text{sign}\,\psi,$$
$$M_{\text{к}C} = K_C\vartheta. \tag{506}$$

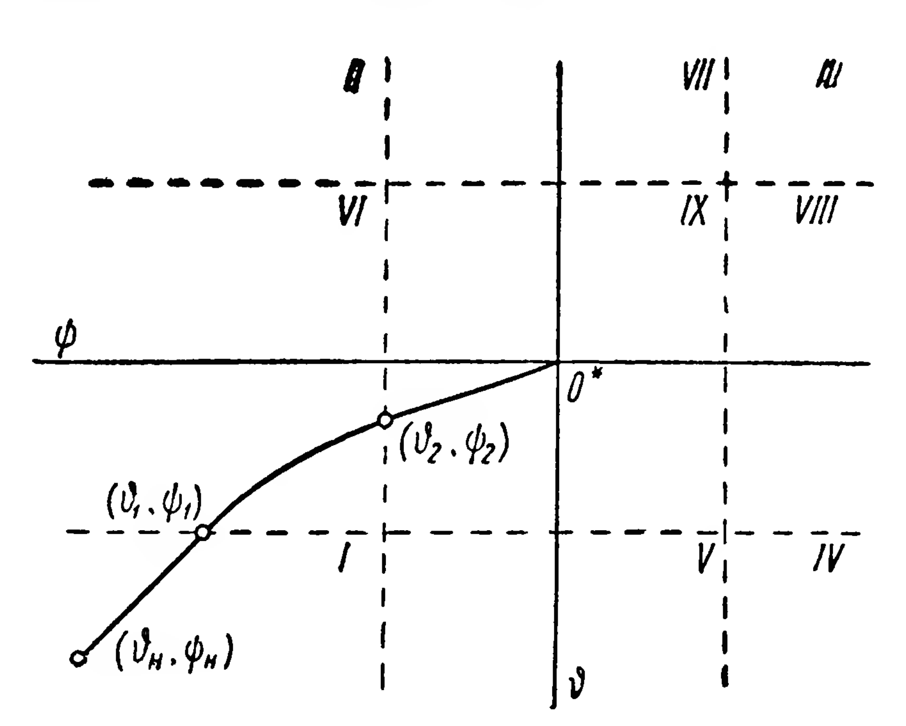


Рис. 169. Траектория полюса гирогоризонта при смешанной характеристике коррекции.

Проследим за перемещениями проекции полюса гироскопа на картинной плоскости при смешанной характеристике коррекции. С этой целью опустим в системе (162) нутационные члены и члены, зависящие от угловых скоростей вращения основания прибора, и учтем, что в данном случае $\vartheta_0 = 0$. При этом условии угловые скорости прецессионного движения гироскопа

$$\dot{\psi} = \frac{M_B}{J\Omega}; \quad \dot{\vartheta} = -\frac{M_C}{J\Omega}. \tag{507}$$

Предположим, что в первый момент времени полюс гироскопа проектировался на картинную плоскость в точку, расположенную в области I и имеющую координаты, определяемые значениями углов $\vartheta_{\text{н}}$ и $\psi_{\text{н}}$. В первый период прецессионное движение гироскопа в зависимости от действующих на него моментов (504) происходит с угловыми скоростями

$$\dot{\psi} = -\frac{M_{0B}}{J\Omega}; \quad \dot{\vartheta} = -\frac{M_{0C}}{J\Omega}.$$

При равенстве моментов M_{0B} и M_{0C} будут равны между собой и угловые скорости $\dot{\psi}$ и $\dot{\vartheta}$. Поэтому в пределах области I рассма-

триваемая траектория будет прямой линией. Как только проекция полюса гироскопа достигнет точки с координатами ϑ_1 и ψ_1, расположенной на границе между областями *I* и *VI*, корректирующие моменты станут равными значениям (506) и прецессия будет происходить с угловыми скоростями

$$\dot{\psi} = -\frac{M_{0B}}{J\Omega}; \quad \dot{\vartheta} = -\frac{K_C}{J\Omega}\vartheta.$$

Как видим, с уменьшением угла ϑ уменьшается и угловая скорость $\dot{\vartheta}$, в то время как $\dot{\psi}$ остается неизменной. В результате проекция полюса гироскопа в пределах области *VI* перемещается по кривой, пока не достигнет границы области *IX*, придя в точку с координатами ϑ_2 и ψ_2.

С этого момента, в соответствии с (503), угловые скорости прецессии гироскопа

$$\dot{\psi} = -\frac{K_B}{J\Omega}\psi; \quad \dot{\vartheta} = -\frac{K_C}{J\Omega}\vartheta.$$

При равенстве коэффициентов K_B и K_C рассматриваемая траектория в пределах области *IX* будет представлять собой прямую, проходящую через начало O^* координатной системы $O^*\vartheta\psi$.

В некоторых конструкциях, например в гирогоризонте с грузиковой коррекцией (рис. 162), характеристика коррекции обладает явно выраженной петлей гистерезиса (рис. 168, *ж*). Это обусловливается наличием сил трения между соприкасающимися поверхностями корректирующих грузов и их цилиндрическими направляющими. Уравнения (507) прецессионного движения гироскопа при такой характеристике коррекции примут вид

$$\dot{\psi} = -\frac{K_B}{J\Omega}(\psi - \Delta_B \operatorname{sign}\dot{\psi}),$$

$$\dot{\vartheta} = -\frac{K_C}{J\Omega}(\vartheta - \Delta_C \operatorname{sign}\dot{\vartheta}),$$

где Δ_B и Δ_C — углы застоя, порождаемые силами трения в цилиндрах, продольные оси которых параллельны соответственно осям *OB* и *OC* подвеса гироскопа (рис. 162).

Введя обозначения

$$\Delta_B \operatorname{sign}\dot{\psi} = d, \quad \Delta_C \operatorname{sign}\dot{\vartheta} = q \tag{508}$$

и переписав рассматриваемые уравнения

$$\dot{\psi} + \frac{K_B}{J\Omega}\psi = \pm\frac{K_B d}{J\Omega}, \quad \dot{\vartheta} + \frac{K_C}{J\Omega}\vartheta = \pm\frac{K_C q}{J\Omega},$$

найдем их решения

$$\psi = \psi_н e^{-\frac{K_B}{J\Omega}t} \pm \frac{K_B d}{J\Omega}, \quad \vartheta = \vartheta_н e^{-\frac{K_C}{J\Omega}t} \pm \frac{K_C q}{J\Omega},$$

в которых знаки перед вторыми членами определяются по зависимостям (508).

При равенстве коэффициентов K_B и K_C траектории проекции полюса гироскопа на картинной плоскости (рис. 170) имеют вид прямых, проходящих через точки с координатами $\pm \frac{K_B d}{J\Omega}$

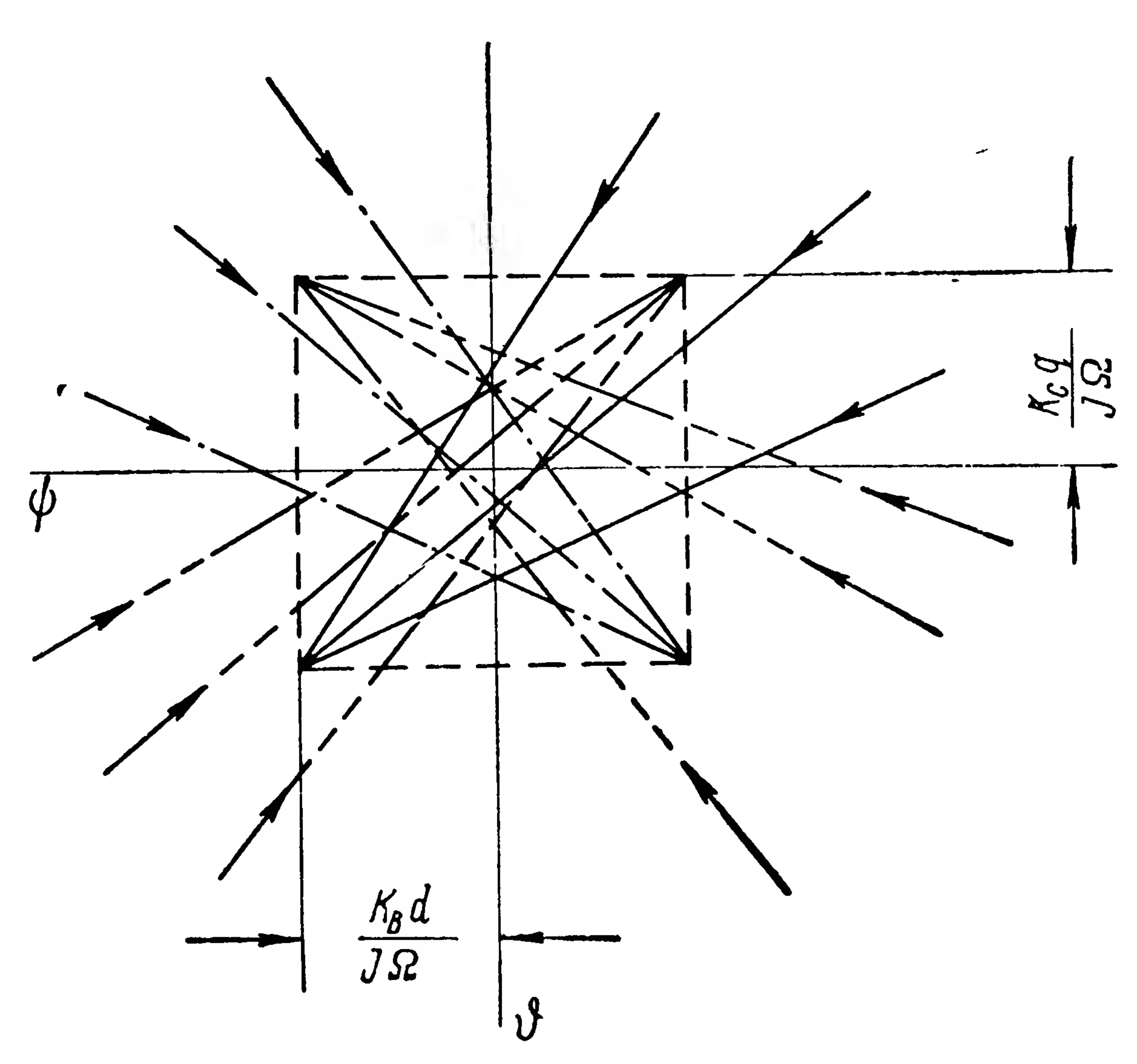


Рис. 170. Спектр траекторий перемещения полюса гирогоризонта при гистерезисной характеристике коррекции.

и $\pm \frac{K_C q}{J\Omega}$. В случае перемещения проекции полюса гироскопа из первого квадранта, где углы ϑ и ψ положительны, а угловые скорости $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\psi}$ отрицательны, ее возможные траектории будут, как это следует из равенств (508), сходиться в точке с координатами $-\frac{K_B d}{J\Omega}$ и $-\frac{K_C q}{J\Omega}$.

Наличие в системе коррекции зоны нечувствительности (рис. 168, *г* — *е*) и петли гистерезиса (рис. 168, *ж*—*и*) будет также влиять на изменение вида траектории полюса гироскопа. Эти влияния подробно разобраны в работах [4, 14, 36, 43, 44 и др.].

§ 79. ВЛИЯНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ДВИЖЕНИЕ ГИРОГОРИЗОНТА

Как уже говорилось (см. § 38), объект, несущий гироскопический прибор, в процессе перемещений совершает непрерывные колебания вокруг своего центра тяжести. Кроме того, скорость и курс объекта могут изменяться, что сопровождается неизбеж-

ными ускорениями. Так как точка подвеса гироскопической системы в общем случае не совпадает с центром тяжести объекта, то при его движении она будет вынуждена перемещаться в пространстве с непрерывно изменяющимися ускорениями.

Естественно, что при этих условиях корректирующие маятники, управляющие системой коррекции, уже не будут неизменно совмещены с вертикалью. Стремясь занять положение динамического равновесия, они будут составлять с вертикалью (см. § 2) все новые и новые углы рассогласования. Поэтому корректирующие моменты будут зависеть теперь от углов отклонения от вертикали не только самого гирогоризонта, но и корректирующих маятников.

Таким образом, в рассматриваемом случае система уравнений (499) по аналогии с уравнениями (281) должна быть переписана в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\left(\dot{\psi} + \omega_C + \omega_D\vartheta\right) &= -K_B(\psi - \varepsilon_C); \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\left(\dot{\vartheta} + \omega_B\right) &= K_C(\vartheta - \varepsilon_B), \end{aligned}\right\} \tag{509}$$

где ε_B и ε_C — углы отклонения корректирующих маятников от вертикали.

Два последних уравнения содержат четыре неизвестные величины, для определения которых система (509) должна быть пополнена двумя уравнениями (4), описывающими движение корректирующих маятников. В результате получим систему дифференциальных уравнений, описывающих движение гирогоризонта с пропорциональной коррекцией:

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\left(\dot{\psi} + \omega_C + \omega_D\vartheta\right) &= -K_B(\psi - \varepsilon_C); \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\left(\dot{\vartheta} + \omega_B\right) &= K_C(\vartheta - \varepsilon_B); \\ J_{\text{и}\,B}\ddot{\varepsilon}_B + K_{\text{и}\,B}\varepsilon_B &= M_{\text{и}\,B}; \\ J_{\text{и}\,C}\ddot{\varepsilon}_C + K_{\text{и}\,C}\varepsilon_C &= M_{\text{и}\,C}. \end{aligned}\right\} \tag{510}$$

Предположим, что моменты $M_{\text{и}\,B}$ и $M_{\text{и}\,C}$ изменяются по гармоническим законам:

$$M_{\text{и}\,B} = M_{0\,\text{и}\,B}\cos qt; \quad M_{\text{и}\,C} = M_{0\,\text{и}\,C}\sin qt.$$

При этом условии решения двух последних уравнений системы (510) примут вид (11). Учитывая, что со временем собственные колебания корректирующих маятников исчезнут и останутся

только их вынужденные колебания, запишем решения указанных уравнений в виде

$$\varepsilon_B = \frac{M_{0\,\text{и}\,B}}{K_{\text{и}\,B}\left(1 - \frac{q^2}{n_{\text{и}\,B}^2}\right)} \cos qt;$$

$$\varepsilon_C = \frac{M_{0\,\text{и}\,C}}{K_{\text{и}\,C}\left(1 - \frac{q^2}{n_{\text{и}\,C}^2}\right)} \sin qt.$$

Подставим найденные значения ε_B и ε_C в первые два уравнения (510) и опустим в них, как и ранее, члены, характеризующие нутационные колебания. Пренебрегая влиянием на прецессионное движение гирогоризонта угловых скоростей его основания, можем записать

$$\dot{\psi} + \frac{K_B}{J\Omega}\psi = \frac{K_B M_{0\,\text{и}\,C}}{J\Omega K_{\text{и}\,C}\left(1 - \frac{q^2}{n_{\text{и}\,C}^2}\right)} \sin qt;$$

$$\dot{\vartheta} + \frac{K_C}{J\Omega}\vartheta = \frac{K_C M_{0\,\text{и}\,B}}{J\Omega K_{\text{и}\,B}\left(1 - \frac{q^2}{n_{\text{и}\,B}^2}\right)} \cos qt.$$

Полученные уравнения имеют один и тот же вид. Поэтому для выяснения характера движения гирогоризонта достаточно проанализировать одно из них. Обращаясь с этой целью к первому уравнению и обозначая в нем

$$\frac{K_B M_{0\,\text{и}\,C}}{J\Omega K_{\text{и}\,C}\left(1 - \frac{q^2}{n_{\text{и}\,C}^2}\right)} = Q, \tag{511}$$

будем иметь

$$\dot{\psi} + \frac{K_B}{J\Omega}\psi = Q \sin qt. \tag{512}$$

Разыскивая частное решение уравнения (512) в виде

$$\psi_r = N \cos qt + L \sin qt$$

и учитывая, что решением соответствующего однородного уравнения является выражение (286), находим общее решение уравнения (512):

$$\psi = Ce^{-\frac{K_B}{J\Omega}t} + \frac{J\Omega Q}{(J\Omega q)^2 + K_B^2}(K_B \sin qt - J\Omega q \cos qt),$$

или

$$\psi = Ce^{-\frac{K_B}{J\Omega}t} + \frac{J\Omega Q}{\sqrt{(J\Omega q)^2 + K_B^2}} \sin(qt - \lambda),$$

где

$$\lambda = \operatorname{arc\,tg} \frac{J\Omega q}{K_B}. \qquad (513)$$

Подставим в полученное выражение значение Q, определяемое из равенства (511). Введя обозначение

$$\frac{K_B}{K_{и\,C}} \cdot \frac{M_{0\,и\,C}}{\sqrt{(J\Omega q)^2 + K_B^2}} \cdot \frac{n^2_{и\,C}}{n^2_{и\,C} - q^2} = \psi_m, \qquad (514)$$

можем записать

$$\psi = Ce^{-\frac{K_B}{J\Omega}t} + \psi_m \sin(qt - \lambda). \qquad (515)$$

Для определения постоянной интегрирования C предположим, что в начальный момент времени $\psi(0) = \psi_н$. При этом условии непосредственно из (515) следует

$$C = \psi_н + \psi_m \sin\lambda,$$

где, согласно принятой зависимости (513),

$$\sin\lambda = \frac{J\Omega q}{\sqrt{(J\Omega q)^2 + K_B^2}}.$$

Подставив значение C в (515), будем иметь

$$\psi = \psi_н e^{-\frac{K_B}{J\Omega}t} + \frac{J\Omega q}{\sqrt{(J\Omega q)^2 + K_B^2}} \psi_m e^{-\frac{K_B}{J\Omega}t} + \psi_m \sin(qt - \lambda). \qquad (516)$$

Из (516) следует, что гироскопический горизонт при гармонических возмущениях его корректирующих маятников будет апериодически двигаться к совмещению с положением динамического равновесия, совершая при этом вынужденные колебания.

Как следует из равенства (514), амплитуда ψ_m вынужденных колебаний гирогоризонта тем меньше, чем меньше (при всех прочих равных условиях) коэффициент K_B, характеризующий эффективность коррекции. Однако уменьшение K_B и K_C ограничено зависимостями (501), согласно которым при допустимом значении углов отклонения главной оси гирогоризонта от вертикали коэффициенты K_B и K_C не могут быть меньше некоторых величин, определяемых условиями работы прибора в каждом конкретном случае.

Пример 34. Определить амплитуду вынужденных колебаний и угол первоначального отклонения положения динамического равновесия гирогори-

зонта с кинетическим моментом $J\Omega = 5000$ *Гсмсек* от вертикали. Корректирующие маятники обладают относительно своих осей подвеса моментами инерции $J_{и\,B} = J_{и\,C} = 0{,}005$ *Гсмсек*^{2} и коэффициентами восстанавливающих моментов $K_{и\,B} = K_{и\,C} = 6$ *Гсм/рад*. Действующие на них внешние возмущающие моменты изменяются с амплитудами $M_{0\,и\,B} = M_{0\,и\,C} = 2$ *Гсм* и с круговой частотой $q = 6$ сек.$^{-1}$. Коэффициенты корректирующих моментов $K_B = K_C = 500$ *Гсм/рад*.

По равенству (7) определим круговую частоту собственных колебаний корректирующих маятников:

$$n_{и\,B} = n_{и\,C} = \sqrt{\frac{K_{иC}}{J_{иC}}} = \sqrt{\frac{6}{0{,}005}} = 34{,}64 \text{ сек.}^{-1}$$

Подставив в выражение (514) значения входящих в него величин, определим амплитуду вынужденных колебаний гирогоризонта:

$$\psi_m = \frac{K_B}{K_{и\,C}} \cdot \frac{M_{0\,и\,C}}{\sqrt{(J\Omega q)^2 + K_B^2}} \cdot \frac{n_{и\,C}^2}{n_{и\,C}^2 - q^2} =$$

$$= \frac{500}{6} \cdot \frac{2}{\sqrt{5000^2 \cdot 6^2 + 500^2}} \cdot \frac{34{,}64^2}{34{,}64^2 - 6^2} = 5{,}72 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

или соответственно

$$\psi_m = 5{,}72 \cdot 10^{-3} \cdot 57{,}3 = 0{,}33 \text{ град.}$$

Определяемый вторым членом выражения (516) угол первоначального отклонения положения динамического равновесия от вертикали будет равен

$$\frac{J\Omega q}{\sqrt{(J\Omega q)^2 + K_B^2}}\,\psi_m \approx \psi_m \approx 0{,}33 \text{ град.}$$

§ 80. СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ОСНОВНЫХ ВИДОВ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ КОРРЕКЦИИ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ

Выбор характеристики коррекции зависит от условий, в которых гироскопический прибор будет работать. Чтобы составить суждение о преимуществах и недостатках корректирующих устройств, обладающих той или иной характеристикой (см. рис. 168), вновь обратимся к системе уравнений (162). Учитывая, что при корректировании гироскопа угол $\vartheta_0 = 0$ (см. § 45, 50, 57 и 76), перепишем уравнения (162) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega(\dot{\psi} + \omega_C + \omega_D\vartheta) &= M_B; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega(\dot{\vartheta} + \omega_B) &= M_C. \end{aligned}\right\} \qquad (517)$$

Моменты внешних сил, действующие на корректируемый гироскоп, определяются, как известно (см. § 46, 59, 61, 78 и 79), корректирующими моментами и моментами сил трения. Корректирующие моменты являются функциями как углов ϑ и ψ поворотов гироскопа, так и углов ε_B и ε_C отклонений указателей от заданных направлений, а моменты сил трения — функциями угло-

вых скоростей $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\psi}$. Поэтому система уравнений (517) может быть переписана в следующем виде:

$$J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\left(\dot{\psi} + \omega_C + \omega_D\vartheta\right) = -M_{\text{к}\,B}(\psi,\ \varepsilon_C) - M_{\text{т}B}\left(\dot{\vartheta}\right);$$

$$J_C\ddot{\psi} - J\Omega\left(\dot{\vartheta} + \omega_B\right) = M_{\text{к}\,C}(\vartheta,\ \varepsilon_B) - M_{\text{т}C}\left(\dot{\psi}\right).$$

Опуская нутационные члены и пренебрегая малой величиной $\omega_D\vartheta$ по сравнению с ω_C, находим

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi} &= -\frac{M_{\text{к}B}(\psi,\ \varepsilon_C) + M_{\text{т}\,B}(\dot{\vartheta}) + J\Omega\omega_C}{J\Omega};\\ \dot{\vartheta} &= -\frac{M_{\text{к}\,C}(\vartheta,\ \varepsilon_B) - M_{\text{т}\,C}(\dot{\psi}) + J\Omega\omega_B}{J\Omega}. \end{aligned}\right\} \qquad (518)$$

Рассмотрим движение гироскопа к корректируемому положению по перемещению проекции его полюса на картинной плоскости (рис. 171). Будем полагать, что в начальный момент гироскоп занимает положение, при котором его полюс проектируется на картинную плоскость в точку A, расположенную в первом квадранте. В этом случае движение гироскопа к корректируемому положению, а его полюса к началу O^* системы координат $O^*\vartheta\psi$ происходит с отрицательными угловыми скоростями $\left(\dot{\vartheta} < 0\right.$ и $\left.\dot{\psi} < 0\right)$, поэтому моменты сил трения положительны и выражения (518) угловых скоростей прецессии гироскопа при пропорциональной характеристике коррекции (см. § 46), принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi} &= -\frac{K_B(\psi - \varepsilon_C) - M_{0\,\text{т}\,B} + J\Omega\omega_C}{J\Omega};\\ \dot{\vartheta} &= -\frac{K_C(\vartheta - \varepsilon_B) + M_{0\,\text{т}\,C} + J\Omega\omega_B}{J\Omega}. \end{aligned}\right\} \qquad (519)$$

При релейной характеристике коррекции (см. § 61) скорости прецессии гироскопа будут

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi} &= -\frac{M_{0\,\text{к}B}\,\text{sign}\,(\psi - \varepsilon_C) - M_{0\,\text{т}\,B} + J\Omega\omega_C}{J\Omega};\\ \dot{\vartheta} &= -\frac{M_{0\,\text{к}C}\,\text{sign}\,(\vartheta - \varepsilon_B) + M_{0\,\text{т}C} + J\Omega\omega_B}{J\Omega}. \end{aligned}\right\} \qquad (520)$$

Пользуясь выражениями (519) и (520), можно сравнить основные разновидности (рис. 168, *а—в*) характеристик коррекции гироскопа. Для упрощения будем считать, что измерители корректирующих устройств не имеют зон застоя и что коррекция гироскопа по обеим осям его подвеса обладает одинаковой интенсивностью ($K_B = K_C$ и $M_{0\,\text{к}\,B} = M_{0\,\text{к}\,C}$). Учитывая сказанное, рассмотрим вначале движение полюса на картинной плоскости при неподвижном положении корпуса прибора ($\omega_B = \omega_C = 0$) и при отсутствии отклонений измерителей ($\varepsilon_B = \varepsilon_C = 0$) и момен-

тов сил трения ($M_{0\,\text{т}B} = M_{0\,\text{т}C} = 0$). При таких допущениях исследуемые выражения (519) и (520) можно представить равенствами

$$\dot{\psi} = -\frac{K_Б \psi}{J\Omega}; \qquad \dot{\vartheta} = -\frac{K_C \vartheta}{J\Omega}$$

и соответственно

$$\dot{\psi} = -\frac{M_{0\,\text{к}B}}{J\Omega}; \qquad \dot{\vartheta} = -\frac{M_{0\,\text{к}C}}{J\Omega}.$$

Как видим, при пропорциональной характеристике коррекции с уменьшением углов ϑ и ψ будут уменьшаться и угловые скорости $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\psi}$. Поэтому полюс гироскопа перемещается по прямой линии AO^* со все уменьшающейся скоростью, пока не совместится с точкой O^* (рис. 171, *а*). В случае релейной характеристики коррекции, при одинаковой ее интенсивности, угловые скорости прецессии гироскопа по обеим осям его подвеса будут равны $\dot{\psi} = \dot{\vartheta}$. Вследствие этого полюс гироскопа будет двигаться на картинной плоскости по прямой AB, расположенной под углом в 45° к линии абсцисс $O^*\psi$.

Как только полюс гироскопа совместится с линией $O^*\psi$, достигнув точки B, и угол ϑ станет равным нулю, корректирующий момент $M_{0\,\text{к}C}$ перестанет действовать на гироскоп и движение последнего вокруг внутренней оси подвеса прекратится. Но действие момента $M_{0\,\text{к}B}$ продолжится. Поэтому гироскоп будет прецессировать вокруг наружной оси подвеса, в связи с чем его полюс будет двигаться по прямой BO^*, совмещенной с осью $O^*\psi$. Как только полюс совместится с точкой O^*, угол ψ станет равным нулю, момент

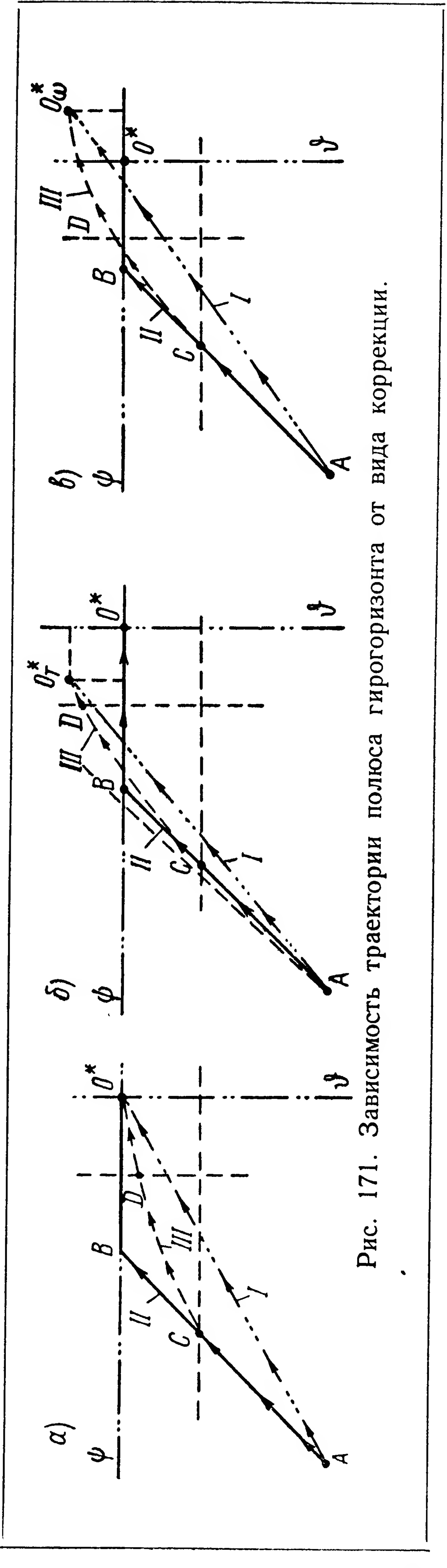


Рис. 171. Зависимость траектории полюса гирогоризонта от вида коррекции.

$M_{0кB}$ перестанет действовать и прецессия гироскопа прекратится.

При смешанной характеристике коррекции полюс гироскопа перемещается по прямой AB до тех пор, пока коррекция по обеим осям имеет релейную характеристику (см. § 78). При достижении полюсом точки C на прямой AB характеристика коррекции по внутренней оси станет пропорциональной, в связи с чем дальнейшее перемещение полюса происходит по кривой CD, пока он не совместится с точкой D. С этого момента характеристики коррекции по обеим осям подвеса гироскопа становятся пропорциональными и полюс движется по прямой DO^*, пока не совместится с точкой O^*.

Рассмотрим, как моменты сил трения влияют на приход гироскопа к корректируемому положению. В этом случае выражения (519) и (520) принимают вид

$$\dot{\psi} = -\frac{K_B\psi - M_{0тB}}{J\Omega}; \quad \dot{\vartheta} = -\frac{K_C\vartheta + M_{0тC}}{J\Omega} \tag{521}$$

и

$$\dot{\psi} = -\frac{M_{0кB} - M_{0тB}}{J\Omega}; \quad \dot{\vartheta} = -\frac{M_{0кC} + M_{0тC}}{J\Omega}. \tag{522}$$

Как следует из полученных зависимостей, наличие сил трения при пропорциональной характеристике коррекции (521) изменит положение равновесия гироскопа и его полюс придет к совмещению на картинной плоскости не с точкой O^*, а с точкой $O^*_т$ (рис. 171, *б*) с координатами $-\frac{M_{0тC}}{J\Omega}$ и $\frac{M_{0тB}}{J\Omega}$. В эту же точку $O^*_т$ приходит полюс гироскопа и при смешанной характеристике коррекции.

При релейной характеристике (522) моменты сил трения нарушат равенство угловых скоростей прецессии. Коррекция вокруг внутренней оси станет более интенсивной, чем вокруг наружной, в связи с чем линия AB пересечет ось $O^*\psi$ под углом, отличным от 45°. Так как корректирующие моменты $M_{0кB}$ и $M_{0кC}$ всегда больше моментов $M_{0тB}$ и $M_{0тC}$ сил трения, то полюс гироскопа, достигнув точки B на оси абсцисс, будет перемещаться далее вдоль оси $O^*\psi$, пока не придет в точку O^*.

Таким образом, при релейной характеристике моменты сил трения не вызывают дополнительных отклонений гироскопа. Если при пропорциональной и смешанной характеристиках силы трения порождают статические ошибки гироскопа, определяемые частными решениями уравнений (521)

$$\vartheta_r = -\frac{M_{0тC}}{K_C}, \quad \psi_r = \frac{M_{0тB}}{K_B},$$

то при релейной характеристике, как это следует из выражений (522), статические ошибки равны нулю:

$$\vartheta_r = 0; \quad \psi_r = 0.$$

Аналогичное влияние на изменение траектории перемещения полюса гироскопа на картинной плоскости оказывают и угловые скорости ω_B и ω_C вращения в пространстве корпуса гироскопа вокруг его осей подвеса. Полагая в зависимостях (519) и (520) углы ε_B и ε_C, а также моменты $M_{0\text{т}B}$ и $M_{0\text{т}C}$ равными нулю, имеем:

для случая пропорциональной характеристики

$$\dot{\psi} = -\frac{K_Б\psi + J\Omega\omega_C}{J\Omega}; \qquad \dot{\vartheta} = -\frac{K_C\vartheta + J\Omega\omega_B}{J\Omega}; \tag{523}$$

для релейной характеристики

$$\dot{\psi} = -\frac{M_{0\text{к}B} + J\Omega\omega_C}{J\Omega}; \qquad \dot{\vartheta} = -\frac{M_{0\text{к}C} + J\Omega\omega_B}{J\Omega}.$$

Полученные выражения показывают, что положение равновесия гироскопа при пропорциональной и смешанной характеристиках коррекции совмещено с точкой O_ω^* (рис. 171, *в*), координаты которой определяются частными решениями уравнений (523):

$$\vartheta_r = -\frac{J\Omega\omega_B}{K_C}; \qquad \psi_r = -\frac{J\Omega\omega_C}{K_B}.$$

В случае релейной характеристики, когда корректирующие моменты $M_{0\text{к}B}$ и $M_{0\text{к}C}$ по модулю превосходят моменты гироскопические $J\Omega\omega_C$ и $J\Omega\omega_B$, перемещение полюса происходит по ломаной линии ABO^* до совмещения с точкой O^*. Таким образом, и в этом случае статические ошибки гироскопа равны нулю.

Однако изложенное не может явиться основанием для вывода о преимуществах релейной характеристики коррекции по сравнению с пропорциональной и смешанной. Необходимо иметь в виду, что при отклонениях измерителей от заданного направления, когда $\varepsilon_B \neq 0$ и $\varepsilon_C \neq 0$, угловые скорости прецессии зависят от характеристики коррекции. Для подтверждения сказанного примем, что в (519) и (520) ϑ, ψ, $M_{0\text{т}B}$, $M_{0\text{т}C}$, ω_B и ω_C равны нулю. При таком допущении рассматриваемые выражения примут вид

$$\dot{\psi} = \frac{K_B\varepsilon_B}{J\Omega}; \qquad \dot{\vartheta} = \frac{K_C\varepsilon_C}{J\Omega} \tag{524}$$

и соответственно

$$\dot{\psi} = \frac{M_{0\text{к}B}}{J\Omega}; \qquad \dot{\vartheta} = \frac{M_{0\text{к}C}}{J\Omega}. \tag{525}$$

Из полученных равенств следует, что изменения углов ε_B и ε_C по-разному влияют на угловые скорости $\dot{\psi}$ и $\dot{\vartheta}$ прецессии корректируемого гироскопа. При пропорциональной характеристике коррекции *I* (рис. 172) с увеличением ε_B и ε_C возрастают и угловые скорости прецессии (524). В случае релейной характеристи-

стики *II* угловые скорости прецессии (525) остаются постоянными независимо от изменений ε_B и ε_C. При смешанной характеристике *III* угловые скорости $\dot{\psi}$ и $\dot{\vartheta}$ пропорциональны ε_B и ε_C лишь в некоторых пределах, а затем сохраняют постоянные значения. Поэтому выбор той или иной характеристики коррекции зависит от условий, в которых будет работать гироскопический прибор. Если в процессе его работы ускорения объекта имеют большие значения, необходимо выбирать релейную характеристику коррекции, при которой угловые скорости $\dot{\psi}$ и $\dot{\vartheta}$ не превышают выбранных пределов при любых ускорениях. Если ускорения объекта малы, предпочтительнее использовать пропорциональную характеристику, чтобы при малых углах ε_B и ε_C отклонения измерителей не вызывали прецессии гироскопа с излишне большими угловыми скоростями. Наконец, в тех случаях, когда ускорения объекта могут редко достигать больших значений, рациональнее использовать смешанную коррекцию. Тогда при больших ускорениях угловые скорости прецессии не превысят установленного предела, а при малых ускорениях не будут излишне большими.

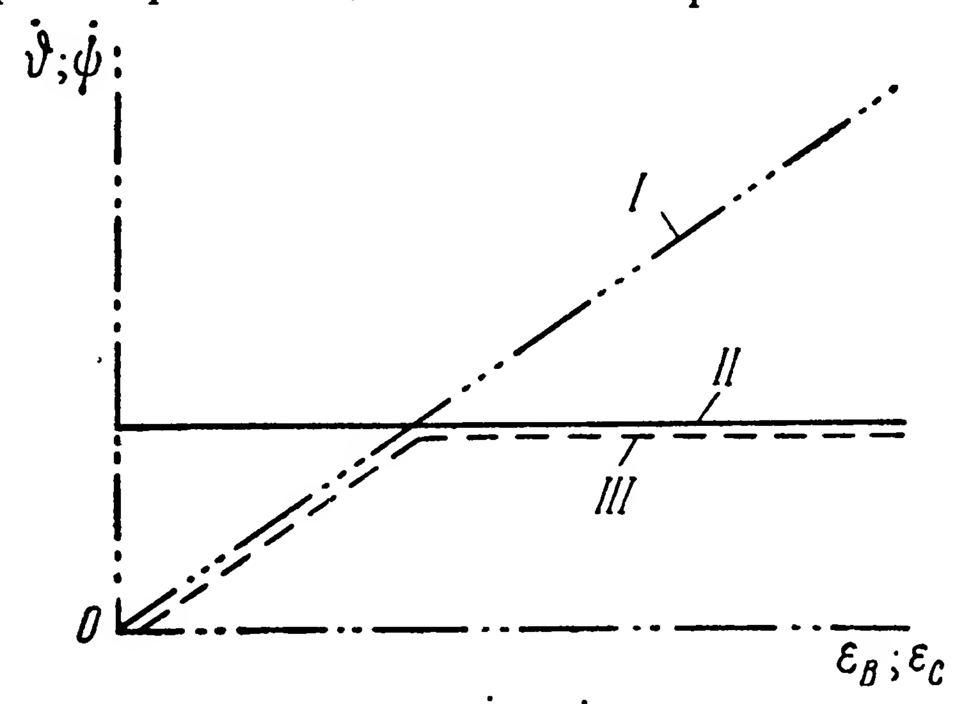


Рис. 172. Зависимость $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\psi}$ от углов ε_B и ε_C при различных видах коррекции.

§ 81. ДВИЖЕНИЕ ГИРОГОРИЗОНТА ПРИ СМЕЩЕНИИ ЕГО ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ ПОДВЕСА

В тех случаях, когда центр тяжести гирогоризонта несколько смещен относительно точки подвеса, при отклонениях главной оси от вертикали на гироскоп действуют как восстанавливающие моменты, обусловливаемые смещением центра тяжести, так и моменты, создаваемые корректирующим устройством. Первые учитывались в системе (466), вторые — в системе (499). В общем случае система уравнений, описывающая движение гироскопа, примет вид

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\left(\dot{\psi} + \omega_C + \omega_D\vartheta\right) &= -Gl\vartheta - K_B\psi; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\left(\dot{\vartheta} + \omega_B\right) &= -Gl\psi + K_C\vartheta + ml\dot{V}. \end{aligned}\right\} \qquad (526)$$

Опустим в системе (526) нутационные члены и ограничимся, как и выше (§ 76), лишь основными составляющими значений угло-

вых скоростей вращения основания прибора. При таком допущении, полагая ускорение объекта $\dot{V}$ равным нулю, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\psi} + \frac{Gl}{J\Omega}\vartheta + \frac{K_B}{J\Omega}\psi = \Omega_з \cos\varphi \sin\alpha - \frac{V}{R};\\ &\dot{\vartheta} - \frac{Gl}{J\Omega}\psi + \frac{K_C}{J\Omega}\vartheta = -\Omega_з \cos\varphi \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{527}$$

Определив из первого уравнения (527) угол ϑ и подставив значения ϑ и $\dot{\vartheta}$ во второе уравнение той же системы, получим

$$\ddot{\psi} + \frac{K_B + K_C}{J\Omega}\dot{\psi} + \frac{G^2l^2 + K_BK_C}{J^2\Omega^2}\psi =$$

$$= \frac{\Omega_з \cos\varphi\,(Gl\cos\alpha + K_C\sin\alpha) - K_C\frac{V}{R}}{J\Omega}. \tag{528}$$

Обозначив постоянные, входящие в (528),

$$\frac{K_B + K_C}{J\Omega} = a; \qquad \frac{G^2l^2 + K_BK_C}{J^2\Omega^2} = b;$$

$$\frac{\Omega_з \cos\varphi\,(Gl\cos\alpha + K_C\sin\alpha) - K_C\frac{V}{R}}{J\Omega} = d, \tag{529}$$

получим

$$\ddot{\psi} + a\dot{\psi} + b\psi = d. \tag{530}$$

Из (530) находим частное решение:

$$\psi_r = \frac{d}{b}.$$

Решение соответствующего однородного уравнения

$$\ddot{\psi} + a\dot{\psi} + b\psi = 0$$

при выполнении неравенства

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{K_B + K_C}{2J\Omega}\right)^2 < \frac{G^2l^2 + K_BK_C}{J^2\Omega^2} = b,$$

как известно (см. § 58 и 68), имеет вид

$$\psi_р = e^{-\frac{a}{2}t}(C_1\cos nt + C_2\sin nt),$$

где

$$n = \sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2}. \tag{531}$$

Таким образом, общее решение уравнения (530) примет вид

$$\psi = e^{-\frac{a}{2}t}(C_1 \cos nt + C_2 \sin nt) + \frac{d}{b}. \quad (532)$$

Подставив найденное значение ψ и $\dot{\psi}$ в первое уравнение (527), будем иметь

$$\vartheta = e^{-\frac{a}{2}t}(C_3 \sin nt - C_4 \cos nt) - \frac{K_B}{Gl}\cdot\frac{d}{b} + $$
$$+ \frac{J\Omega}{Gl}\Omega_3 \cos\varphi \sin\alpha - \frac{J\Omega}{Gl}\cdot\frac{V}{R}. \quad (533)$$

Из выражений (532) и (533) следует, что в рассматриваемом случае гироскоп совершает затухающие колебания около положения динамического равновесия, отклоненного от вертикали на углы, определяемые постоянными членами. Величины этих углов, с учетом (529), будут равны:

$$\left.\begin{aligned} \psi_r &= J\Omega \frac{\Omega_3 \cos\varphi (Gl \cos\alpha + K_C \sin\alpha) - K_C \frac{V}{R}}{G^2 l^2 + K_B K_C}; \\ \vartheta_r &= -J\Omega \frac{\Omega_3 \cos\varphi (K_B \cos\alpha - Gl \sin\alpha) + Gl \frac{V}{R}}{G^2 l^2 + K_B K_C}. \end{aligned}\right\} \quad (534)$$

Нетрудно заметить, что при соответствующих соотношениях между конструктивными параметрами гироскопа углы ϑ_r и ψ_r могут быть снижены до необходимых минимальных значений.

§ 82. ДЕВИАЦИЯ ГИРОГОРИЗОНТА ПРИ ВИРАЖЕ ОБЪЕКТА

Среди погрешностей гирогоризонта особое место занимают его отклонения от вертикали при разворотах и виражах объектов. Представим, например, что летательный аппарат (рис. 173) совершает вираж вокруг вертикали $O\zeta$ с угловой скоростью $\omega_ц$. При правильном его выполнении углы ε_C и ε_B отклонения корректирующих маятников [1] от вертикали $O\zeta$ соответственно равны углу крена γ и нулю. Поэтому действующие на гироскоп корректирующие моменты будут, как это следует непосредственно из схемы, определяться из равенств

$$M_{кB} = K_B(\gamma - \psi); \qquad M_{кC} = K_C\vartheta.$$

Подставим значения моментов $M_{кB}$ и $M_{кC}$ в систему уравнений (162) и учтем, что $\vartheta_0 = 0$; в результате можем записать

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega(\dot{\psi} + \omega_C + \omega_D\vartheta) &= K_B(\gamma - \psi); \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega(\dot{\vartheta} + \omega_B) &= K_C\vartheta. \end{aligned}\right\} \quad (535)$$

[1] Корректирующие маятники на рис. 173 условно смещены вдоль осей подвеса гироскопа.

В процессе выполнения виража угловая скорость $\omega_ц$ несоизмеримо велика по сравнению с остальными составляющими, обусловливаемыми суточным вращением Земли и скоростью объекта. Поэтому, спроектировав на оси OB, OC и OD только вектор угловой скорости $\omega_ц$, найдем

$$\omega_B = \omega_ц \cos(\zeta, B) = \omega_ц \times \cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) = -\omega_ц \sin\psi;$$

$$\omega_C = \omega_ц \cos(\zeta, C) = \omega_ц \times \cos\frac{\pi}{2} = 0;$$

$$\omega_D = \omega_ц \cos(\zeta, D) = \omega_ц \cos\psi.$$

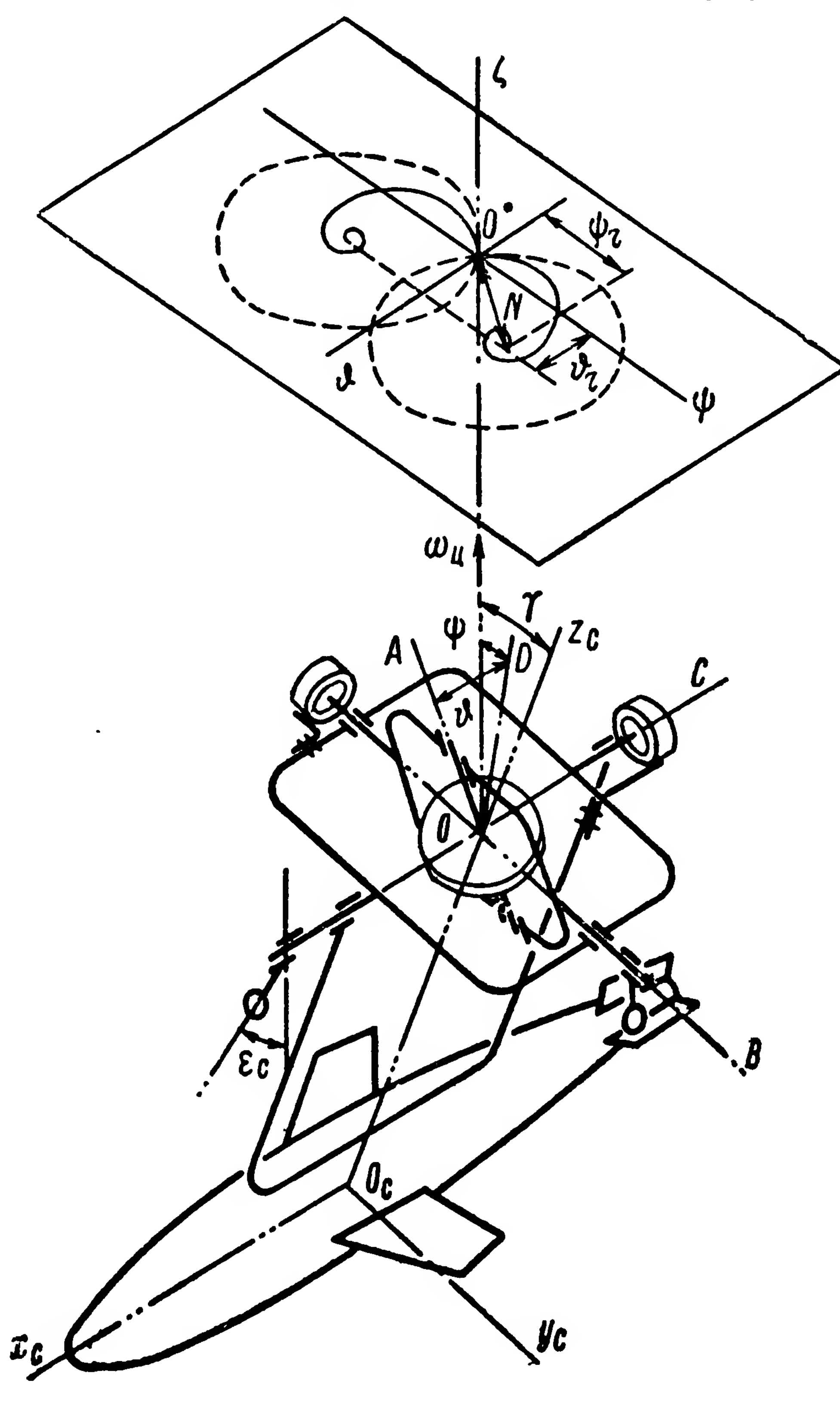


Рис. 173. Девиация гирогоризонта на вираже.

Подставив значения ω_B, ω_C и ω_D в систему (535), в которой опускаем нутационные члены, в случае малых углов ϑ и ψ будем иметь

$$\left.\begin{aligned} &\dot\psi + \frac{K_B}{J\Omega}\psi + \omega_ц\vartheta = \frac{K_B}{J\Omega}\gamma;\\ &\dot\vartheta + \frac{K_C}{J\Omega}\vartheta - \omega_ц\psi = 0. \end{aligned}\right\} \tag{536}$$

Определив из первого уравнения системы (536) величину ϑ и подставив ϑ и $\dot\vartheta$ во второе уравнение этой системы, найдем

$$\ddot\psi + \frac{K_B + K_C}{J\Omega}\dot\psi + \frac{(J\Omega\omega_ц)^2 + K_B K_C}{(J\Omega)^2}\psi = \frac{K_B K_C \gamma}{(J\Omega)^2}.$$

Решение полученного уравнения, согласно (361), имеет вид

$$\psi = e^{-\frac{K_B + K_C}{2J\Omega}t}(C_1\cos nt + C_2\sin nt) + \frac{K_B K_C \gamma}{(J\Omega\omega_ц)^2 + K_B K_C}, \tag{537}$$

где

$$n = \sqrt{\frac{4(J\Omega\omega_ц)^2 - (K_B - K_C)^2}{2J\Omega}}. \tag{538}$$

Подставив значение угла ψ из (537) в первое уравнение системы (536), найдем

$$\vartheta = e^{-\frac{K_B+K_C}{2J\Omega}t}\left[\left(\frac{K_C-K_B}{2J\Omega\omega_ц}C_1 - \frac{n}{\omega_ц}C_2\right)\cos nt + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{K_C-K_B}{2J\Omega\omega_ц}C_2 + \frac{n}{\omega_ц}C_1\right)\sin nt\right] + \frac{J\Omega\omega_ц K_B\gamma}{(J\Omega\omega_ц)^2 + K_B K_C}. \quad (539)$$

Как следует из выражений (538) и (539), при вираже объекта гирогоризонт совершает затухающие колебания около положения равновесия, составляющего с вертикалью углы

$$\psi_r = \frac{K_B K_C \gamma}{(J\Omega\omega_ц)^2 + K_B K_C}; \quad \vartheta_r = \frac{J\Omega\omega_ц K_B\gamma}{(J\Omega\omega_ц)^2 + K_B K_C}. \quad (540)$$

Чтобы более наглядно представить движение гирогоризонта при вираже объекта, примем, что коэффициенты $K_B = K_C = K$. При таком допущении выражения (537) и (539) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \psi - \psi_r &= Ne^{-\frac{K}{J\Omega}t}\sin(\omega_ц t + \delta); \\ \vartheta - \vartheta_r &= Ne^{-\frac{K}{J\Omega}}\cos(\omega_ц t + \delta), \end{aligned}\right\} \quad (541)$$

где

$$N = \frac{K\gamma}{\sqrt{(J\Omega\omega_ц)^2 + K^2}}. \quad (542)$$

Возведем уравнения (541) в квадрат и затем сложим их между собой. В результате получим

$$(\psi - \psi_r)^2 + (\vartheta - \vartheta_r)^2 = N^2 e^{-\frac{2K}{J\Omega}t}. \quad (543)$$

Уравнение (543) по своему виду напоминает уравнение окружности, центр которой имеет координаты ϑ_r и ψ_r. Однако радиус этой окружности уменьшается с течением времени по экспоненциальному закону. Таким образом, перемещение проекции полюса гироскопа на картинной плоскости происходит по кривой, близкой к спирали. Аналогичный характер движения гирогоризонта при вираже объекта наблюдается и в случае использования других видов характеристик коррекции [14, 43].

Из выражений (540) следует, что при левом вираже объекта, когда $\omega_ц > 0$, координаты ϑ_r и ψ_r положительны. При $\omega_ц < 0$ изменится знак угла крена γ, в связи с чем ψ_r будет отрицательным, а ϑ_r останется положительным. Траектории перемещения проекции полюса гироскопа показывают, что в процессе движения гирогоризонта к положению динамического равновесия в отдельные моменты времени его главная ось отклоняется от вертикали

на углы, превосходящие значения ϑ_r и ψ_r, определяемые по равенствам (540). Так как ϑ_r и ψ_r могут сами принимать большие значения, в современных гирогоризонтах применяются специальные меры для компенсации их виражных погрешностей.

Пример 35. Определить положение динамического равновесия гирогоризонта, установленного на летательном аппарате, совершающем вираж со скоростью $V = 540$ *км/ч* $= 150$ *м/сек* при радиусе $R_ц = 2000$ *м*. Кинетический момент гироскопа $J\Omega = 6000$ *Гсмсек*, коэффициенты корректирующих моментов $K_B = K_C = 250$ *Гсм/рад*.

Находим угловую скорость виража

$$\omega_ц = \frac{V}{R_ц} = \frac{150}{2000} = 0{,}075 \text{ сек.}^{-1}$$

и соответствующий ей угол крена

$$\gamma = \frac{\omega_ц V}{g} = \frac{0{,}075 \cdot 150}{9{,}81} = 1{,}15 \text{ рад.} = 65{,}5 \text{ град.}$$

Подставив вычисленные значения $\omega_ц$ и γ в выражения (540), найдем

$$\psi_r = \frac{K_B K_C \gamma}{(J\Omega\omega_ц)^2 + K_B K_C} = \frac{250^2 \cdot 1{,}15}{6000^2 \cdot 0{,}075^2 + 250^2} = 0{,}353 \text{ рад.} = 20{,}2 \text{ град.};$$

$$\vartheta_r = \frac{J\Omega\omega_ц K_B \gamma}{(J\Omega\omega_ц)^2 + K_B K_C} = \frac{6000 \cdot 0{,}075 \cdot 250 \cdot 1{,}15}{6000^2 \cdot 0{,}075^2 + 250^2} = 0{,}635 \text{ рад.} = 36{,}3 \text{ град.}$$

§ 83. КОМПЕНСАЦИЯ ВЛИЯНИЯ УСКОРЕНИЙ ОБЪЕКТА НА ГИРОВЕРТИКАЛЬ

Если период прецессионных колебаний маятниковой гировертикали равен 84,4 мин., то она, как говорилось выше (§ 74), практически не будет реагировать на ускорения объекта. Необходимо указать, что такой способ компенсации влияния ускорений на отклонение главной оси гироскопа от вертикали не является единственным. Так, например, компенсация влияния центростремительных ускорений объекта на поведение маятниковой гировертикали при определенных скоростях движения может быть достигнута рассогласованием оси Ox внутреннего карданова кольца BK и главной оси OA гироскопа на угол ϑ^* (рис. 174, *а*).

Действительно, при вираже объекта вокруг вертикали $O\zeta$ с угловой скоростью $\omega_ц$ возникает центростремительное ускорение $\dot{V}_ц = \omega_ц V$. Так как центр тяжести гироскопа смещен относительно точки подвеса O вдоль оси Ox на расстояние l, то при движении объекта с центростремительным ускорением $\dot{V}_ц$ возникнут силы инерции $m\dot{V}_ц$, которые создадут относительно оси OB момент $m\dot{V}_ц l$. В то же время вследствие рассогласования между осями Ox и OA при вынужденном повороте гироскопа вокруг оси $O\zeta$ с угловой скоростью $\omega_ц$ будет возникать относительно той же оси OB гироскопический момент (см. § 7), равный $J\Omega\omega_ц \sin\vartheta^*$.

Нетрудно видеть, что направления действия указанных моментов противоположны, поэтому при их равенстве

$$m\dot{V}_ц l = J\Omega\omega_ц \sin\vartheta^*$$

гироскоп не будет реагировать на центростремительные ускорения объекта.

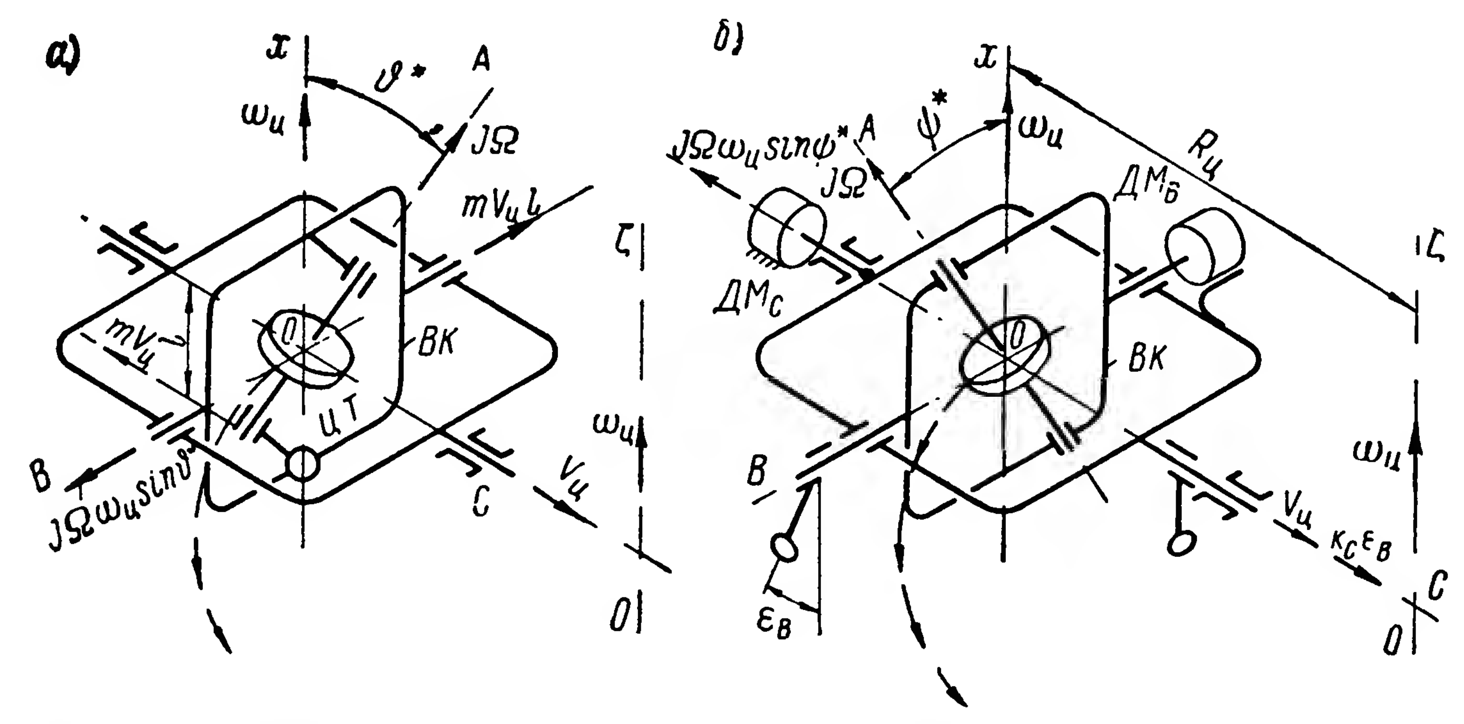


Рис. 174. Схемы компенсации влияния центростремительных ускорений.

Последняя зависимость обусловливает и необходимую величину угла рассогласования между осями OA и Ox, которая, учитывая малость рассматриваемого угла, равна

$$\sin\vartheta^* \approx \vartheta^* = \frac{ml}{J\Omega\omega_ц}\dot{V}_ц = \frac{ml}{J\Omega}V. \quad (544)$$

Описанный метод может быть использован и для компенсации влияния центростремительных ускорений объекта на положение гирогоризонта. При движении объекта с центростремительным ускорением $\dot{V}_ц$ корректирующий маятник, ось подвеса которого параллельна оси OB гироскопа (рис. 174, *б*), отклонится от вертикали $O\zeta$ на угол

$$\varepsilon_B = \frac{\omega_ц^2 R_ц}{g} = \frac{\omega_ц V}{g}.$$

В результате на датчик моментов $ДМ_C$ будет подан сигнал, что обусловит действие на гироскоп относительно оси OC корректирующего момента $M_{к\,C} = K_C\varepsilon_B$.

Если главная ось OA гирогоризонта составляет с осью Ox внутреннего карданова кольца $ВК$ угол ψ^* в плоскости BOx, то при вращении гироскопа вокруг оси $O\zeta$ с угловой скоростью $\omega_ц$ относительно оси OC возникнет гироскопический момент $J\Omega\omega_ц \sin\psi^*$; направление этого момента противоположно корректирующему. Из равенства моментов

$$K_C\varepsilon_B = J\Omega\omega_ц \sin\psi^*$$

можно определить необходимое значение угла

$$\sin\psi^* \approx \psi^* = \frac{K_C \varepsilon_B}{J\Omega\omega_ц} = \frac{K_C}{gJ\Omega} V, \qquad (545)$$

при соблюдении которого главная ось гирогоризонта не будет отклоняться от вертикали при вираже объекта, движущегося со скоростью V.

Полученная зависимость показывает, что при изменении скорости V движения объекта необходимо изменять и величину угла ψ^*. Это не всегда удобно, поэтому во многих системах гирогоризонтов используется метод автоматического выключения коррекции (на время выполнения объектом азимутальных разворотов). Однако в принципе могут быть созданы системы компенсации влияния ускорений и при изменениях скоростей движения.

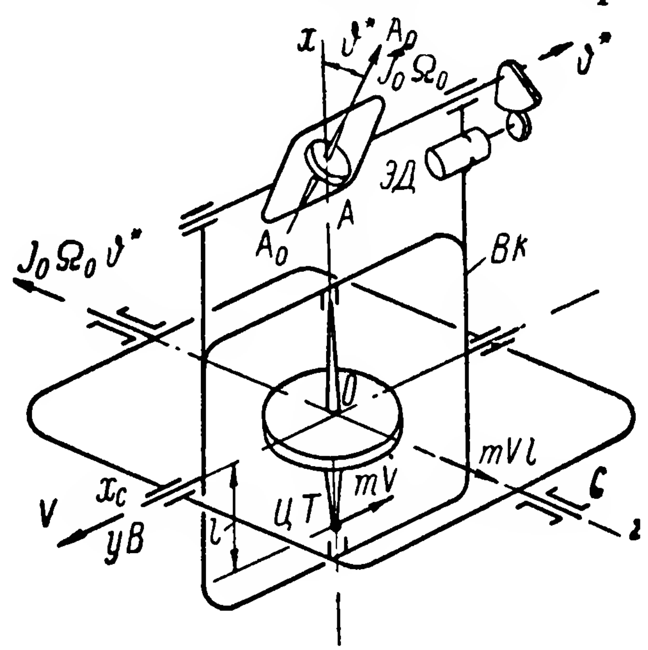


Рис. 175. Схема компенсации влияния ускорений на маятниковую гировертикаль.

Представим себе, например, маятниковую вертикаль (рис. 175), снабженную дополнительным гироскопом, с двумя степенями свободы по отношению к внутреннему карданову кольцу $ВК$ основного гироскопа. Главную ось O_0A_0 дополнительного гироскопа принудительно устанавливают под углом ϑ^* к главной оси OA основного. Согласно условию (544) угол ϑ^* должен быть пропорционален скорости V. Для обеспечения этого условия в приборе используется интегрирующий электродвигатель $ЭД$, управление которым осуществляется от указателя скорости движения объекта.

В описанном устройстве в случае движения объекта с ускорением $\dot{V}$ вдоль оси Ox_c будет возникать не только момент $m\dot{V}l$. Дополнительный гироскоп с кинетическим моментом $J_0\Omega_0$, поворачиваемый принудительно вокруг своей оси подвеса во внутреннем кардановом кольце $ВК$ в сторону левого борта объекта с угловой скоростью $\dot{\vartheta}^*$, обусловит возникновение гироскопического момента $J_0\Omega_0\dot{\vartheta}^*$. Направления действия указанных моментов противоположны. Из равенства этих моментов $m\dot{V}l = J_0\Omega_0\dot{\vartheta}^*$ определяется необходимая величина угловой скорости принудительного поворота дополнительного гироскопа вокруг его оси подвеса:

$$\dot{\vartheta}^* = \frac{ml}{J_0\Omega_0}\dot{V}. \qquad (546)$$

Проинтегрируем выражение (546) и учтем, что при $V = 0$ угол ϑ^* также равен нулю; найдем уже знакомую зависимость (544):

$$\vartheta^* = \frac{ml}{J_0\Omega_0} V.$$

Как видим, при соблюдении условия (546) в рассматриваемом варианте маятниковой гировертикали осуществляется автоматическая компенсация влияния как путевых, так и центростремительных ускорений объекта.

§ 84. ИНЕРЦИАЛЬНАЯ ГИРОВЕРТИКАЛЬ

Совмещение главной оси гироскопа с вертикалью места может быть осуществлено и с помощью метода, аналогичного используемому для удержания главной оси гироскопа направления в плоскости ортодромии (см. § 55). Представим себе гироскоп с тремя степенями свободы (рис. 176), на внутреннем кардановом кольце *ВК* которого смонтирована площадка *П* с двумя акселерометрами a_B и a_C. Продольная ось одного из них расположена в плоскости xOy, второго — в плоскости xOz системы координат $Oxyz$, неизменно связанной с внутренним кардановым кольцом *ВК*.

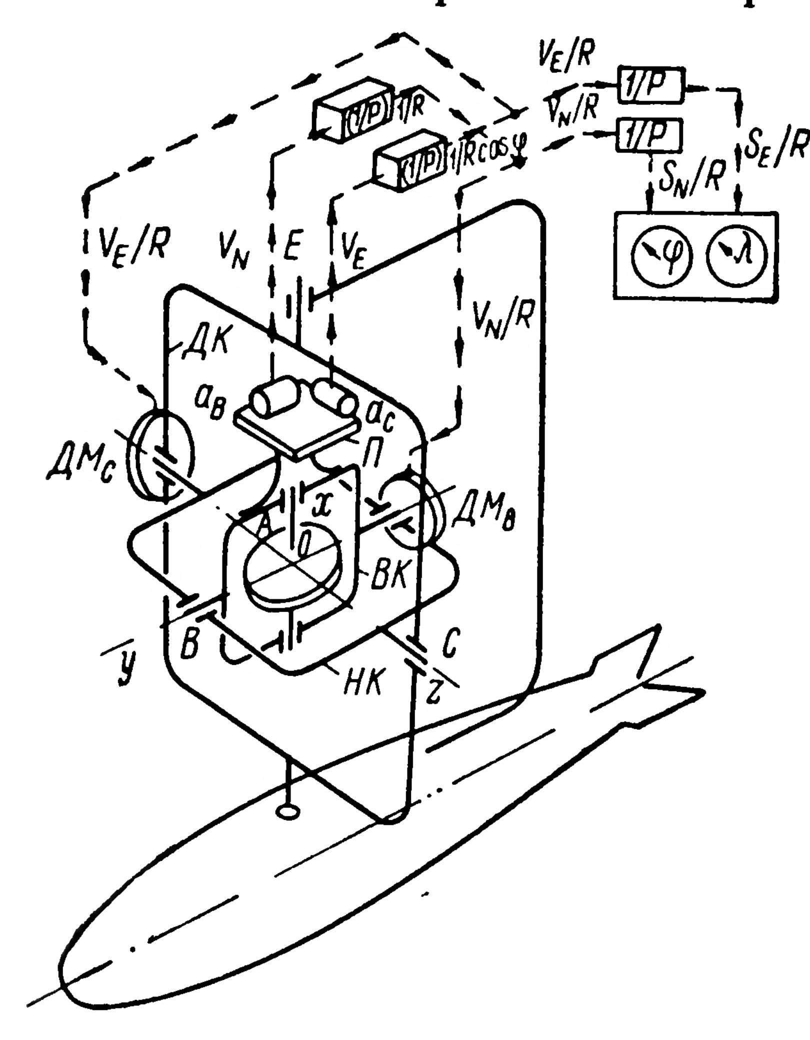


Рис. 176. Инерциальная гировертикаль.

Наружное кольцо *НК* гироскопа устанавливается в дополнительном кардановом кольце *ДК*, ось *OE* подвеса которого монтируется в опорах, жестко закрепленных на корпусе объекта. Использование такого бикарданова подвеса освобождает, как известно (§ 56), прибор от ошибок, порождаемых колебаниями объекта вокруг оси, перпендикулярной плоскости наружного карданова кольца.

В начальный момент времени главная ось *OA* рассматриваемого гироскопического прибора принудительно совмещается с вертикалью места, а его оси подвеса *OB* и *OC* — с плоскостью горизонта, причем таким образом, чтобы одна из них совпадала с полуденной линией. Если такой гироскоп начнет перемещаться совместно с объектом относительно земной поверхности, то акселерометры, установленные на площадке *П*, будут измерять ускорения указанного движения. При этом акселерометр a_B будет измерять ускорение объекта $\dot{V}_N$ вдоль меридиана, а акселерометр a_C — ускорение $\dot{V}_E$ по параллели.

По обеим осям подвеса гироскопа устанавливаются датчики моментов $ДМ_B$ и $ДМ_C$, на которые подаются напряжения, пропорциональные скоростям движения объекта по полуденной линии и по параллели соответственно. Возникающие при этом коррек-

тирующие моменты вызывают прецессию гироскопа, в результате которой его главная ось будет удерживаться совмещенной с вертикалью места.

Для выяснения принципа работы инерциальной гировертикали рассмотрим процесс совмещения ее главной оси с направлением радиуса Земли. Будем полагать, что внутренняя ось *ОВ* подвеса гироскопа совмещена с полуденной линией. Это обеспечивается стабилизацией дополнительного карданова кольца *ДК* прибора в азимуте с помощью любого курсового гироскопического прибора (см. гл. VII—IX). Одновременно будем полагать, что перемещение объекта происходит в плоскости меридиана и притом горизонтально (рис. 177). В этом случае для совмещения главной оси с вертикалью необходимо, чтобы гироскоп прецессировал вокруг точки подвеса (рис. 176), причем скорость прецессии должна обеспечивать поворот гироскопа за любой промежуток времени на угол ϑ, равный углу β поворота объекта за это же время вокруг центра $O_з$ Земли (рис. 177).

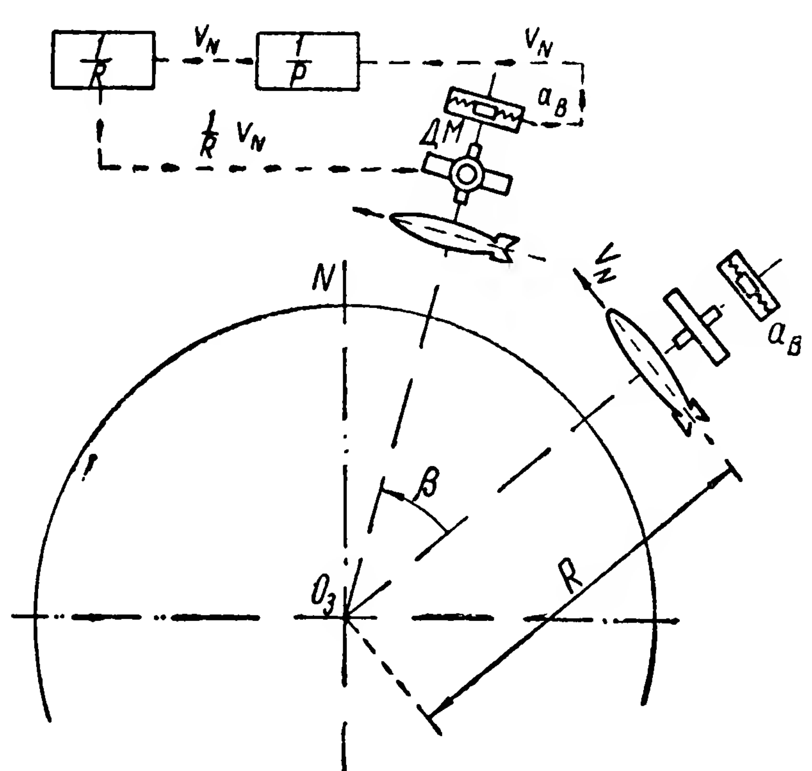


Рис. 177. Принципиальная схема инерциальной гировертикали.

Нетрудно заметить, что при горизонтальном движении объекта в плоскости меридиана со скоростью V_N и удалении R его центра тяжести от центра $O_з$ Земли, угловая скорость объекта

$$\dot{\beta} = \frac{1}{R} V_N = \frac{1}{R} \int \dot{V}_N \, dt. \qquad (547)$$

Если на гироскоп будет действовать создаваемый датчиком *ДМ* корректирующий момент $M_к$, вызывающий прецессию с угловой скоростью

$$\dot{\psi} = \frac{M_к}{J\Omega} = \dot{\beta} = \frac{1}{R} \int \dot{V}_N \, dt, \qquad (548)$$

то главная ось гироскопа останется совмещенной с вертикалью места.

Указанное требование можно выполнить, если управлять датчиком момента *ДМ* через акселерометр a_B. Действительно, снимая с акселерометра a_B сигнал, пропорциональный ускорению $\dot{V}_N$ объекта, и интегрируя его в счетно-решающем устройстве, получают на выходе последнего сигнал, пропорциональный скорости V_N объекта вдоль полуденной линии. Производя в том же счетно-решающем устройстве деление сигнала, пропорционального ско-

рости V_N, на расстояние R, вырабатывают напряжение, пропорциональное уже угловой скорости $\frac{V_N}{R}$. Подавая сформированный указанным образом сигнал на датчик моментов *ДМ*, создают корректирующий момент $M_к$ такой величины и направления, который, действуя на гироскоп, обеспечивает выполнение условия (548).

Описанный принцип управления угловой скоростью прецессии в инерциальной гировертикали (рис. 176) осуществляется по обеим осям *OB* и *OC* подвеса одновременно, благодаря чему главная ось *OA* гироскопа удерживается в вертикальном положении при любом курсе горизонтального движения объекта относительно земной поверхности. Здесь необходимо лишь указать, что сигнал, пропорциональный ускорению $\dot{V}_E$ движения объекта вдоль параллели, после интегрирования должен делиться, согласно изложенному в § 29, на величину $R \cos \varphi$ расстояния от центра тяжести объекта до оси Земли.

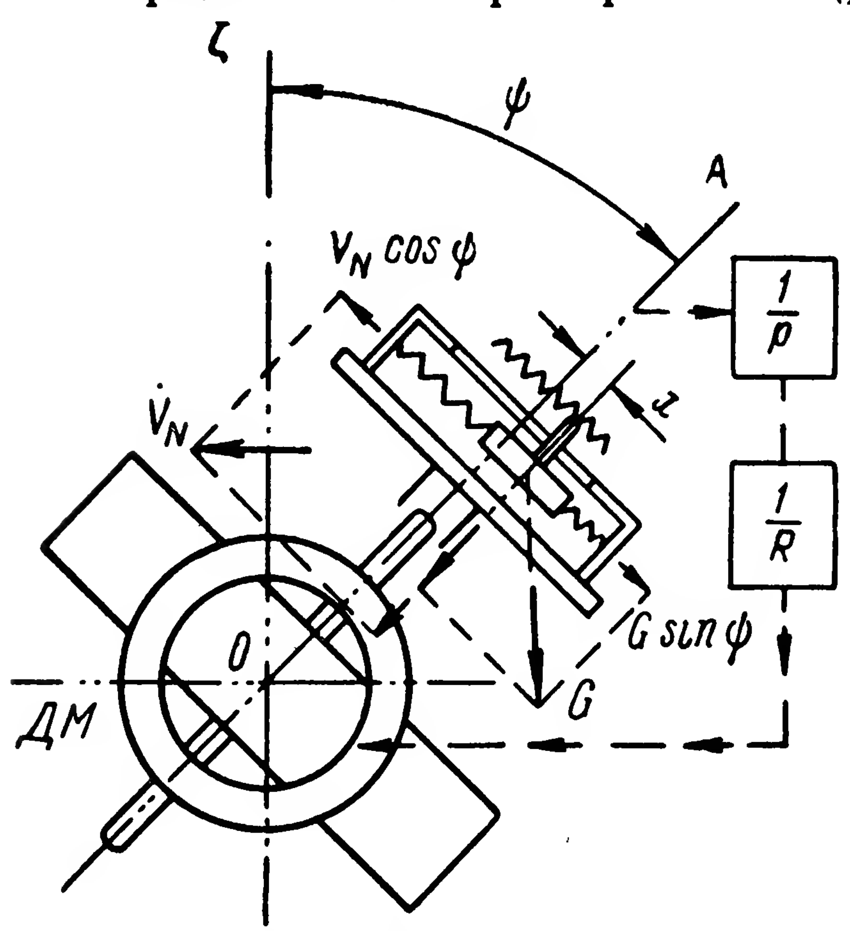


Рис. 178. Схема взаимодействия акселерометра и гироскопа.

Если сигналы, пропорциональные $\frac{V_N}{R}$ и $\frac{V_E}{R \cos \varphi}$, проинтегрировать вторично, то в результате будут получены сигналы, пропорциональные пути, пройденному как в направлении меридиана $\frac{1}{R} S_N$, так и в направлении параллели $\frac{1}{R \cos \varphi} S_E$. Нетрудно видеть, что эти же сигналы пропорциональны приращениям как широты φ, так и долготы λ, что позволяет получать непрерывные сведения о местоположении объекта в любой момент времени.

В том случае, когда в силу тех или иных причин главная ось *OA* гироскопа отклонится от вертикали $O\zeta$ (рис. 178) на угол ψ, под влиянием составляющей $G \sin \psi$ силы G веса массы акселерометра произойдет ее перемещение относительно нулевой точки потенциометра. В результате с обмотки потенциометра будет снят сигнал, пропорциональный не только силе инерции $m\dot{V}_N \cos \psi$, но еще и силе веса $G \sin \psi$. Силы инерции и веса массы акселерометра уравновешиваются упругими силами его пружин:

$$cx = m\dot{V}_N \cos \psi + G \sin \psi,$$

где c — жесткость пружин акселерометра;
x — его перемещение.

Вынесем в полученном равенстве массу m акселерометра за скобки и положим угол ψ величиной малой; в результате найдем перемещение акселерометра:

$$x = \frac{m}{c}(\dot{V}_N + g\psi). \tag{549}$$

Сигнал, пропорциональный перемещению x, после интегрирования будет подаваться на датчик моментов $ДМ$, который при коэффициенте пропорциональности K создаст действующий на гироскоп момент

$$M_к = K\int x\,dt. \tag{550}$$

Под влиянием этого момента гироскоп будет прецессировать вслед за вертикалью $O\zeta$, которая сама вращается в пространстве с угловой скоростью $\dot{\beta}$, определяемой зависимостью (547). При этом угловая скорость прецессии гироскопа относительно вертикали $O\zeta$ определится равенством

$$\dot{\psi} = \dot{\beta} - \frac{M_к}{J\Omega},$$

которое, учитывая выражения (547), (549) и (550), может быть переписано в следующем виде:

$$\dot{\psi} = \frac{V_N}{R} - \frac{\varepsilon}{J\Omega}\int(\dot{V}_N + g\psi)\,dt, \tag{551}$$

где $\varepsilon = K\frac{m}{c}$ — коэффициент пропорциональности, зависящий от конструктивных параметров прибора.

Продифференцировав равенство (551), получим уравнение

$$\ddot{\psi} + \frac{\varepsilon}{J\Omega}g\psi = \left(\frac{1}{R} - \frac{\varepsilon}{J\Omega}\right)\dot{V}_N, \tag{552}$$

описывающее колебания главной оси OA инерциальной гировертикали около положения равновесия, определяемого частным решением уравнения (552).

Нетрудно заметить, что при соблюдении условия

$$\frac{\varepsilon}{J\Omega} = \frac{1}{R} \tag{553}$$

положение равновесия прибора будет совмещено с вертикалью места $O\zeta$, вокруг которой колебания гироскопа происходят с круговой частотой

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{J\Omega}g} = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

и, следовательно, с периодом T; согласно изложенному выше (см. § 74)

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 84{,}4 \text{ мин.}$$

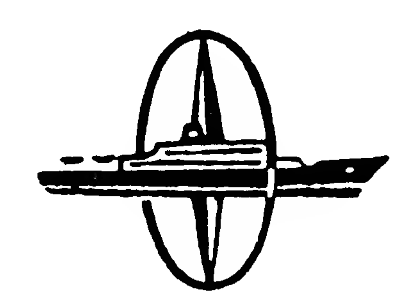
Как видим, при соблюдении условия (553) у инерциальной гировертикали будут отсутствовать ошибки [43] при горизонтальных ускорениях объекта. При этом осуществление ее собственных колебаний с периодом 84,4 мин. практически может быть достигнуто более простыми средствами, чем в маятниковой гировертикали (§ 74). Действительно, учитывая в равенстве (553) величину коэффициента ε, находим

$$\frac{Km}{c} = \frac{J\Omega}{R},$$

откуда следует, что для соблюдения условия (553) достаточно подобрать коэффициент пропорциональности K корректирующего момента $M_к$ равным

$$K = \frac{cJ\Omega}{mR}, \tag{554}$$

что при современных возможностях электротехники не вызывает затруднений.



Глава XI
ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ

§ 85. ОСНОВНЫЕ РАЗНОВИДНОСТИ ГИРОТАХОМЕТРОВ

При решении ряда навигационных задач, требующих выполнения определенных эволюций, возникает необходимость в измерении не только углов, но и угловых скоростей объекта. Так, например, осуществление кораблем циркуляции или летательным аппаратом виража заданного радиуса в установленное время возможно только при выдерживании в процессе выполнения маневра вполне определенной угловой скорости разворота. При более сложных эволюциях требуется измерение еще и угловых ускорений объекта.

Непрерывные измерения угловых перемещений, скоростей и ускорений необходимо и при осуществлении автоматической стабилизации объектов. Чем точнее и с меньшим запаздыванием во времени будут измеряться перечисленные параметры, тем качественнее будет протекать процесс стабилизации, тем на меньшие углы будет отклоняться объект от требуемого направления движения при действии внешних возмущений.

В практике управления объектами встречаются случаи, когда необходимо выполнить определенный маневр по отношению к другому объекту, также перемещающемуся в пространстве. Для правильного выполнения такого маневра необходимо иметь сведения об относительной угловой скорости между перемещающимися объектами.

В процессе взаимных перемещений нельзя установить непосредственный контакт между принятой для производства отсчета исходной системой координат, зафиксированной на маневрирующем объекте, и выбранным ориентиром. Поэтому измерить указанные угловые скорости обычными тахометрическими приборами [1] невозможно. Только гироскопические приборы позволяют произвести необходимое измерение.

В настоящее время существует большое число моделей гироскопических приборов, предназначенных для измерения угловых скоростей. Все эти приборы, называемые гироскопическими тахометрами или гиротахометрами, делятся на три основные

[1] См.: Н. Е. Кобринский. Методы и приборы для измерения угловых скоростей. Изд-во АН СССР, 1941.

группы. В первой группе используется гироскоп с тремя степенями свободы, во второй — с двумя. В третьей группе используется вибрационный гироскоп.

§ 86. ГИРОТАХОМЕТРЫ С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Представим себе гироскоп, ротор *Р* которого вращается вокруг корпуса визирной трубы *ВТ* (рис. 179), жестко закрепленного во внутреннем кардановом кольце *ВК*. Кольцо *ВК* смонтировано

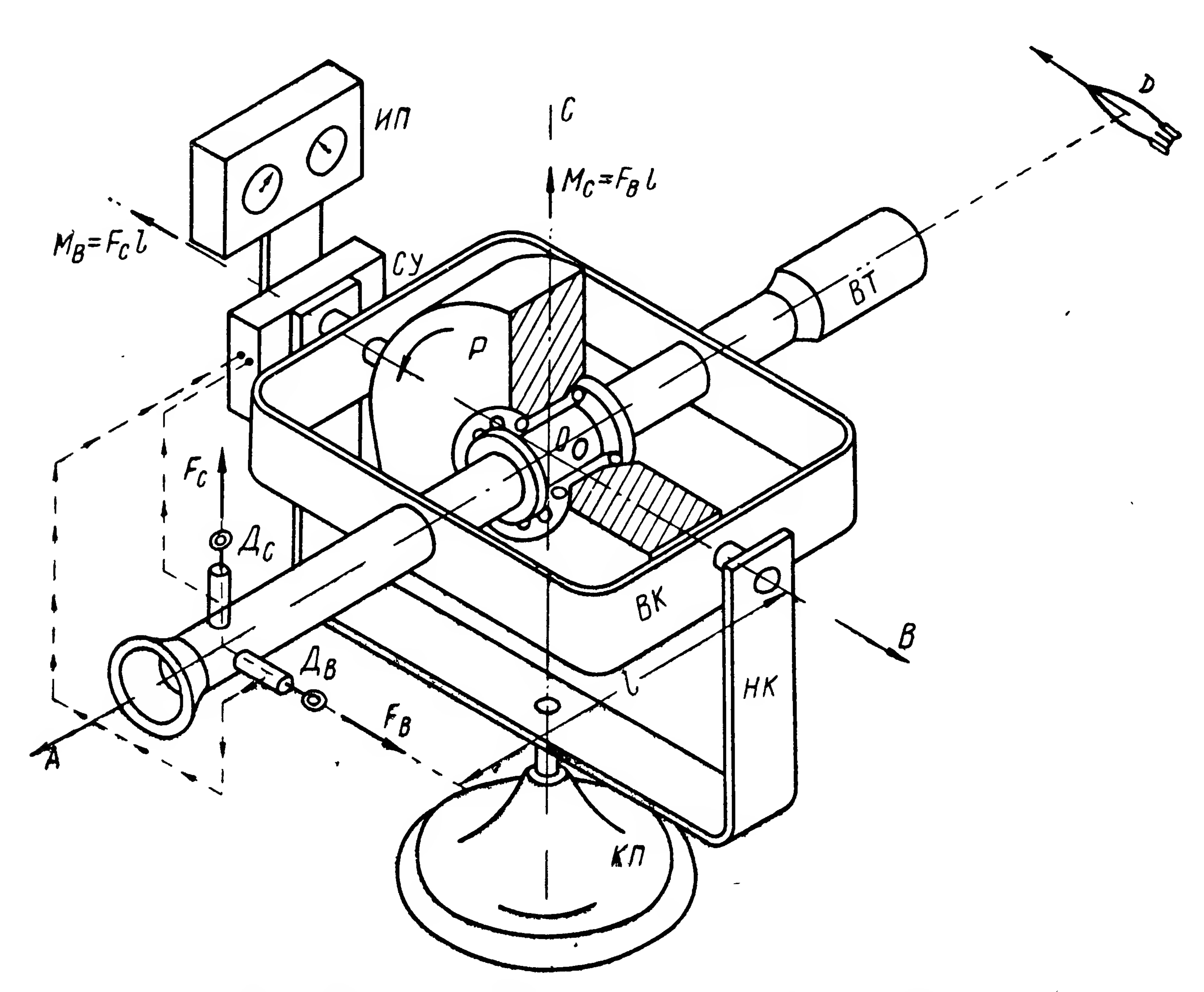


Рис. 179. Гиротахометр с тремя степенями свободы.

на опорах в наружном кардановом кольце *НК*, имеющем свободу вращения вокруг наружной оси *ОС* в корпусе *КП* прибора. Оптическая ось визирной трубы *ВТ* совмещена с главной осью *ОА* гироскопа, обладающего свободой вращения вокруг трех осей *ОА*, *ОВ* и *ОС*.

Наблюдая через визирную трубу *ВТ* такого гироскопического устройства за перемещениями в пространстве объекта *D*, трубу *ВТ* приходится поворачивать вокруг осей *ОВ* и *ОС*. Для создания таких поворотов на гироскоп относительно осей подвеса действуют соответствующими моментами внешних сил. С этой целью на корпусе визирной трубы *ВТ* устанавливают два динамометра $Д_B$

и $Д_C$. Продольная ось динамометра $Д_B$ параллельна оси OB, а динамометра $Д_C$ — оси OC подвеса гироскопа.

Действуя на рукоятки динамометров $Д_B$ и $Д_C$ внешними усилиями F_B и F_C, создают моменты $M_B = -F_C l$ и $M_C = F_B l$, что вызывает прецессионное движение гироскопа, а вместе с ним и визирной трубы BT вокруг осей OC и OB. Выбирая направление и регулируя величину усилий F_B и F_C, обеспечивают непрерывное совмещение оптической оси визирной трубы BT с наблюдаемым объектом D. Угловые скорости трубы BT вокруг осей OB и OC подвеса гироскопа, равные, согласно изложенному в § 15,

$$\dot{\vartheta} = -\frac{F_B l}{J\Omega \cos \vartheta_0}, \quad \dot{\psi} = \frac{F_C l}{J\Omega \cos \vartheta_0}, \tag{555}$$

будут характеризовать угловые скорости перемещения объекта D вокруг осей OB и OC, а их геометрическая сумма $\bar{\omega} = \bar{\dot{\vartheta}} + \bar{\dot{\psi}}$ — угловую скорость объекта относительно точки O подвеса гироскопа.

Из (555) следует, что угловые скорости $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\psi}$ пропорциональны $\frac{F_B}{\cos \vartheta_0}$ и $\frac{F_C}{\cos \vartheta_0}$, так как величины J, Ω и l постоянны и зависят от конструкции прибора. Сигналы, снимаемые с динамометров $Д_B$ и $Д_C$ и пропорциональные внешним усилиям F_B и F_C, направляют в счетное устройство $СУ$. После их деления на $\cos \vartheta_0$ и умножения на постоянный множитель $\frac{l}{J\Omega}$ из счетного устройства $СУ$ выходят сигналы, пропорциональные уже непосредственно $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\psi}$. Измеряя напряжения сигналов по шкалам измерительных приборов $ИП$, судят об угловых скоростях объекта D относительно места установки описанного гироскопического тахометра.

Измерение угловых скоростей вращения какого-либо тела, например той же визирной трубы, с помощью гироскопа с тремя степенями свободы можно осуществить и по несколько иному принципу. Представим, что визирная труба BT (рис. 180) смонтирована на основании $КП$ с помощью карданова подвеса, обеспечивающего свободу ее вращения вокруг осей OB и OC.

На корпусе визирной трубы установлен электродвигатель $ЭД$, приводящий во вращение ротор P. Ротор P соединен с валом электродвигателя $ЭД$ посредством шаровой опоры, аналогично тому, как это было выполнено в гирогоризонте с коррекцией от маятниковой гировертикали (см. рис. 167). Так как центр тяжести ротора совмещен с точкой его опоры, то при неподвижном положении визирной трубы главная ось $O_p x$ гироскопа будет совмещена с продольной осью электродвигателя $ЭД$. Как только визирной трубе будет сообщено вращение вокруг точки O с угловой скоростью ω, сразу же главная ось $O_p x$ гироскопа составит с осью $O\xi$

трубы некоторый угол и, следовательно, вектор $\overline{J\Omega}$ кинетического момента гироскопа уже не будет совмещен с вектором $\overline{M_D}$ момента двигателя.

Для определения характера движения гироскопа относительно визирной трубы BT в качестве подвижной системы координат выберем оси $O\xi\eta\zeta$, связанные с визиром (рис. 180). Будем полагать, что труба BT поворачивается вокруг осей OB и OC с угловыми скоростями ω_B и ω_C. Но при повороте ротора гироскопа

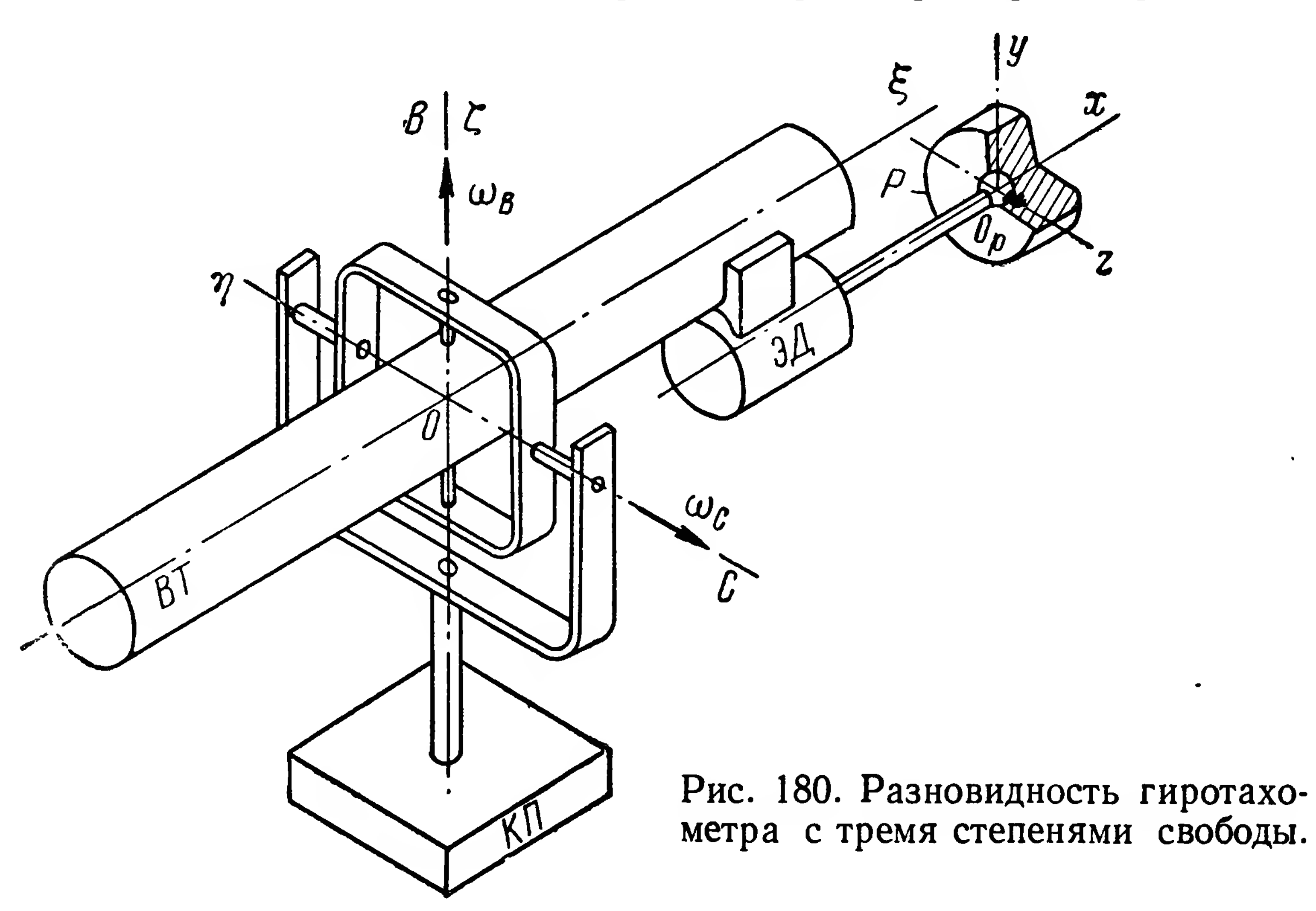


Рис. 180. Разновидность гиротахометра с тремя степенями свободы.

относительно трубы BT на угол ϑ вокруг оси O_py на него относительно оси O_pz начнет действовать составляющая $M_D \sin \vartheta$ крутящего момента M_D двигателя $ЭД$ (см. рис. 167). При аналогичном повороте ротора вокруг оси O_pz на угол ψ на гироскоп относительно оси O_py начнет действовать составляющая $-M_D \sin \psi$ того же момента M_D.

Таким образом в рассматриваемом случае система уравнений (162), если учесть малость углов ϑ и ψ, а также нулевые значения угла ϑ_0 и угловой скорости ω_D и пренебречь нутационными членами, примет вид

$$\left.\begin{aligned} J\Omega\left(\dot{\psi} + \omega_C\right) &= -M_D\psi; \\ J\Omega\left(\dot{\vartheta} + \omega_B\right) &= -M_D\vartheta. \end{aligned}\right\} \qquad (556)$$

Решения уравнений (556)

$$\psi = C_1 e^{-\frac{M_D}{J\Omega}t} - \frac{J\Omega}{M_D}\omega_C;$$

$$\vartheta = C_2 e^{-\frac{M_D}{J\Omega}t} - \frac{J\Omega}{M_D}\omega_B$$

показывают, что при поворотах визирной трубы с угловыми скоростями ω_B и ω_C вокруг осей OB и OC ротор гироскопа вращается вокруг этих осей с теми же угловыми скоростями, но с некоторым отставанием.

Углы отставания определяются частными решениями уравнений (556):

$$\psi_r = -\frac{J\Omega}{M_D}\omega_C; \quad \vartheta_r = -\frac{J\Omega}{M_D}\omega_B. \tag{557}$$

Коэффициент $\frac{J\Omega}{M_D}$ зависит от конструктивных параметров прибора, в связи с чем углы ϑ_r и ψ_r пропорциональны лишь угловым скоростям ω_B и ω_C соответственно. Поэтому по величинам углов ϑ_r и ψ_r рассогласования главной оси гироскопа с оптической осью визирной трубы можно судить об угловых скоростях ее вращения вокруг точки подвеса O.

Пример 36. Определить углы рассогласования между главной осью ротора гироскопа и оптической осью визирной трубы (рис. 180), если ее вращение вокруг осей OB и OC происходит с угловыми скоростями ω_B и ω_C, соответственно равными 0,5 и 0,3 град./сек. Кинетический момент гироскопа $J\Omega = 2300$ *Гсмсек.* Крутящий момент двигателя $M_D = 75$ *Гсм.*

По выражениям (557) находим

$$\psi_r = -\frac{J\Omega}{M_D}\omega_C = -\frac{2300}{75\cdot 57{,}3}0{,}3 = -0{,}16 \text{ рад.} = -9{,}17 \text{ град.};$$

$$\vartheta_r = -\frac{J\Omega}{M_D}\omega_B = -\frac{2300}{7{,}5\cdot 57{,}3}0{,}5 = -0{,}26 \text{ рад.} = -14{,}9 \text{ град.}$$

§ 87. ГИРОТАХОМЕТРЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Для измерения угловых скоростей объектов наиболее широкое распространение на практике получили гиротахометры, основным элементом которых является гироскоп с двумя степенями свободы. При вращении основания такого гироскопического прибора его главная ось совмещается с проекцией вектора угловой скорости основания на плоскость, перпендикулярную оси подвеса (см. § 18 и 32).

Чтобы воспрепятствовать указанному совмещению, в гиротахометре с двумя степенями свободы (рис. 181) используются пружины f_1 и f_2, один конец которых закреплен на рычаге D, второй — на корпусе *КП* прибора. Рычаг D жестко соединен с кардановым кольцом *ВК*. Поэтому при повороте гироскопа вокруг оси OB на угол ϑ пружины f_1 и f_2 деформируются. Возникающая в результате деформации сила упругости F, действуя на гироскоп на плече l, создаст относительно оси OB противоположный по направлению углу поворота ϑ момент

$$M_B = -Fl = -c\Delta l = -cl^2 \sin\vartheta, \tag{558}$$

где c — жесткость пружин;

Δ — деформация пружин.

Для выяснения характера движения рассматриваемого гироскопического прибора при вращении его корпуса *КП* вокруг осей *OB*, *OC* и *OD* с угловыми скоростями ω_B, ω_C и ω_D соответственно вновь обратимся к системе уравнений (162). Заметим, что пружины f_1 и f_2 удерживают главную ось *OA* гироскопа перпендикулярно плоскости *BOC*; следовательно, $\vartheta_0 = 0$. Угол ψ, также равен нулю, так как свобода вращения гироскопа вокруг оси *OC* в рассматриваемом приборе ликвидирована. При этих условиях система уравнений (162) принимает вид

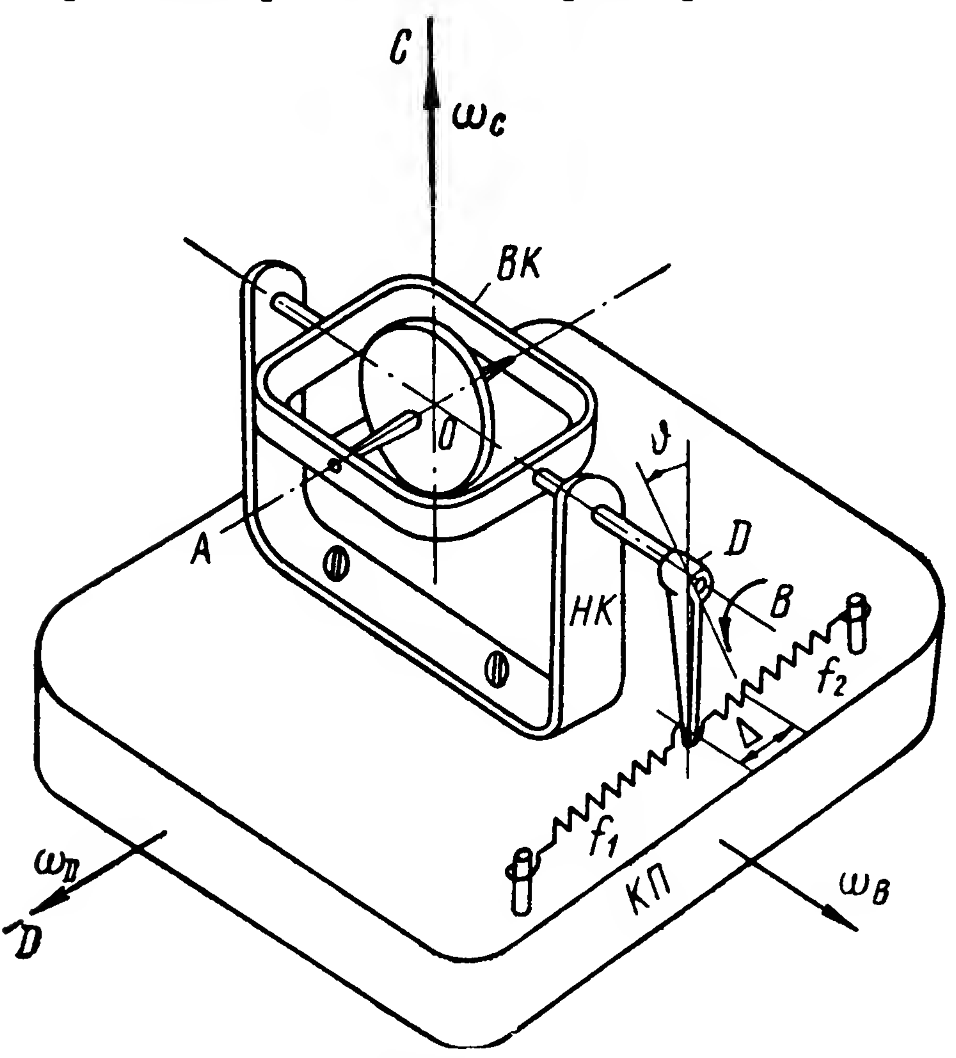


Рис. 181. Гиротахометр с двумя степенями свободы.

$$J_B\ddot{\vartheta}+J\Omega(\omega_C+\omega_D\vartheta)=M_B;$$

$$-J\Omega(\dot{\vartheta}+\omega_B)=M_C.$$

Второе уравнение характеризует величину момента, воспринимаемого деталями крепления скобы *НК* к корпусу *КП* (см. § 18). Силы реакции указанного соединения преодолевают гироскопический момент $J\Omega(\dot{\vartheta}+\omega_B)$, возникающий при сообщении массе ротора движения с поворотным ускорением в результате ее одновременного вращения вокруг осей *OA* и *OB*. Первое уравнение описывает рассматриваемое движение гироскопа. Подставив в него значение момента M_B из (558), обозначив произведение конструктивных постоянных cl^2 коэффициентом *К* и учтя малость угла ϑ, будем иметь

$$J_B\ddot{\vartheta}+J\Omega(\omega_C+\omega_D\vartheta)=-K\vartheta. \tag{559}$$

Переписав полученное уравнение в виде

$$\ddot{\vartheta}+\frac{K+J\Omega\omega_D}{J_B}\vartheta=-\frac{J\Omega\omega_C}{J_B}$$

и положив ω_C и ω_D постоянными, найдем его частное решение

$$\vartheta_r=-\frac{J\Omega\omega_C}{K+J\Omega\omega_D}, \tag{560}$$

и решение соответствующего однородного уравнения

$$\vartheta_p=C_1\cos nt+C_2\sin nt,$$

где

$$n = \sqrt{\frac{K + J\Omega\omega_D}{J_B}}. \tag{561}$$

Общее решение уравнения (559)

$$\vartheta = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt - \frac{J\Omega\omega_C}{K + J\Omega\omega_D} \tag{562}$$

показывает, что гиротахометр с двумя степенями свободы при сообщении ему вынужденного поворота вокруг оси OC с угловой скоростью ω_C начинает совершать незатухающие колебания с периодом

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{J_B}{K + J\Omega\omega_D}}$$

около положения равновесия, определяемого углом ϑ_r, величина (560) которого и является мерой угловой скорости ω_C.

Для демпфирования колебаний гироскопа в гиротахометр вводят успокоитель той или иной конструкции. В качестве примера на рис. 182 приведена схема гиротахометра с электромагнитным успокоителем. В этом случае с кардановым кольцом BK гироскопа, ротор P которого выполнен в виде шара, жестко соединена пластина H из листовой нагартованной меди. При колебаниях гироскопа вокруг оси OB пластина H перемещается в создаваемом электромагнитами $ЭМ$ магнитном поле, обусловливая тем самым возникновение демпфирующего момента, пропорционального угловой скорости $\dot{\vartheta}$. Учитывая этот момент в уравнении (559) и полагая коэффициент момента сил демпфирования равным μ, можем записать

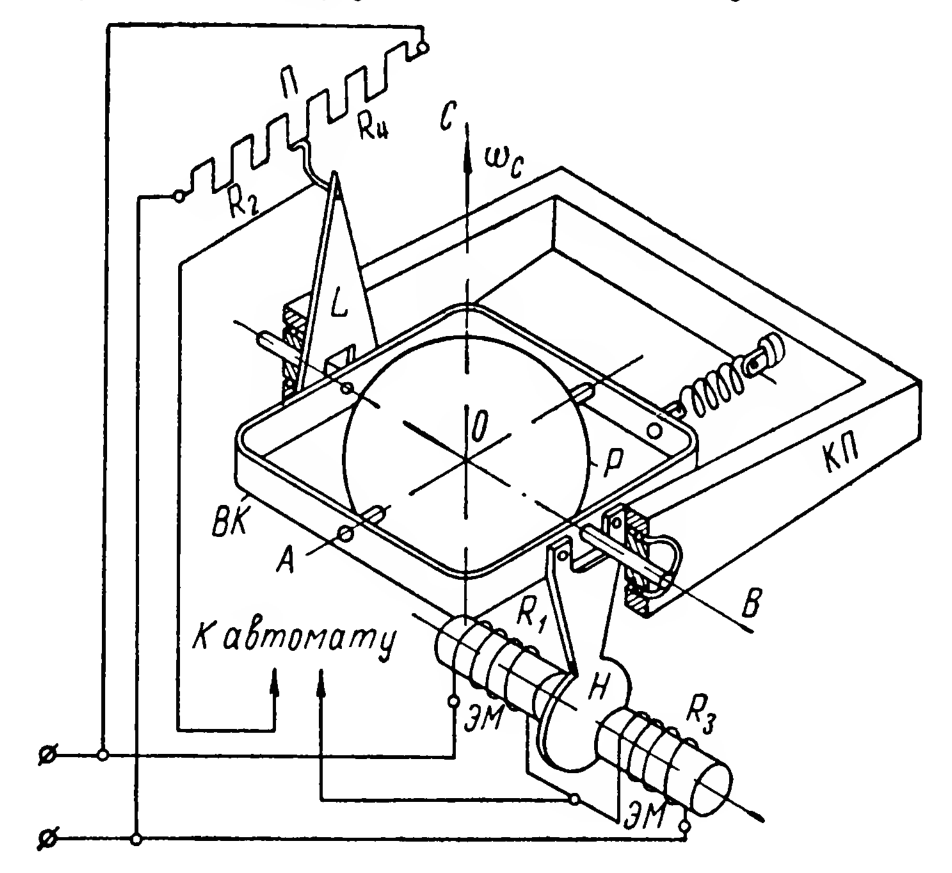


Рис. 182. Гиротахометр с электромагнитным успокоителем.

$$J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega(\omega_C + \omega_D\vartheta) = -K\vartheta - \mu\dot{\vartheta}$$

или

$$\ddot{\vartheta} + \frac{\mu}{J_B}\dot{\vartheta} + \frac{K + J\Omega\omega_D}{J_B}\vartheta = -\frac{J\Omega\omega_C}{J_B}. \tag{563}$$

Частное решение уравнения (563) имеет тот же вид (560), что и в случае гиротахометра без успокоителя. Решение соответствующего однородного уравнения

$$\ddot{\vartheta} + \frac{\mu}{J_B}\dot{\vartheta} + \frac{K + J\Omega\omega_D}{J_B}\vartheta = 0$$

будет определяться значениями корней характеристического уравнения

$$p^2 + ap + b = 0,$$

коэффициенты которого

$$a = \frac{\mu}{J_B}; \qquad b = \frac{K + J\Omega\omega_D}{J_B}.$$

При рациональной конструкции прибора момент восстанавливающих сил всегда больше момента сил демпфирования. Поэтому коэффициент b всегда больше $\left(\frac{a}{2}\right)^2$, в соответствии с чем корни рассматриваемого характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm i\sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (563) будет (см. § 13)

$$\vartheta = e^{-\frac{a}{2}t}(C_1 \cos nt + C_2 \sin nt) - \frac{J\Omega\omega_C}{K + J\Omega\omega_D}. \qquad (564)$$

Как видим, при наличии успокоителя гиротахометр с двумя степенями свободы по прошествии некоторого времени устанавливается в положении равновесия. Продолжительность времени затухания зависит от коэффициента демпфирования $\frac{a}{2} = \frac{\mu}{2J_B}$. Время τ, потребное для уменьшения амплитуды собственных колебаний прибора в ν раз, определяется из условия

$$e^{-\frac{\mu}{2J_B}\tau} = \frac{1}{\nu}$$

или

$$-\frac{\mu}{2J_B}\tau = \ln\frac{1}{\nu}. \qquad (565)$$

При осуществлении гироскопических тахометров с двумя степенями свободы коэффициент K приходится выбирать достаточно большим. В связи с этим во многих практических случаях в выражении (560) представляется возможным пренебречь вторым слагаемым знаменателя и полагать угол

$$\vartheta_r = -\frac{J\Omega\omega_C}{K}. \qquad (566)$$

Равенство (566) позволяет по величине угла ϑ_r с достаточной степенью точности определять значение измеряемой угловой скорости ω_C.

Пример 37. Определить необходимый коэффициент K момента упругих сил пружины гиротахометра с двумя степенями свободы (см. рис. 182), предназначенного для измерения угловых скоростей ω_C. Максимальное значение ω_C не превосходит 10 град./сек., кинетический момент $J\Omega = 1500$ *Гсмсек*, максимально допустимый угол поворота гироскопа вокруг оси подвеса $\vartheta_{r\,max} = 5°$. Вычислить также ошибку измерения ω_C при наличии угловой скорости $\omega_D = 8$ град./сек.

Выразим угловые скорости в радианах в секунду:

$$\omega_C = \frac{10}{57,3} = 0,175 \text{ сек.}^{-1}; \quad \omega_D = \frac{8}{57,3} = 0,14 \text{ сек.}^{-1},$$

а максимальный угол в радианах:

$$\vartheta_{r\,max} = \frac{5}{57,3} = 0,087 \text{ рад.}$$

Подставив значения $\vartheta_{r\,max}$ и ω_C в выражение (566), найдем

$$K = \frac{J\Omega\omega_C}{\vartheta_{r\,max}} = \frac{1500 \cdot 0,175}{0,087} = 3017 \approx 3000 \text{ } Гсм/рад.$$

Чтобы вычислить ошибку измерения угловой скорости ω_C при наличии ω_D, определим величину угла ϑ_r по формуле (566):

$$\vartheta_r = -\frac{J\Omega\omega_C}{K} = -\frac{1500 \cdot 0,175}{3000} = -0,0875 \text{ рад.}$$

и по формуле (560):

$$\vartheta_r^* = -\frac{J\Omega\omega_C}{K + J\Omega\omega_D} = -\frac{1500 \cdot 0,175}{3000 + 1500 \cdot 0,14} = -0,0818 \text{ рад.}$$

Следовательно, искомая ошибка будет составлять

$$\frac{\vartheta_r - \vartheta_r^*}{\vartheta_r} 100 = \frac{0,0875 - 0,0818}{0,0875} 100 = 6,5\%.$$

§ 88. РАЗНОВИДНОСТИ ГИРОТАХОМЕТРОВ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Для съема показаний в гиротахометрах, так же как и в гироскопических приборах иных назначений, используются различные датчики угла. Потенциометрический датчик показан на рис. 182. Здесь карданово кольцо *ВК* снабжено поводком L, несущим на себе движок потенциометра *П*. Обмотка потенциометра включена в цепь постоянного электрического тока параллельно с катушками электромагнитов *ЭМ* успокоителя.

Сопротивления R_1 и R_3 катушек электромагнитов и сопротивления R_2 и R_4, отсекаемые на потенциометре *П* движком L, составляют мост сопротивлений. От средней точки обмоток электромагнитов и от движка L выведены провода, по которым напряжение, снимаемое с диагонали моста, может подаваться как на визуальные приборы, так и в систему того или иного автоматиче-

ского устройства. Это напряжение пропорционально углу ϑ_r, а следовательно, и угловой скорости ω_C.

В некоторых случаях, например при вираже летательного аппарата, нет необходимости точно определять величины угловой скорости объекта, а достаточно знать лишь ее направление. Для этой цели также используются гироскопические тахометры упрощенной конструкции (рис. 183). На кардановом кольце такого гироскопического прибора, получившего название указателя поворотов, жестко крепится поводок, связанный через рычажную передачу N со стрелкой L. Шкала прибора имеет лишь три деления: одно центральное и два крайних, обозначенных буквами *П* и *Л*. Кроме того,

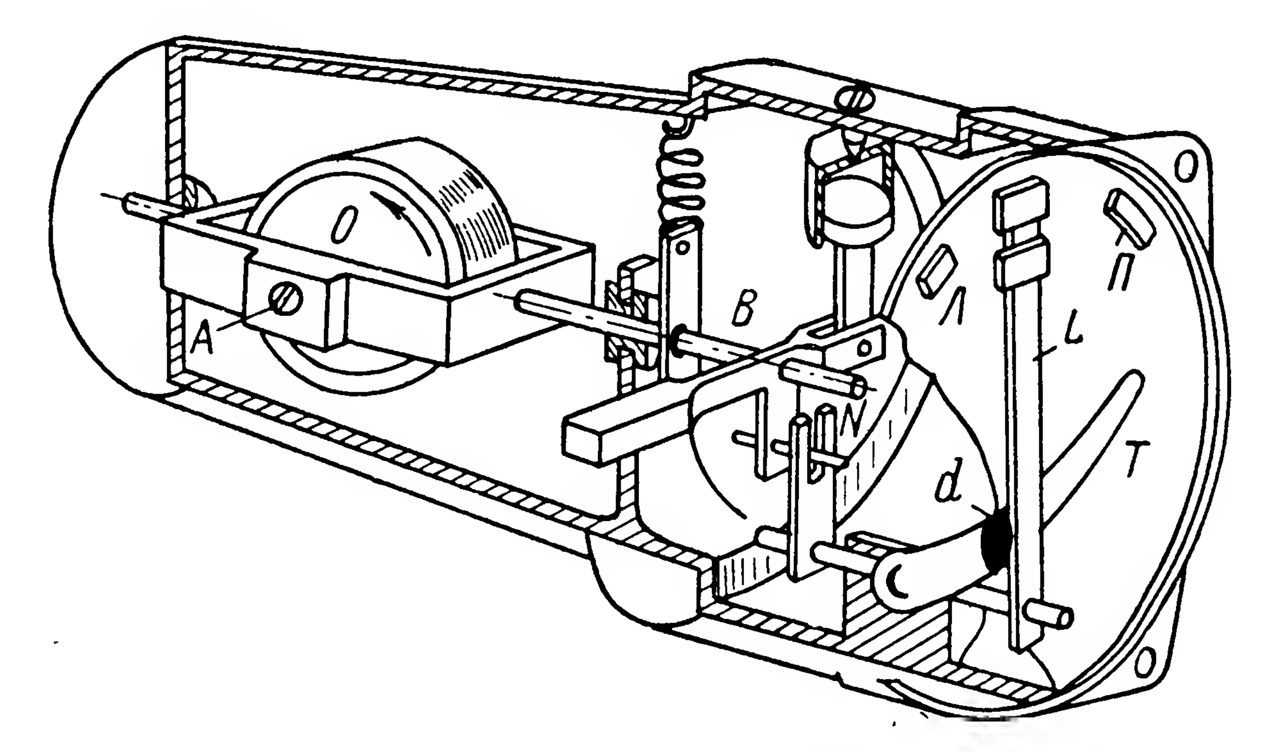


Рис. 183. Гироскопический указатель поворотов.

описываемый прибор снабжают маятниковым кренометром, выполненным в виде изогнутой стеклянной трубки T, внутри которой помещен шарик d.

Одновременная оценка показаний гиротахометра и маятникового кренометра позволяет обнаруживать отклонения летательного аппарата от положения, соответствующего нормальному полету. Так, при прямолинейном полете стрелка L тахометра должна быть совмещена с центральным делением шкалы, а шарик d должен находиться в нулевом положении. При вираже, когда гироскоп повернется вокруг оси OB на угол ϑ_r, шарик d кренометра установится по равнодействующей силы тяжести и центробежных сил инерции. Так, как при правильном выполнении виража плоскость крыльев летательного аппарата должна располагаться перпендикулярно вектору указанной равнодействующей, то шарик d кренометра и в этом случае будет находиться в нулевом положении.

Как видим, пользуясь указателем поворотов, можно легко контролировать правильность движения объекта. Для этого достаточно и при вираже, и при горизонтальном полете удерживать шарик d кренометра в нулевом положении. Несоблюдение указанного условия будет сигнализировать о нарушении правильного режима полета.

Если необходимо измерить угловые скорости объекта с высокой точностью и притом в большом диапазоне их изменений, используют так называемые гиротахометры с приводом на нуль. Принципиальная схема такого прибора представлена на рис. 184. На внутреннем кардановом кольце *ВК* смонтирован ролик *r*, перемещающийся при повороте гироскопа вокруг оси *ОВ* по контактным ламелям b_1 и b_2, жестко закрепленным на корпусе *КП*

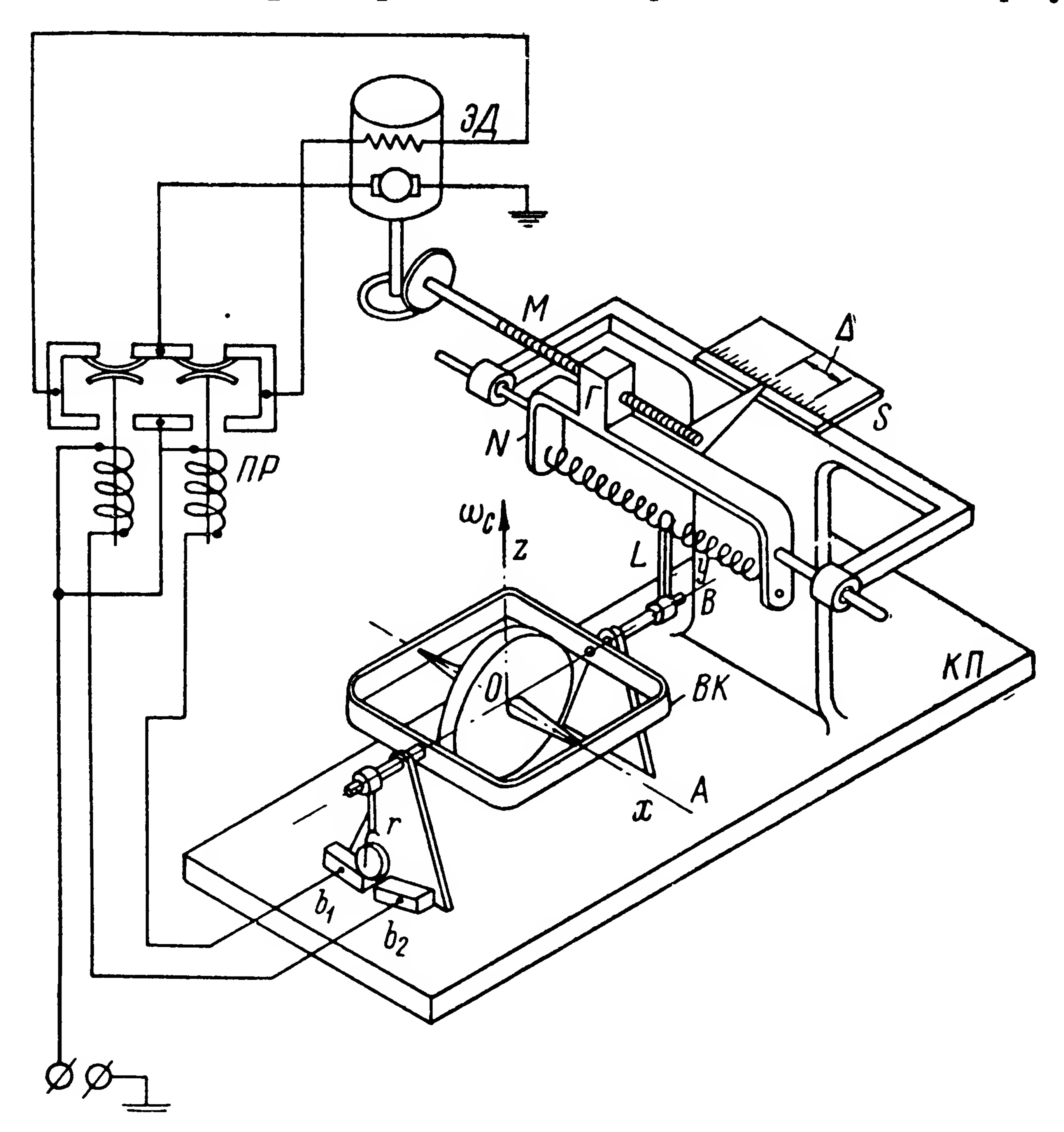


Рис. 184. Гиротахометр с приводом на нуль.

прибора. С поводком *L* гиротахометра соединены две спиральные пружины, смонтированные в серьге *N*, соединенной с ходовым винтом *М* при помощи гайки *Г*.

При вращении корпуса *КП* прибора с угловой скоростью ω_C главная ось *ОА* гироскопа повернется вокруг оси подвеса *ОВ* на угол ϑ_r, определяемый по (566), и спиральные пружины будут деформированы на величину Δ. Одновременно с гироскопом вокруг оси *ОВ* повернется и ролик *r*. Последний замкнет одну из контактных ламелей, b_1 или b_2, и тем самым через промежуточное реле *ПР* включит ток, питающий электродвигатель *ЭД*.

Электродвигатель *ЭД* приведет во вращение ходовой винт *М*. Направление вращения винта *М* выбирается таким образом, чтобы

гайка $Г$ сообщала серьге N перемещение, при котором гироскоп принудительно возвращается в нулевое положение.

Подобное перемещение деталей прибора будет происходить до тех пор, пока ролик r не займет нейтрального положения между ламелями b_1 и b_2. В этот момент времени, соответствующий возвращению гироскопа в исходное положение, ток в цепи электродвигателя $ЭД$ прервется и движение серьги N прекратится. Однако серьга N будет смещена относительно нулевого положения на величину Δ деформации пружины, которая будет мерой угловой скорости. Снабжая серьгу N индексом, можно определить величину измеряемой угловой скорости по шкале S, градуированной в соответствующем масштабе. Если вместо шкалы S снабдить прибор датчиком величины деформации Δ, то снимаемый с него сигнал, пропорциональный угловой скорости ω_C, может быть передан в то или иное автоматическое устройство.

В шариковых подшипниках, используемых в качестве опор подвеса гиротахометров, неизбежно существуют силы сухого трения. Создаваемый ими момент оказывает непосредственное влияние на точность прибора. Действительно, учитывая в уравнении (559) действующий на гироскоп момент сил сухого трения и полагая в нем $\omega_D = 0$, можем записать

$$J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\omega_C = -K\vartheta - M_{0\text{т}}\,\text{sign}\,(\dot{\vartheta}).$$

Из последнего уравнения следует, что положение равновесия гиротахометра будет определяться углом

$$\vartheta_r = -\frac{J\Omega\omega_C \pm M_{0\text{т}}}{K}.$$

Как видим, наличие момента сил трения в опорах подвеса обусловливает ошибку $\pm\frac{M_{0\text{т}}}{K}$ в измерении угловой скорости ω_C тем большую, чем больше величина $M_{0\text{т}}$. Кроме того, величина угла ϑ_r отлична от нуля только в том случае, когда гироскопический момент $J\Omega\omega_C$ превышает момент $M_{0\text{т}}$ сил трения. Следовательно, момент сил трения ограничивает величину минимальной угловой скорости, измеряемой гироскопическим тахометром:

$$\omega_{C\,\min} \geqslant \frac{M_{0\text{т}}}{J\Omega}. \tag{567}$$

Чем меньше момент $M_{0\text{т}}$, тем меньшую угловую скорость будет измерять гироскопический тахометр. Таким образом, для повышения качества прибора момент сил трения в опорах подвеса гироскопа должен быть снижен до возможного минимума.

Для уменьшения вредного влияния сил сухого трения на показания гиротахометров в современных конструкциях применяют торсионные и жидкостные подвесы. Торсионный под-

вес гироскопа показан на рис. 185. Внутреннее кольцо *ВК* вместе с вращающимся в нем ротором подвешивается в корпусе *КП* прибора с помощью двух торсионов *f*, выполняемых обычно в виде плоских стальных пластин.

При таком подвесе в случае поворота корпуса *КП* вокруг оси *ОС* гироскоп, стремящийся совместить свою главную ось *ОА* с осью *ОС* вынужденного поворота, начнет деформировать торсионы *f*, закручивая их вокруг оси *ОВ*. В результате возникнет момент сил упру-

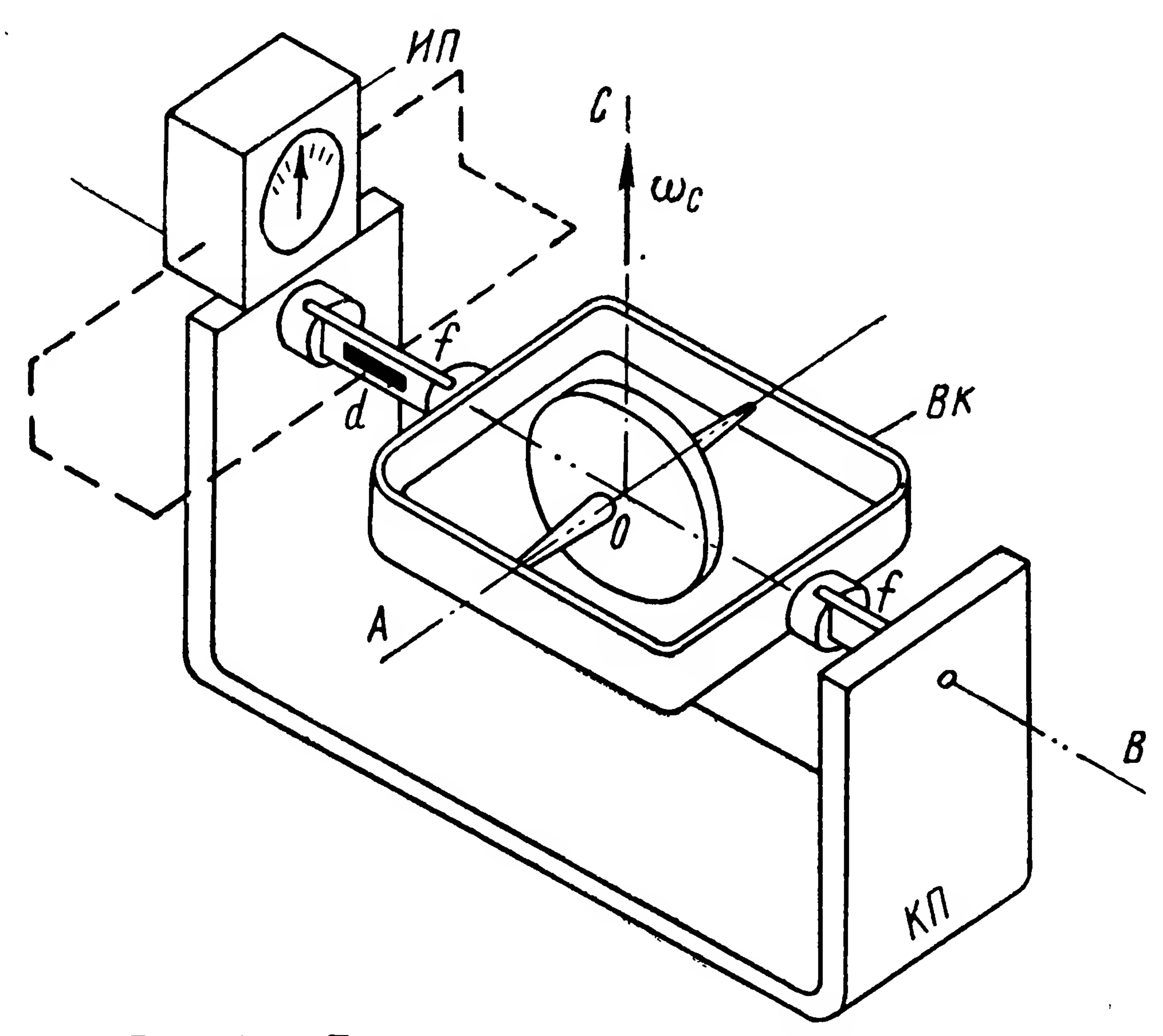


Рис. 185. Гиротахометр на торсионном подвесе.

гости материала торсионов, стремящийся вернуть гироскоп в первоначальное положение. Равенство восстанавливающего и гироскопических моментов обусловит величину угла ϑ_r поворота гироскопа, соответствующего положению его динамического равновесия. Для съема показаний гиротахометра используются тензометрические датчики *d* [6], сигналы которых после усиления подаются либо на индикаторный прибор *ИП*, либо в систему автоматического устройства.

При жидкостном подвесе гиротахометра роль внутреннего карданова кольца выполняет герметически закрытый полый цилиндр *ВК* (рис. 186), называющийся поплавком. Внутри цилиндра *ВК* на специальном кронштейне *L* размещен ротор *Р* гироскопа, имеющий свободу вращения вокруг оси *ОА*.

Поплавок *ВК* вместе с ротором *Р* имеет свободу вращения в наружном цилиндре *КП*, являющемся корпусом прибора. Между внутренней поверхностью корпуса *КП* и наружной поверхностью поплавка *ВК* залита поддерживающая жидкость, плотность кото-

рой выбирается так, чтобы вес поплавка уравновешивался его подъемной силой в жидкости. Поэтому опоры, установленные по оси OB подвеса гироскопа, почти не несут нагрузки, в связи с чем моменты сил трения в них практически мало отличны от нуля.

Если корпус *КП* описываемого гиротахометра начать вращать вокруг оси OC с угловой скоростью ω_C, то главная ось OA гироскопа будет, как известно (см. § 8), поворачиваться вокруг оси OB.

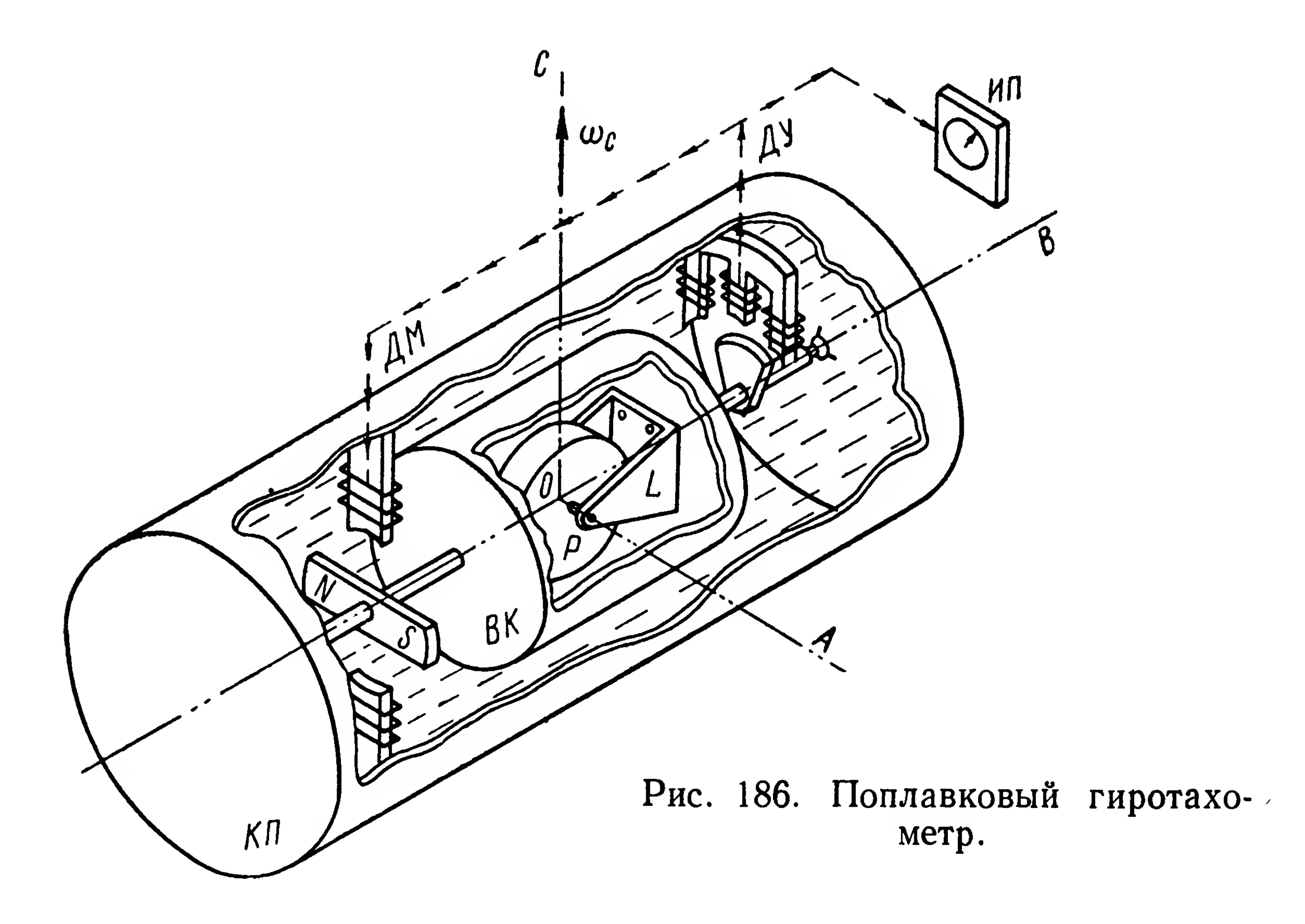


Рис. 186. Поплавковый гиротахометр.

Вместе с ротором будет поворачиваться и якорь индукционного датчика угла *ДУ*. Сигнал, снимаемый с этого датчика, подается на индикаторный прибор *ИП* или же в систему автоматического управления и одновременно на управляющие обмотки датчика момента *ДМ*, с помощью которого создается восстанавливающий момент, пропорциональный углу ϑ.

При повороте поплавка *ВК* вместе с ротором P вокруг оси OB, кроме восстанавливающего момента, возникает еще момент сил сопротивления поддерживающей жидкости. Таким образом, движение поплавкового гиротахометра будет описываться тем же дифференциальным уравнением (563), которое было получено при исследовании схемы гиротахометра на шариковых подшипниках (рис. 182). Этим подтверждается их динамическая общность.

§ 89. ПОВЕДЕНИЕ ГИРОТАХОМЕТРА С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ ОБЪЕКТА

При колебаниях объекта его угловая скорость ω_C непрерывно изменяется во времени. Если изменения ω_C носят гармонический характер: $\omega_C = \omega_{0C} \sin qt$, то уравнение (563), при $\omega_D = 0$

принимает вид

$$\ddot{\vartheta} + \frac{\mu}{J_B}\dot{\vartheta} + \frac{K}{J_B}\vartheta = -\frac{J\Omega}{J_B}\omega_{0C}\sin qt. \tag{568}$$

Решение соответствующего однородного дифференциального уравнения будет определяться первым слагаемым выражения (564). Частное решение уравнения (568) будем искать в виде

$$\vartheta_r = N\cos qt + L\sin qt. \tag{569}$$

Подставив значение угла ϑ_r из (569) и его производных $\dot{\vartheta}_r$ и $\ddot{\vartheta}_r$ в уравнение (568), будем иметь

$$-q^2N\cos qt - q^2L\sin qt + \frac{\mu}{J_B}(-qN\sin qt + qL\cos qt) +$$

$$+ \frac{K}{J_B}(N\cos qt + L\sin qt) = -\frac{J\Omega}{J_B}\omega_{0C}\sin qt.$$

Приравняв коэффициенты при тригонометрических членах в обеих частях полученного равенства, найдем

$$(K - J_Bq^2)N + \mu qL = 0;$$

$$(K - J_Bq^2)L - \mu qN = -J\Omega\omega_{0C}.$$

Совместное решение последних уравнений позволяет определить значения амплитуд:

$$N = \frac{J\Omega\omega_{0C}\mu q}{(K - J_Bq^2)^2 + \mu^2q^2}; \qquad L = -\frac{J\Omega\omega_{0C}(K - J_Bq^2)}{(K - J_Bq)^2 + \mu^2q^2}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (568) будет характеризоваться выражением

$$\vartheta = e^{-\frac{\mu}{2J_B}t}(C_1\cos nt + C_2\sin nt) +$$

$$+ \frac{J\Omega\omega_{0C}}{(K - J_Bq^2)^2 + \mu^2q^2}[\mu q\cos qt - (K - J_Bq^2)\sin qt],$$

где

$$n = \frac{\sqrt{4J_BK - \mu^2}}{2J_B}. \tag{570}$$

Полагая в нем

$$\frac{\mu q}{(K - J_Bq^2)^2 + \mu^2q^2} = \sin\lambda, \qquad \frac{K - J_Bq^2}{(K - J_Bq^2)^2 + \mu^2q^2} = \cos\lambda,$$

можем записать

$$\vartheta = e^{-\frac{\mu}{2J_B}t} (C_1 \cos nt + C_2 \sin nt) -$$

$$- \frac{J\Omega\omega_0 c}{\sqrt{(K - J_Б q^2)^2 + \mu^2 q^2}} \sin (qt - \lambda), \tag{571}$$

где

$$\lambda = \operatorname{arc\,tg} \frac{\mu q}{K - J_Б q^2}. \tag{572}$$

Как видим, при гармонических колебаниях объекта движение гироскопа вокруг оси подвеса состоит из собственных и вынужденных колебаний. Собственные колебания гироскопа, характеризуемые первым слагаемым выражения (571), по прошествии некоторого времени исчезнут. С этого момента движение гироскопа практически можно рассматривать состоящим лишь из вынужденных колебаний

$$\vartheta = - \frac{J\Omega\omega_0 c}{\sqrt{(K - J_Б q^2)^2 + \mu^2 q^2}} \sin (qt - \lambda),$$

происходящих с частотой q изменения угловой скорости ω_C и с некоторым сдвигом λ по фазе.

Вынося K за знак корня, перепишем последнее выражение в следующем виде:

$$\vartheta = - \frac{J\Omega\omega_0 c}{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{J_B}{K} q^2\right)^2 + \frac{\mu^2}{K^2} q^2}} \sin (qt - \lambda).$$

Учитывая, что, согласно формуле (570), отношение $\sqrt{\frac{K}{J_B}}$ характеризует круговую частоту n собственных колебаний гироскопа при отсутствии демпфирующего устройства и производя преобразование

$$\frac{\mu^2}{K^2} q^2 = \left(\frac{J_B \mu}{J_B K} q\right)^2 = \left(\frac{\mu}{J_B n^2} q\right)^2 = \left(\frac{\mu}{J_B n}\right)^2 \cdot \frac{q^2}{n^2},$$

можем записать:

$$\vartheta = - \frac{J\Omega\omega_0 c}{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{q^2}{n^2}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{J_B n}\right)^2 \frac{q^2}{n^2}}} \sin (qt - \lambda). \tag{573}$$

Сравнив выражения (573) и (566), нетрудно убедиться в том, что коэффициент

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{q^2}{n^2}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{J_B n}\right)^2 \frac{q^2}{n^2}}} = \sigma \tag{574}$$

характеризует динамические искажения измерения угловой скорости объекта при его гармонических колебаниях.

Как следует из равенства (574), величина коэффициента σ зависит от соотношения между частотами n собственных и q вынужденных колебаний и от значения коэффициента $\nu = \frac{\mu}{J_E n}$, характеризующего интенсивность демпфирования собственных колебаний гироскопа. На рис. 187, *а* приведены зависимости[1] коэффициента динамичности σ от отношения $\frac{q}{n}$ при различных

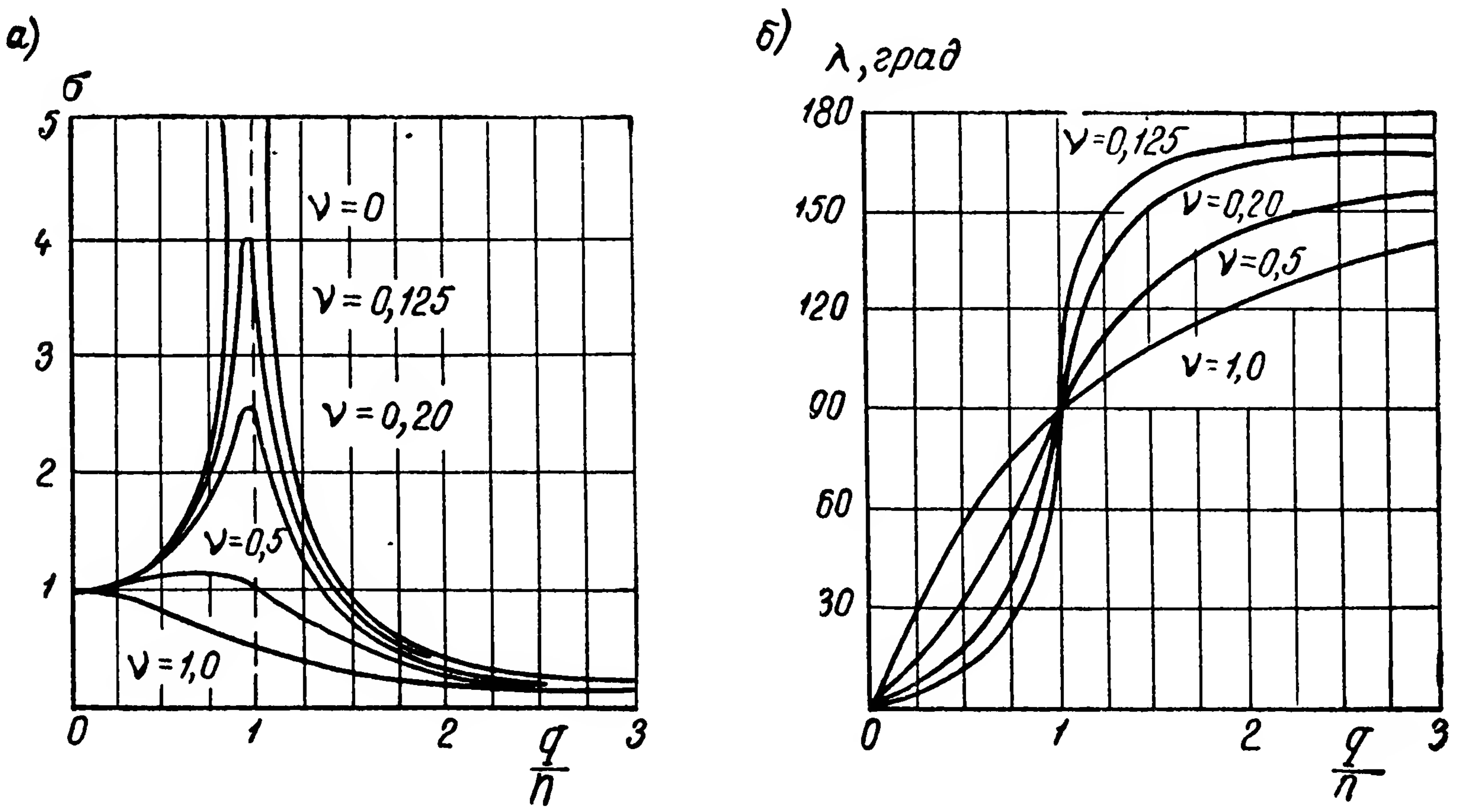


Рис. 187. Амплитудно-частотная (*а*) и фазо-частотная (*б*) характеристики гиротахометра.

значениях ν. Пользуясь указанными зависимостями, называемыми амплитудно-частотными характеристиками, представляется возможным определить необходимый коэффициент момента демпфирования μ и допустимое соотношение между частотами n и q, при которых коэффициент динамичности σ не превысит допустимого значения. Чем ближе это значение к единице, тем меньшим должно быть отношение q к n, что имеет место при $n \gg q$.

На качество прибора влияет и величина λ сдвига фазы. Этот параметр особенно важен для гиротахометров, используемых в системах автоматического регулирования и стабилизации. Чем меньше сдвиг фазы λ, тем выше точность процесса стабилизации. С увеличением λ качество процесса ухудшается, а при $\lambda \geqslant \frac{\pi}{2}$ его осуществление становится невозможным. Вот почему при оценке качества гиротахометра и выяснении возможности его использования в заданных условиях работы должен быть определен диапазон изменений угла λ.

---

[1] См.: Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье. Курс теоретической механики. Т. II, ГИТТЛ, 1955, стр. 86.

Из (572) следует, что величина угла λ, определяемая из выражения

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\mu q}{K - J_B q^2} = \frac{\nu}{1 - \frac{q^2}{n^2}} \cdot \frac{q}{n},$$

также зависит от соотношения между частотами q и n колебаний гироскопа и от коэффициента $\nu = \frac{\mu}{J_B n}$.

Характер этой зависимости, называемой фазо-частотной характеристикой, показан на рис. 187, *б*.

§ 90. ВИБРАЦИОННЫЙ ГИРОТАХОМЕТР

Как показывает выражение (567), силы трения в опорах подвеса отрицательно влияют на точность измерения угловых скоростей и на чувствительность гиротахометра с двумя степенями свободы. Этим недостатком не обладают так называемые вибрационные

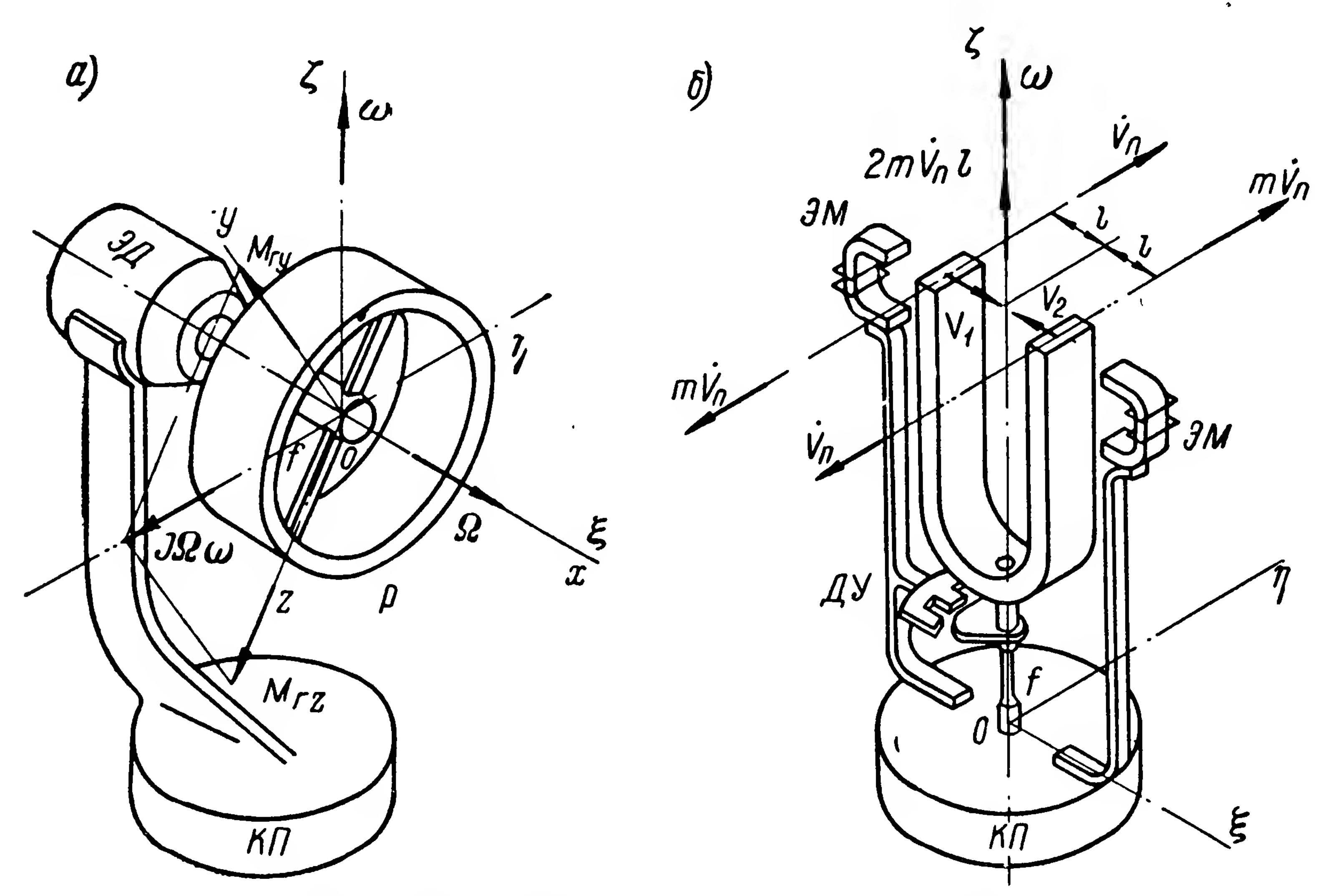


Рис. 188. Вибрационные гиротахометры.

гироскопы, прототипом которых может служить описанный ранее (§ 6) гибкий ротор.

В настоящее время имеется много опытных образцов вибрационных гиротахометров [10, 46], которые могут быть разбиты на две группы: вибрационные гиротахометры роторного и камертонного типов.

Вибрационный гиротахометр роторного типа состоит из ротора *Р* (рис. 188, *а*), выполненного в виде обода, соединенного с валом электродвигателя *ЭД* посредством плоской пружинки *f*. Корпус электродвигателя жестко укреплен на основании *КП*

прибора. Приводя во вращение вал электродвигателя *ЭД*, сообщают одновременно вращение вокруг оси $O\xi$ с угловой скоростью $\dot{\varphi} = \Omega$ и ротору P. При вращении основания *КП* прибора вокруг оси $O\zeta$ с угловой скоростью ω, масса ротора P, стремясь в силу присущей ей инерции сохранить первоначальное направление движения (см. § 8), будет отклоняться от плоскости $\eta O\zeta$, поворачиваясь вокруг оси $O\eta$. Пружинка f начнет деформироваться, создавая момент упругости, уравновешивающий момент гироскопической реакции $M_г = J\Omega\omega$.

Вектор $\overline{M}_г$ гироскопического момента, как известно (см. § 7), перпендикулярен векторам $\overline{\Omega}$ и $\overline{\omega}$ и в нашем случае совмещен с осью $O\eta$, неподвижной относительно корпуса *КП* прибора. В то же время оси Oy и Oz, связанные с телом ротора P, изменяют свое положение в системе координат $O\xi\eta\zeta$. При этом проекции момента $M_г$ на оси Oy и Oz ротора определятся выражениями:

$$M_{г\,y} = M_г \sin\varphi = J\Omega\omega\sin\Omega t;$$

$$M_{г\,z} = M_г \cos\varphi = J\Omega\omega\cos\Omega t.$$

Моменты $M_{г\,y}$ и $M_{г\,z}$ уравновешиваются моментами сил упругости пружинки f относительно осей Oy и Oz ротора. При прямоугольном сечении пружинки f ее сопротивление кручению вокруг оси Oz весьма велико по сравнению с сопротивлением изгибу относительно оси Oy. Поэтому практически составляющая $M_{г\,z}$ гироскопического момента $M_г$ будет погашена силами упругости пружинки f при исчезающе малых деформациях. Однако для уравновешивания составляющей $M_{г\,y}$ потребуется значительный момент упругих сил пружинки f, возникающий при повороте ротора P вокруг оси Oy. Величина $M_{г\,y}$ изменяется по гармоническому закону. Этому же закону будет подчинено изменение и угла ϑ поворота ротора P вокруг оси Oy.

Как видим, ротор P совершает колебания вокруг оси Oy. В процессе этих колебаний составляющая $M_{г\,y}$ уравновешивается моментами сил упругости пружинки f, сопротивления окружающей среды и инерции массы ротора. Силы упругости создают относительно оси Oy момент $K\vartheta$, пропорциональный углу ϑ, силы сопротивления среды — момент $\mu\dot{\vartheta}$, пропорциональный угловой скорости $\dot{\vartheta}$, и, наконец, силы инерции — момент $J_э\ddot{\vartheta}$, зависящий от экваториального момента инерции $J_э$ ротора и его ускорения $\ddot{\vartheta}$. Таким образом, уравнение движения ротора P вокруг оси Oy в рассматриваемом гироскопическом устройстве примет вид

$$J_э\ddot{\vartheta} + \mu\dot{\vartheta} + K\vartheta = J\Omega\omega\sin\Omega t. \tag{575}$$

Вибрационный гиротахометр камертонного типа показан на рис. 188, *б*. Основой прибора является упругое U-образное тело, похожее на обычный камертон, соединенное с основанием *КП*

торсионом f. Ветви камертона располагаются между электромагнитами *ЭМ*, возбуждающими их колебания с круговой частотой Ω. В результате ветвям камертона сообщаются линейные перемещения в плоскости $\xi O\zeta$ во взаимно противоположных направлениях со скоростями V_1 и V_2, изменяющимися по гармоническим законам:

$$V_1 = V_0 \sin \Omega t; \quad V_2 = V_0 \sin (\Omega t + \pi). \tag{576}$$

Если основание *КП* колеблющегося указанным образом камертона начать поворачивать вокруг оси $O\zeta$ с угловой скоростью ω, то материальные частицы его ветвей будут вынуждены совершать движение с поворотным ускорением $\dot{V}_п$. Масса ветвей камертона в силу присущей ей инерции будет, как известно (см. § 5), оказывать сопротивление движению с поворотным ускорением. Поэтому ветви камертона начнут поворачиваться вокруг оси $O\zeta$, закручивая торсион f на угол ψ. Возникающие при этом моменты сил упругости $K\psi$, сил сопротивления среды $\mu\dot{\psi}$ и сил инерции $J_\zeta\ddot{\psi}$ уравновесят момент сил Кориолиса $2m\dot{V}_п l$:

$$J_\zeta\ddot{\psi} + \mu\dot{\psi} + K\psi = 2m\dot{V}_п l.$$

Но, как следует из выражения (16), поворотное ускорение $\dot{V}_п = 2V\omega \sin \alpha$, следовательно, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ последнее уравнение, если учесть (576), примет вид

$$J_\zeta\ddot{\psi} + \mu\dot{\psi} + K\psi = 4m\omega V_0 l \sin \Omega t. \tag{577}$$

Сравнив дифференциальные уравнения (575) и (577), убеждаемся в их общности. Нетрудно видеть, что они могут быть заменены одним уравнением

$$J_z\ddot{\delta} + \mu\dot{\delta} + K\delta = Q\omega \sin \Omega t, \tag{578}$$

где J_z — экваториальный момент инерции $J_э$ ротора или момент инерции J_ζ камертона относительно оси $O\zeta$;

δ — угол ϑ поворота ротора вокруг оси Oy или угол ψ скручивания торсиона f, соединяющего камертон с основанием прибора;

Q — конструктивная постоянная, равная либо кинетическому моменту $J\Omega$ ротора, либо произведению $4mV_0 l$ для ветвей камертона.

Решение однородного уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению (578), по аналогии с (564) может быть записано в виде

$$\delta_р = e^{-\frac{\mu}{2J_B}t} (C_1 \cos nt + C_2 \sin nt). \tag{579}$$

Частное решение, полагая $\omega = \text{const}$, будем искать в виде

$$\delta_r = N \cos \Omega t + L \sin \Omega t. \tag{580}$$

Подставив значение (580) для δ_r и его производные $\dot{\delta}_r$ и $\ddot{\delta}_r$ в уравнение (578), получим

$$-N\Omega^2 \sin \Omega t - L\Omega^2 \cos \Omega t + \frac{\mu}{J_z} N\Omega \cos \Omega t -$$

$$-\frac{\mu}{J_z} L\Omega \sin \Omega t + \frac{K}{J_z} N \sin \Omega t + \frac{K}{J_z} L \cos \Omega t = \frac{Q\omega}{J_z} \sin \Omega t.$$

Приравняв коэффициенты при синусе и косинусе в правой и левой частях этого уравнения, найдем

$$N = -\frac{Q\omega (J_z\Omega^2 - K)}{(J_z\Omega^2 - K)^2 + \mu^2\Omega^2}; \qquad L = -\frac{Q\omega\mu\Omega}{(J_z\Omega^2 - K)^2 + \mu^2\Omega^2}.$$

Учитывая значения N и L, перепишем формулу (580) в следующем виде:

$$\delta_r = \frac{Q\omega}{\sqrt{(J_z\Omega^2 - K)^2 + \mu^2\Omega^2}} \sin(\Omega t + \lambda),$$

где

$$\lambda = \operatorname{arc\,tg} \frac{\mu\Omega}{J_z\Omega^2 - K}.$$

Таким образом, общим решением уравнения (578) будет

$$\delta = e^{-\frac{\mu}{2J_B}t} (C_1 \cos nt + C_2 \sin nt) + \frac{Q\omega}{\sqrt{(J_z\Omega^2 - K)^2 + \mu^2\Omega^2}} \sin(\Omega t + \lambda).$$

Как видим, оба типа вибрационных гироскопов (рис. 188) совершают сложное движение, состоящее из собственных затухающих и вынужденных колебаний. Амплитуда вынужденных колебаний пропорциональна угловой скорости ω основания прибора:

$$\delta_m = \frac{Q\omega}{\sqrt{(J_z\Omega^2 - K)^2 + \mu^2\Omega^2}}, \tag{581}$$

причем при равенстве частот $\sqrt{\frac{K}{J_z}}$ собственных и Ω вынужденных колебаний, когда вибрационный гироскоп работает в режиме резонанса, амплитуда вынужденных колебаний достигает максимального значения:

$$\delta_{m\,\max} = \frac{Q}{\mu\Omega}\omega.$$

Настраивая вибрационный гироскоп на резонансный режим, получают возможность по величине амплитуды вынужденных колебаний измерять весьма малые значения угловой скорости ω. Съем показаний вибрационного гироскопа осуществляется с по-

мощью датчиков угла *ДУ*, измеряющих амплитуды колебаний либо торсиона f вокруг оси $O\zeta$, либо ротора P вокруг оси Oy (рис. 188). Наибольшие трудности при практической реализации вибрационных гиротахометров вызывают измерения амплитуд малых колебаний их упругих элементов и обеспечение необходимого демпфирования собственных колебаний системы. При недостаточной интенсивности демпфирования вибрационный гироскоп будет обладать большими динамическими погрешностями.

§ 91. ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ

Ограничивая свободу вращения гироскопа вокруг обеих осей его подвеса, можно получить прибор, измеряющий одновременно угловые скорость и ускорение объекта. Такой прибор называется гиротахоакселерометром. Представим себе, что свобода вращения гироскопа (рис. 189) вокруг осей OB и OC подвеса ограничена пружинами f_B и f_C. Если основание *КП* такого гироскопа поворачивается вокруг осей OB и OC с переменными во времени угловыми скоростями

$$\omega_B = \dot{\beta}; \quad \omega_C = \dot{\alpha},$$

то ротор гироскопа, стремясь сохранить положение своей оси стабильным в пространстве, будет деформировать пружины f_B и f_C, вызывая тем самым действие на гироскоп восстанавливающих моментов

$$M_B = -K_B\vartheta; \quad M_C = -K_C\psi.$$

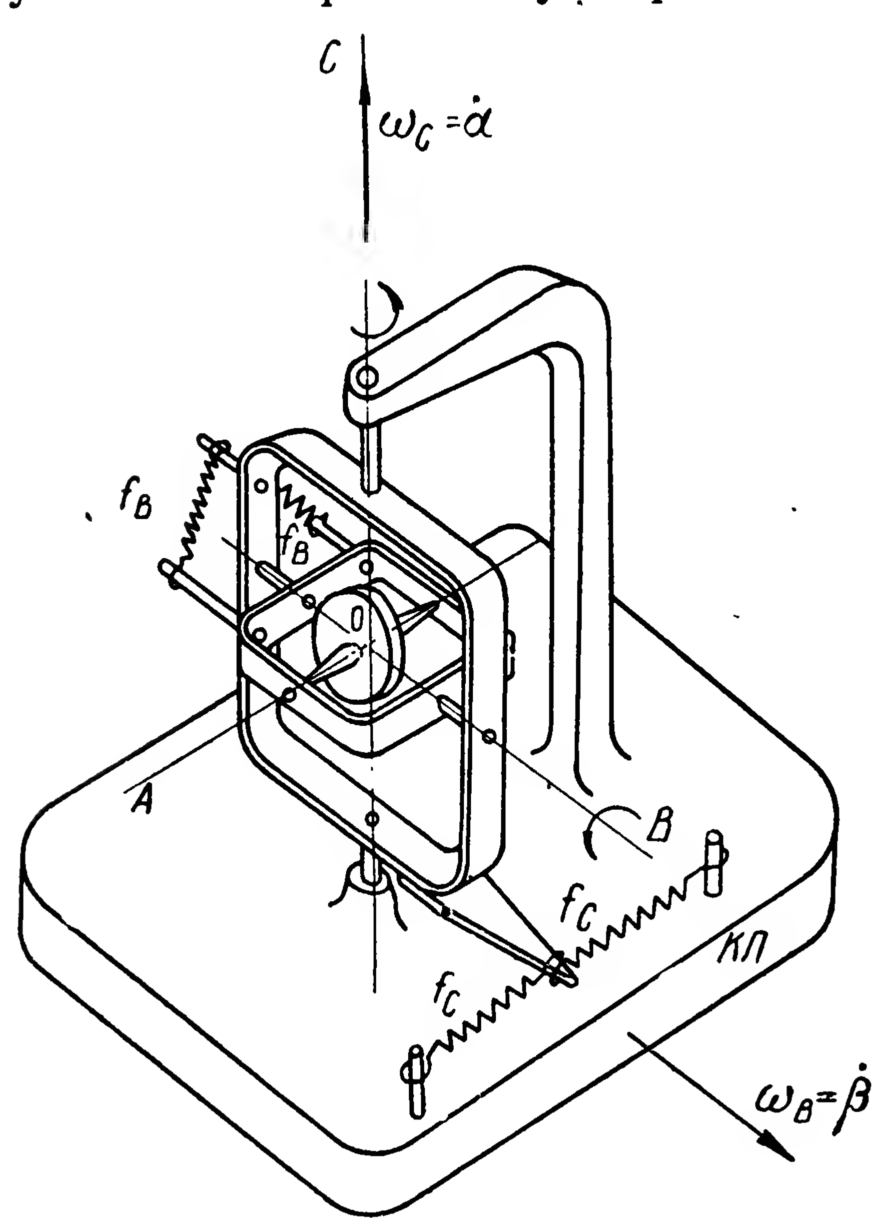


Рис. 189. Гиротахоакселерометр.

Подставляя значения M_B и M_C в уравнения (162), учтем, что в рассматриваемом гироскопическом приборе угол $\vartheta_0 = 0$. Пренебрегая на этом основании угловой скоростью ω_D, имеем

$$J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega(\dot{\psi} + \dot{\alpha}) = -K_B\vartheta;$$

$$J_C\ddot{\psi} - J\Omega(\dot{\vartheta} + \dot{\beta}) = -K_C\psi.$$

Опустив в полученной системе нутационные члены, можем записать

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi} + \frac{K_B}{J\Omega}\vartheta &= -\dot{\alpha}; \\ \dot{\vartheta} - \frac{K_C}{J\Omega}\psi &= -\dot{\beta}. \end{aligned}\right\} \quad (582)$$

Определив из первого уравнения (582) величину ϑ и подставив значение $\dot{\vartheta}$ во второе уравнение этой же системы, будем иметь

$$\ddot{\psi} + \frac{K_B K_C}{J^2\Omega^2}\psi = -\ddot{\alpha} + \frac{K_B}{J\Omega}\dot{\beta}. \quad (583)$$

Разрешив аналогичным образом систему (582) относительно переменной ϑ, найдем

$$\ddot{\vartheta} + \frac{K_B K_C}{J^2\Omega^2}\vartheta = \frac{K_C}{J\Omega}\dot{\alpha} - \ddot{\beta}. \quad (584)$$

Как следует из уравнений (583) и (584), колебания рассматриваемого гироскопического прибора происходят с частотой

$$n = \frac{\sqrt{K_B K_C}}{J\Omega} \quad (585)$$

около некоторого среднего положения, характеризуемого частными решениями этих уравнений.

В общем случае частные решения уравнений (584) и (583), как известно,[1] определятся выражениями

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_r &= \frac{1}{n}\int_{t_0}^{t}\frac{K_C}{J\Omega}\dot{\alpha}\sin n(t-\tau)\,d\tau - \frac{1}{n}\int_{t_0}^{t}\ddot{\beta}\sin n(t-\tau)\,d\tau; \\ \psi_r &= -\frac{1}{n}\int_{t_0}^{t}\ddot{\alpha}\sin n(t-\tau)\,d\tau + \\ &+ \frac{1}{n}\int_{t_0}^{t}\frac{K_B}{J\Omega}\dot{\beta}\sin n(t-\tau)\,d\tau, \end{aligned}\right\} \quad (586)$$

где t_0 — некоторый фиксируемый момент времени, от которого отсчитывается время τ.

Согласно выражениям (586) среднее положение гироскопа зависит от скоростей и ускорений вращения его корпуса вокруг осей подвеса. В тех случаях, когда требуется раздельное измерение угловой скорости $\dot{\alpha}$ и углового ускорения $\ddot{\alpha}$, коэффициент K_C

[1] См.: В. И: Смирнов. Курс высшей математики. Т. II, Гостехиздат, 1948, стр. 94.

жесткости пружин f_C выбирают весьма большим. При соблюдении последнего условия коэффициенты при переменных $\ddot{\beta}$ и $\dot{\beta}$ будут малы по сравнению с аналогичными коэффициентами при переменных $\dot{\alpha}$ и $\ddot{\alpha}$. В самом деле, вынося в выражениях (586) постоянные величины за знаки интегрирования и учитывая значение (585) частоты n, получим

$$\vartheta_r = \sqrt{\frac{K_C}{K_B}} \int_{t_0}^{t} \dot{\alpha} \sin n (t - \tau)\, d\tau - \frac{J\Omega}{\sqrt{K_B K_C}} \int_{t_0}^{t} \ddot{\beta} \sin n (t - \tau)\, d\tau;$$

$$\psi_r = - \frac{J\Omega}{\sqrt{K_B K_C}} \int_{t_0}^{t} \ddot{\alpha} \sin n (t - \tau)\, d\tau + \sqrt{\frac{K_B}{K_C}} \int_{t_0}^{t} \dot{\beta} \sin n (t - \tau)\, d\tau.$$

При $K_C \gg K_B$ и пренебрежении малыми величинами последние выражения примут вид

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_r &= \sqrt{\frac{K_C}{K_B}} \int_{t_0}^{t} \dot{\alpha} \sin n (t - \tau)\, d\tau; \\ \psi_r &= - \frac{J\Omega}{\sqrt{K_B K_C}} \int_{t_0}^{t} \ddot{\alpha} \sin n (t - \tau)\, d\tau. \end{aligned}\right\} \qquad (587)$$

Как видим, на величину угла ϑ_r практически оказывает влияние лишь $\dot{\alpha}$, а на величину ψ_r — $\ddot{\alpha}$. Именно поэтому рассмотренный гироскопический прибор и получил название гиротахоакселерометра.

В некоторых курсовых автоматических системах необходимо управлять рулями поворота объекта не только по угловым параметрам (α, $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$) отклонения от заданного курса, но и по угловым параметрам (γ, $\dot{\gamma}$ и $\ddot{\gamma}$) крена. При возникновении крена осуществление указанного закона управления обеспечивает своевременную перекладку рулей поворота в сторону крена, предупреждая тем самым скольжение объекта. Сигналы, пропорциональные перечисленным параметрам, перед поступлением на исполнительный механизм должны быть просуммированы. Для этой цели также может быть использован гироскопический прибор, с осей подвеса которого непосредственно снимается требуемый суммарный сигнал. Такой прибор называется демпфирующим гироскопом.

Принципиальная схема такого прибора весьма сходна со схемой гиротахоакселерометра (рис. 189). Отличие между ними заключается в том, что обе пары пружин f_B и f_C (рис. 190), ограничивающие свободу вращения гироскопа вокруг осей подвеса OB и OC, закрепляются непосредственно на корпусе $КП$. Кроме того,

для уменьшения габаритов прибора его наружное кольцо *НК* размещается внутри кольца *ВК*.

Выше было показано, что на величины углов ϑ и ψ поворотов гиротахоакселерометра оказывают влияние угловые скорости вращения объекта вокруг обеих осей *ОВ* и *ОС* подвеса гироскопа.

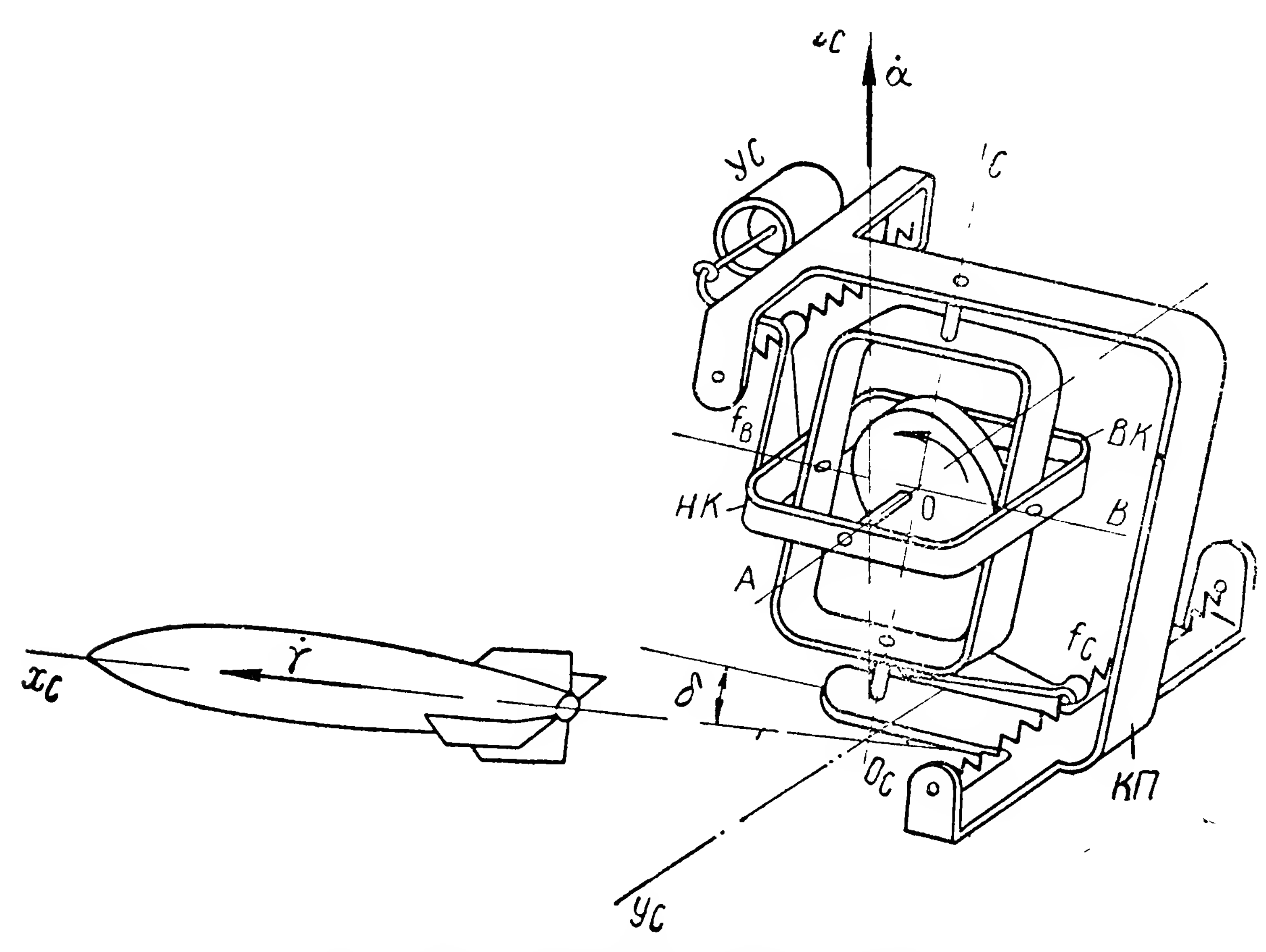


Рис. 190. Демпфирующий гироскоп.

Для обеспечения необходимой интенсивности суммарного сигнала, зависящего от параметров вращения объекта как вокруг оси O_cz_c, так и вокруг оси O_cx_c, корпус *КП* прибора устанавливают под углом δ (рис. 190) к плоскости $x_cO_cy_c$ объекта. При этом оси *ОВ* и *ОС* совмещаются с плоскостью $x_cO_cz_c$.



Глава XII
ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ РАМЫ

§ 92. ПРИНЦИП УСТРОЙСТВА ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛОВЫХ РАМ

Из анализа схем рассмотренных выше гироскопических приборов следует, что момент внешних сил, действующий на гироскоп относительно его наружной оси, как правило, всегда больше момента относительно внутренней оси. Это справедливо даже в том случае, когда на гироскоп действуют лишь моменты сил трения. Действительно, опоры наружной оси подвеса воспринимают всегда бо́льшую нагрузку по сравнению с опорами внутренней оси гироскопа, по крайней мере на величину веса наружного карданова кольца. Тем самым и момент сил трения в наружных опорах больше, чем во внутренних. Кроме того, наружное кольцо гироскопа снабжают обычно устройствами для съема показаний прибора и управления следящими системами, что вызывает увеличение моментов внешних сил, действующих относительно наружной оси подвеса. Наконец, наружное кольцо гироскопа может быть механически связано с самыми различными элементами и приборами, которые при движении объекта должны быть стабилизированы в заданном положении.

На возможность компенсации вредного влияния моментов внешних сил, действующих относительно наружной оси подвеса гироскопа, еще в 1924 году указал советский инженер-изобретатель С. А. Ноздровский.[1] Представим себе гироскоп (рис. 191) с тремя степенями свободы, установленный в корпусе на опорах Q. Если относительно наружной оси OC гироскопа приложен внешний момент $M_{\text{в}\,C}$, то гироскоп, как известно (см. § 15), начнет прецессировать вокруг оси OB с угловой скоростью

$$\dot{\vartheta} = \frac{M_{\text{в}\,C}}{J\Omega \cos \vartheta_0},$$

где ϑ_0 — начальный угол рассогласования между осями OA и OD.

В результате прецессии сразу же относительно оси OC возникнет момент $M_{\text{г}}$ гироскопической реакции (см. § 6), направленный

---

[1] См.: Патент на изобретение № 2168, класс 42с, заявленное 2 августа 1924 года.

противоположно вектору $\overline{M}_{вC}$. При этом величина момента $M_г$ (см. §.7)

$$M_г = J\Omega \cos \vartheta_0 \dot{\vartheta} = J\Omega \cos \vartheta_0 \frac{M_{вC}}{J\Omega \cos \vartheta_0} = M_{вC}.$$

Как видим, гироскопический момент $M_г$ всегда уравновешивает момент $M_{вC}$ внешних сил, обеспечивая тем самым стабильное положение наружного кольца *НК* относительно оси *OC*. Однако продолжительность такой стабилизации весьма ограничена. Прецессируя вокруг оси *OB*, ось *OA* гироскопа будет непрерывно приближаться к наружной оси *OC*, увеличивая угол ϑ_0. Это обстоятельство вызовет увеличение угловой скорости $\dot{\vartheta}$, которая при

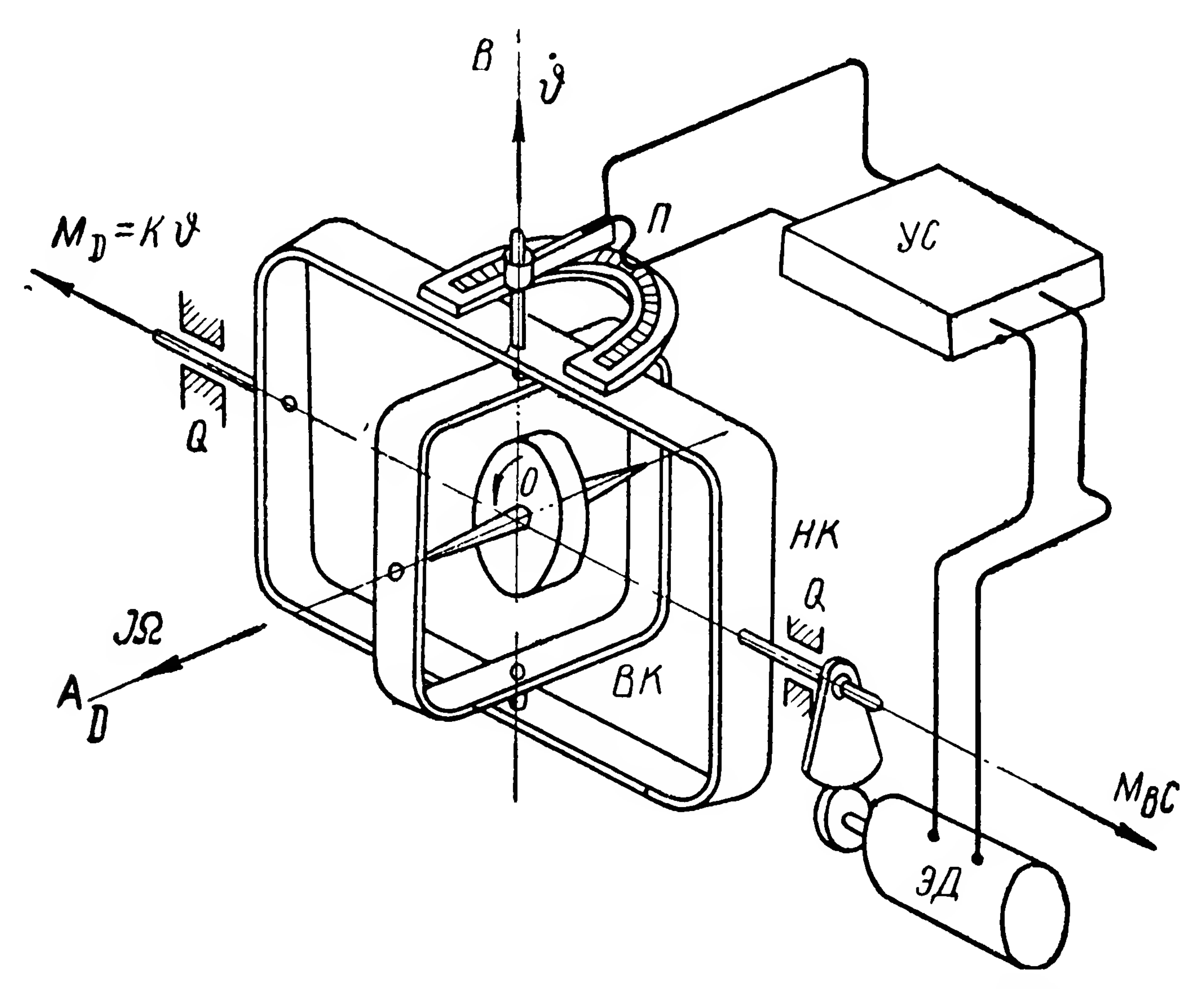


Рис. 191. Принципиальная схема силовой гирорамы.

ϑ_0, близком к $\frac{\pi}{2}$, будет приближаться к бесконечности. Поэтому под влиянием внешнего возмущающего момента $M_{вC}$ гироскоп сравнительно быстро повернется вокруг оси *OB* на угол $\frac{\pi}{2}$ и при совмещении осей *OA* и *OB* перестанет оказывать сопротивление внешнему возмущению, вследствие чего стабильность положения наружного кольца *НК* нарушится.

Чтобы не допускать совмещения осей *OA* и *OC*, С. А. Ноздровский предложил при возникновении внешнего возмущающего момента $M_{вC}$ прикладывать к гироскопу компенсирующий момент, равный по величине, но противоположный по направлению моменту $M_{вC}$. При этом условии суммарный момент внешних сил

относительно оси OC будет равен нулю и прецессия гироскопа вокруг оси OB будет отсутствовать.

Следуя указанному принципу, в современных гироскопических устройствах используется специальный электродвигатель $ЭД$, соединяемый с наружным кольцом $НК$ либо через редуктор, либо непосредственно муфтой. Управление двигателем осуществляется через потенциометрический датчик $П$, обмотка которого закреплена на наружном $НК$, а движок — на внутреннем $ВК$ кардановом кольце. При действии относительно оси OC момента внешних сил $M_{вC}$ описываемый гироскоп начнет прецессировать вокруг оси OB, проворачивая за собой движок потенциометра $П$. Последний сместится относительно нулевой точки, в результате чего с потенциометра будет сниматься сигнал, пропорциональный углу ϑ поворота гироскопа вокруг оси OB.

Снимаемое с потенциометра $П$ напряжение, после усиления в усилителе $УС$, подается на управляющую обмотку электродвигателя $ЭД$. Возникающий при этом момент M_D двигателя будет также пропорционален углу ϑ поворота гироскопа вокруг оси OB. Направление момента M_D выбирается противоположным внешнему возмущающему моменту.

Как видим, компенсация внешнего возмущающего момента $M_{вC}$ в рассматриваемом приборе осуществляется моментом M_D двигателя $ЭД$, называемым опорным или стабилизирующим. Для создания необходимого стабилизирующего момента M_D гироскоп должен повернуться вокруг оси OB на некоторый угол ϑ. Так как этот поворот является следствием прецессии гироскопа, ось OB часто называют осью прецессии. Равенство моментов $M_{вC}$ и M_D обеспечивает стабильное положение гироскопа относительно оси OC, получившей название оси стабилизации.

Рассматриваемое гироскопическое устройство обладает тем преимуществом, что действующие на него нагрузки фактически воспринимаются опорным двигателем. Гироскоп лишь управляет этим двигателем. Поэтому, выбирая соответствующую мощность опорного двигателя, можно осуществить стабилизацию значительных масс, используя для этого гироскоп с малым кинетическим моментом.

Величина внешнего возмущающего момента, воспринимаемого гироскопическим устройством, зависит в основном от прочности наружного карданова кольца, которое в рассматриваемых приборах принято называть рамой.

Поэтому все устройство в целом получило название гироскопической рамы или гирорамы. В связи с тем, что гироскопической рамой можно стабилизировать значительные массы, подверженные воздействию больших моментов внешних возмущающих сил, описанные устройства называют еще и гироскопическими силовыми рамами или стабилизаторами.

§ 93. ПОВЕДЕНИЕ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ РАМЫ НА ПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ

Для выявления характера движения гироскопической рамы по отношению к ее основанию, вращающемуся в пространстве, вновь обратимся к системе уравнений (162). Из схемы прибора (рис. 191) видно, что при наличии стабилизирующего двигателя главная ось OA будет отклоняться от оси OD лишь на малые углы. Поэтому начальный угол ϑ_0 равен нулю. При малом угле ϑ величина $\omega_D\vartheta$ будет также величиной малой.

Будем полагать, что коэффициент пропорциональности момента M_D углу ϑ равен K. Учтем также, что при $\vartheta > 0$ момент $M_D > 0$. При этих условиях, если пренебречь силами трения в опорах подвеса, система (162) может быть переписана в виде

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\left(\dot{\psi} + \omega_C\right) &= 0; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\left(\dot{\vartheta} + \omega_B\right) &= -M_{\text{в}\,C} + K\vartheta. \end{aligned}\right\} \qquad (588)$$

Если в полученной системе уравнений опустить из рассмотрения нутационные члены, то исследуемые уравнения примут более простой вид:

$$\dot{\psi} = -\omega_C;$$

$$J\Omega\dot{\vartheta} + K\vartheta = M_{\text{в}\,C} - J\Omega\omega_B.$$

Решения последних уравнений будут определяться по выражениям

$$\left.\begin{aligned} \psi &= -\int_0^t \omega_C\,dt + C_1; \\ \vartheta &= C_2 e^{-\frac{K}{J\Omega}t} + \frac{M_{\text{в}\,C} - J\Omega\omega_B}{K}, \end{aligned}\right\} \qquad (589)$$

из которых следует, что гироскопическая рама стабилизирует свое положение в пространстве только относительно оси OC.

Если гирорама установлена на вращающемся основании, то относительное перемещение между ними происходит лишь вокруг оси стабилизации. Угловая скорость этого перемещения равна по величине, но обратна по направлению угловой скорости ω_C вращения основания вокруг оси OC в пространстве. Стабилизация положения гироскопа относительно оси OB отсутствует, гироскоп лишь поворачивается вокруг нее на угол

$$\vartheta_r = \frac{M_{\text{в}\,C} - J\Omega\omega_B}{K},$$

создавая рассогласование между осями OA и OD.

Вот почему описанная гироскопическая рама носит название одноосной или однокомпонентной.

§ 94. РАЗНОВИДНОСТИ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ РАМ

Из изложенного выше следует, что одноосная гироскопическая рама стабилизирует относительно своей наружной оси лишь наружное карданово кольцо. Поэтому она может быть использована только в тех случаях, когда в системе координат $O\xi\eta\zeta$ (рис. 192) должно быть выдержано направление ON, характеризуемое лишь одним углом. Так, например, если объект движется в плоскости $\xi O\eta$, сохраняя наружную ось OC совмещенной с $O\zeta$, то с помощью одноосной гирорамы можно стабилизировать положение плоскости $NO\zeta$, составляющей угол α с плоскостью $\eta O\zeta$.

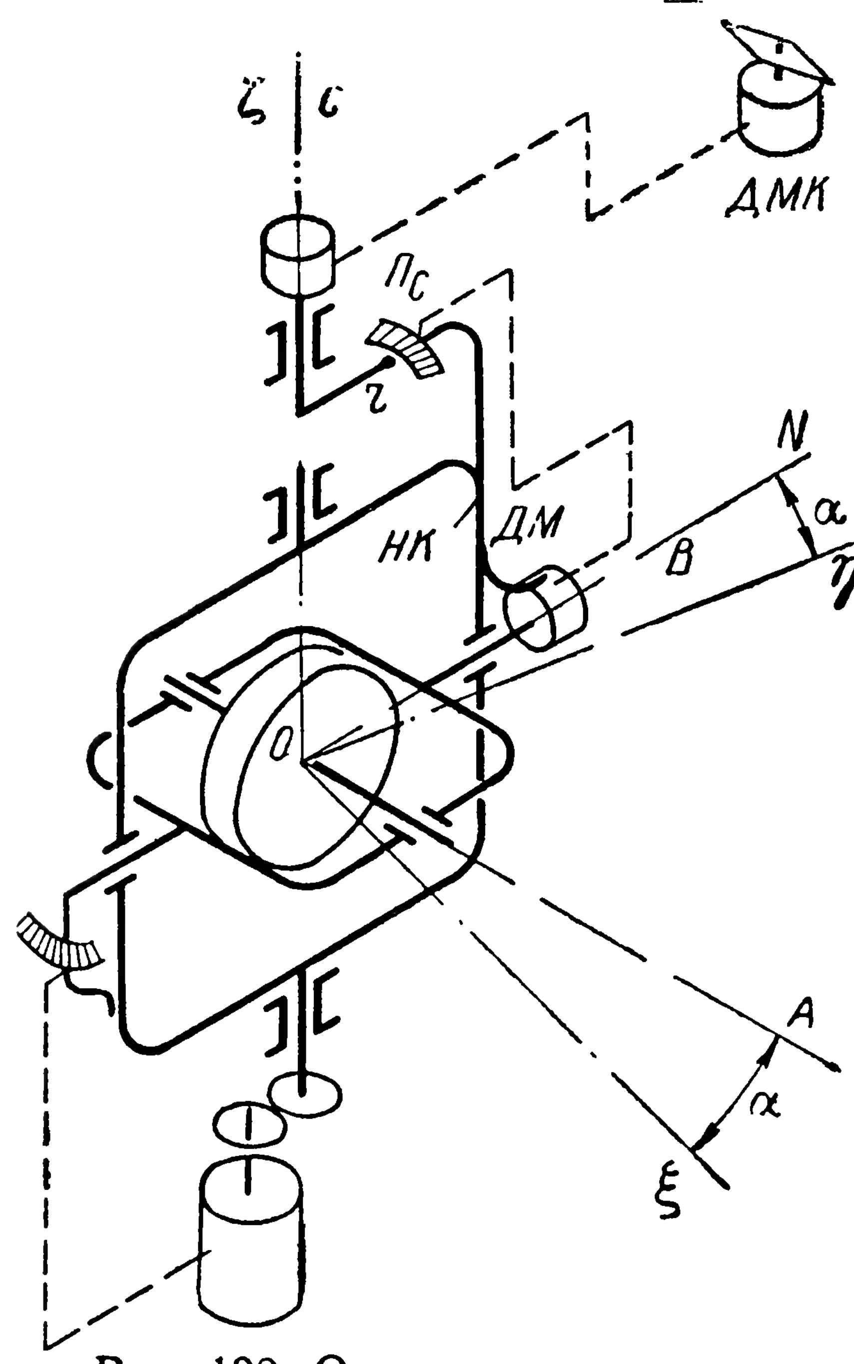


Рис. 192. Одноосная гирорама.

Если система координат $O\xi\eta\zeta$ неподвижна в пространстве и ее угловые скорости ω_B и ω_C равны нулю, то внутренняя ось подвеса OB будет неизменно совмещена с плоскостью $NO\zeta$. Если оси $O\xi\eta\zeta$ вращаются, то наружное кольцо $НК$ и связанная с ним ось OB гироскопа, согласно выражениям (589), будут непрерывно отклоняться от плоскости $\eta O\zeta$. Чтобы гироскопическая рама стабилизировала свое положение относительно подвижных осей, в ее систему вводят корректирующие устройства.

При использовании одноосной гирорамы для стабилизации курса объекта компенсация ее азимутальных отклонений может быть осуществлена с помощью дистанционного магнитного компаса. Магнитный компас $ДМК$ с помощью дистанционной передачи удерживает движок r в плоскости магнитного меридиана. Поэтому как только плоскость BOC наружного кольца $НК$ гирорамы выйдет из совмещения с плоскостью магнитного меридиана, так сразу же движок r сместится с нулевой точки обмотки потенциометра $П_C$, жестко укрепленной на наружном кольце $НК$. Напряжение, снимаемое при этом с потенциометра $П_C$, подается на датчик моментов $ДМ$, который создает корректирующий момент $M_{кB}$, действующий на гироскоп относительно оси OB. Гироскоп начинает прецессировать вокруг оси OC к плоскости магнитного меридиана. Для подтверждения сказанного обратимся к системе уравнений (588). Наличие коррекции гирорамы обусловливает действие

относительно ее внутренней оси момента $M_{\text{к}\,B}$, пропорционального углу ψ. Заметим, что при отклонении гирорамы от плоскости магнитного меридиана на угол $\psi > 0$ момент $M_{\text{к}\,B}$ должен быть отрицателен. На гироскопическую раму действует также момент опорного двигателя, пропорциональный углу ϑ.

Обозначая через K_B и K_C коэффициенты пропорциональности корректирующего и стабилизирующего моментов углам ψ и ϑ соответственно и полагая для простоты плоскости магнитного и географического меридиана совмещенными, перепишем систему (588) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\left(\dot{\psi} + \omega_C\right) &= -K_B\psi; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\left(\dot{\vartheta} + \omega_B\right) &= -M_{\text{в}\,C} + K_C\vartheta. \end{aligned}\right\} \qquad (590)$$

Опуская, как и выше, из рассмотрения нутационные члены, можем записать

$$\dot{\psi} + \frac{K_B}{J\Omega}\psi = -\omega_C;$$

$$\dot{\vartheta} + \frac{K_C}{J\Omega}\vartheta = \frac{M_{\text{в}\,C} - J\Omega\omega_B}{J\Omega},$$

откуда находим

$$\left.\begin{aligned} \psi &= C_1 e^{-\frac{K_B t}{J\Omega}} - \frac{J\Omega\omega_C}{K_B}; \\ \vartheta &= C_2 e^{-\frac{K_C t}{J\Omega}} + \frac{M_{\text{в}C} - J\Omega\omega_B}{K_C}. \end{aligned}\right\} \qquad (591)$$

Как видим, при совмещении оси стабилизации одноосной гирорамы с вертикалью, наличие корректирующего устройства обеспечивает стабильное положение ее наружного кольца относительно плоскости магнитного меридиана. Однако стабилизация объекта лишь по курсу в общем случае является недостаточной. Для таких объектов, как летательные аппараты, необходима стабилизация еще и относительно плоскости горизонта, т. е. по углам крена и тангажа. Последнее условие может быть выполнено также с помощью гироскопической рамы, но уже не с одной, а с двумя осями стабилизации.

В качестве примера двухосной гирорамы на рис. 193 приведена схема центральной гировертикали. Эта гировертикаль состоит из двух гироскопов Γ_1 и Γ_2 с вертикальным расположением главных осей O_1A_1 и O_2A_2. Внутренние кольца BK_1 и BK_2 гироскопов смонтированы внутри полого цилиндра HK, выполняющего в описываемом приборе функцию наружного карданова кольца. При этом оси подвеса O_1B_1 и O_2B_2 размещены взаимно перпендикулярно.

Цилиндр *НК* крепится на опорах, расположенных по оси *OB* в дополнительном кардановом кольце *ДК*. Кольцо *ДК* установлено по оси *OC* в опорах *Q*, жестко закрепленных в корпусе прибора. Посредством зубчатых передач цилиндр *НК* и кольцо *ДК* соединены с осями стабилизирующих двигателей $ЭД_2$ и $ЭД_1$, закрепленных соответственно в кольце *ДК* и на корпусе прибора. Из схемы видно, что описываемый прибор состоит из двух гирорам, объединенных единой конструкцией.

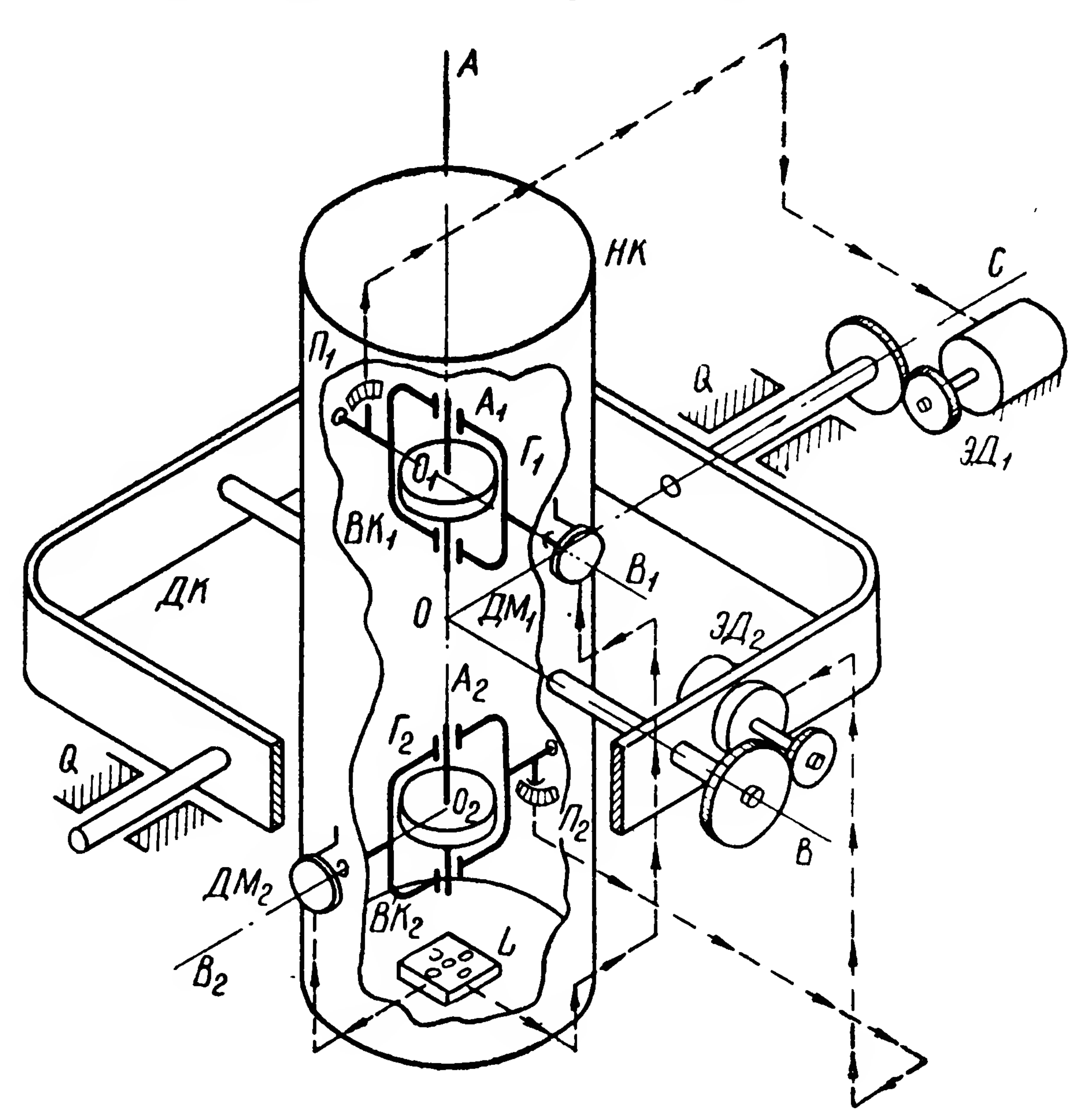


Рис. 193. Двухосная гирорама.

При действии на рассматриваемую гирораму относительно оси *OC* внешнего момента гироскоп $Г_1$ начинает прецессировать вокруг оси O_1B_1, вызывая поворот вокруг этой же оси движка потенциометра $П_1$. Сигнал, снимаемый при этом с потенциометра $П_1$, подается на стабилизирующий двигатель $ЭД_1$, момент которого уравновешивает внешний возмущающий момент. Если внешние силы создают момент относительно оси *OB*, то возникает прецессия гироскопа $Г_2$ вокруг оси O_2B_2. В результате стабилизирующий двигатель $ЭД_2$, управляемый через потенциометр $П_2$, создает момент, компенсирующий возникшее возмущение. Как видим, двухосная гирорама стабилизирует положение цилиндра *НК* относительно двух осей *OB* и *OC*.

Для того чтобы описанная двухосная, или, как говорят, двухкомпонентная, гирорама сохраняла свое положение относительно плоскости горизонта, в нижней части цилиндра *НК* устанавли-

вают пространственный электролитический маятник L, устройство которого было показано на рис. 163. При отклонении цилиндра $НК$ от вертикали в результате его поворотов вокруг осей OB и OC (рис. 193) с электролитического маятника снимаются сигналы, пропорциональные углам указанных поворотов. Подавая эти сигналы на датчики моментов $ДМ_1$ и $ДМ_2$, создают корректирующие моменты, под действием которых гирорама будет возвращаться к вертикальному положению. Приборы рассматриваемого типа получили название силовых гировертикалей.

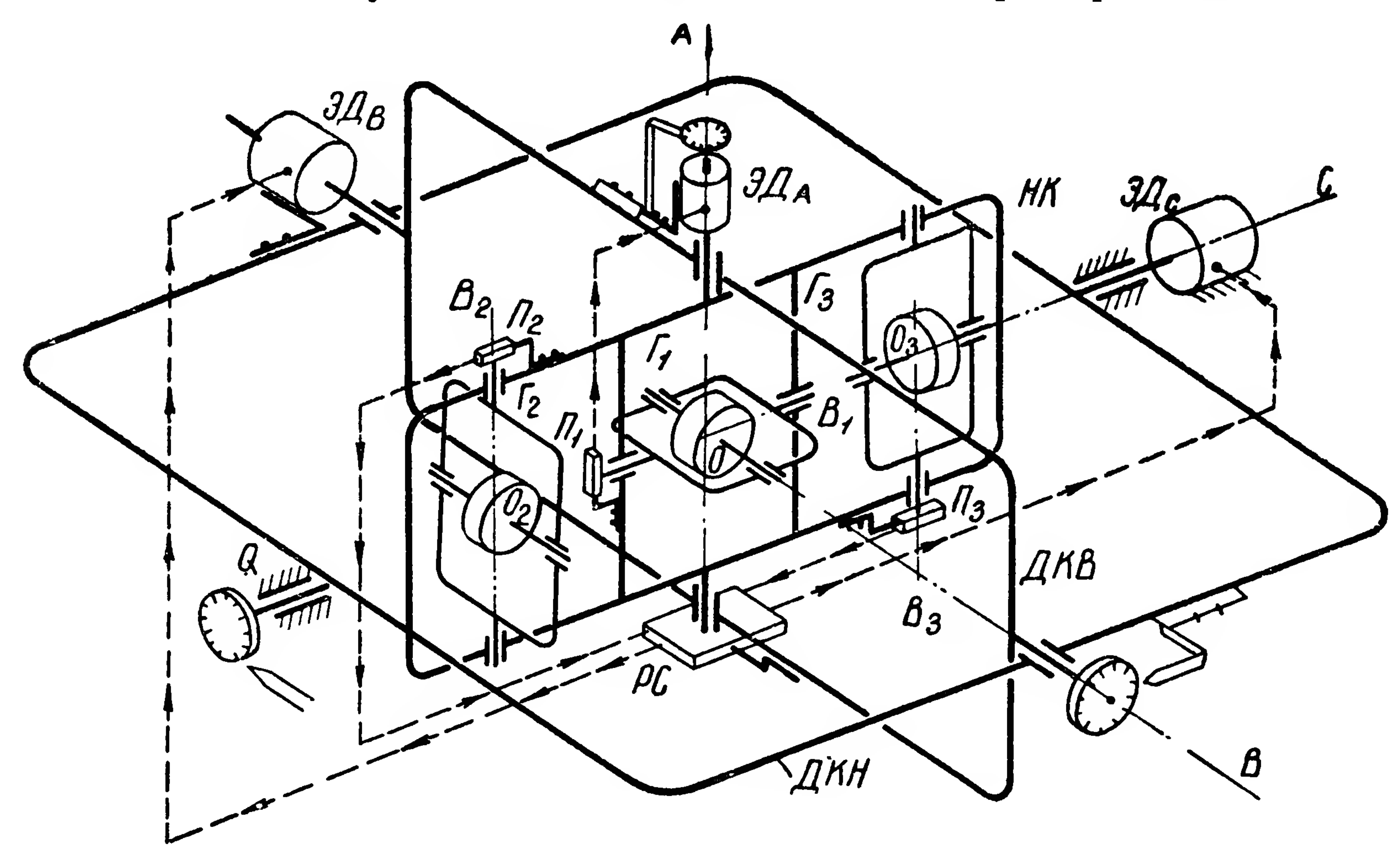


Рис. 194. Трехосная гирорама.

В тех случаях, когда необходимо обеспечить стабилизацию по трем взаимно перпендикулярным осям, используют трехосные гирорамы. Принципиальная схема такого гироскопического устройства приведена на рис. 194. В раме $НК$ установлены три гироскопа $Г_1$, $Г_2$ и $Г_3$, каждый из которых обладает по отношению к ней двумя степенями свободы. Рама $НК$ подвешена в кардановых кольцах $ДКВ$ и $ДКН$. Кольцо $ДКН$ установлено в опорах Q, закрепленных в корпусе прибора.

По всем трем осям OA, OB и OC подвеса рамы $НК$ установлены стабилизирующие двигатели $ЭД_A$, $ЭД_B$ и $ЭД_C$, а по осям OB_1, O_2B_2 и O_3B_3 подвесов гироскопов — потенциометры $П_1$, $П_2$ и $П_3$. Таким образом, в рассматриваемом приборе имеются все элементы гирорамы (см. рис. 191), посредством которых осуществляется стабилизация рамы $НК$ (рис. 194) по всем трем осям OA, OB и OC ее подвеса. При действии на гирораму внешнего возмущающего момента относительно оси OA прецессирует вокруг оси OB_1 гироскоп $Г_1$. Снимаемый с потенциометра $П_1$ сигнал подается непосредственно на стабилизирующий двигатель $ЭД_A$, момент которого уравновесит момент внешних сил. При действии

на гирораму внешних моментов относительно осей OB и OC прецессируют вокруг своих осей подвесов O_2B_2 и O_3B_3 гироскопы $Г_2$ и $Г_3$. Однако сигналы, снимаемые с их потенциометров $П_2$ и $П_3$, подавать непосредственно на стабилизирующие двигатели $ЭД_B$ и $ЭД_C$ нельзя. Если рама $НК$ и кольцо $ДКВ$ взаимно перпендикулярны (рис. 194), то в случае действия возмущающего момента относительно оси OC будет прецессировать гироскоп $Г_2$. Следовательно, сигнал, снимаемый с потенциометра $П_2$, должен будет подаваться на стабилизирующий двигатель $ЭД_C$. Однако взаимно-перпендикулярное положение между рамой $НК$ и кольцом $ДКВ$ не может оставаться неизменным. При поворотах объекта вокруг оси OA вместе с ним поворачиваются и оба кольца $ДКВ$ и $ДКН$ по отношению к раме $НК$, остающейся стабильной в пространстве.

Как только объект повернется на 90°, плоскости рамы $НК$ и кольца $ДКВ$ совместятся. В таком положении под влиянием момента относительно оси OC будет прецессировать вокруг своей оси подвеса O_3B_3 уже гироскоп $Г_3$. Естественно, что в этом случае сигнал, управляющий стабилизирующим двигателем $ЭД_C$, должен будет подаваться с потенциометра $П_3$. Аналогичное явление наблюдается и при осуществлении стабилизации по оси OB.

Из изложенного следует, что в общем случае сигналы, снимаемые с потенциометров $П_2$ и $П_3$, должны подаваться одновременно на оба стабилизирующих двигателя $ЭД_B$ и $ЭД_C$, изменяясь по законам: первый — косинуса, второй — синуса. С целью распределения сигналов, снимаемых с потенциометров $П_2$ и $П_3$, между стабилизирующими двигателями $ЭД_B$ и $ЭД_C$ в пространственной гирораме используется распределительное устройство PC. Последнее представляет собой либо синусно-косинусные потенциометры, либо вращающиеся трансформаторы и называется обычно распределителем сигналов или преобразователем координат.

Рассмотренный тип трехосной гирорамы при ориентировании ее наружного карданова кольца $НК$ по плоскостям горизонта и меридиана принято называть гироазимутгоризонтом или силовой курсовертикалью.

§ 95. КОМПЕНСАЦИЯ ВЛИЯНИЯ ВРАЩЕНИЯ ОСНОВАНИЯ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ РАМЫ ВОКРУГ ЕЕ ОСИ ПРЕЦЕССИИ

Устанавливая одноосные и двухосные гирорамы на объекте, необходимо иметь в виду, что угловые скорости вращения объекта вокруг осей прецессии оказывают непосредственное влияние на работу гироскопической рамы.

Рассмотрим движение гирорамы при отсутствии внешнего возмущающего момента $M_{вC}$ и угловой скорости ω_C вращения ее

основания вокруг оси стабилизации. При этом условии система уравнений (590) принимает вид

$$J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\psi} + K_B\psi = 0;$$
$$J_C\ddot{\psi} - J\Omega\dot{\vartheta} - K_C\vartheta = J\Omega\omega_B$$

или в символической форме записи

$$J_Bp^2\vartheta + (J\Omega p + K_B)\psi = 0;$$
$$J_Cp^2\psi - (J\Omega p + K_C)\vartheta = J\Omega\omega_B.$$

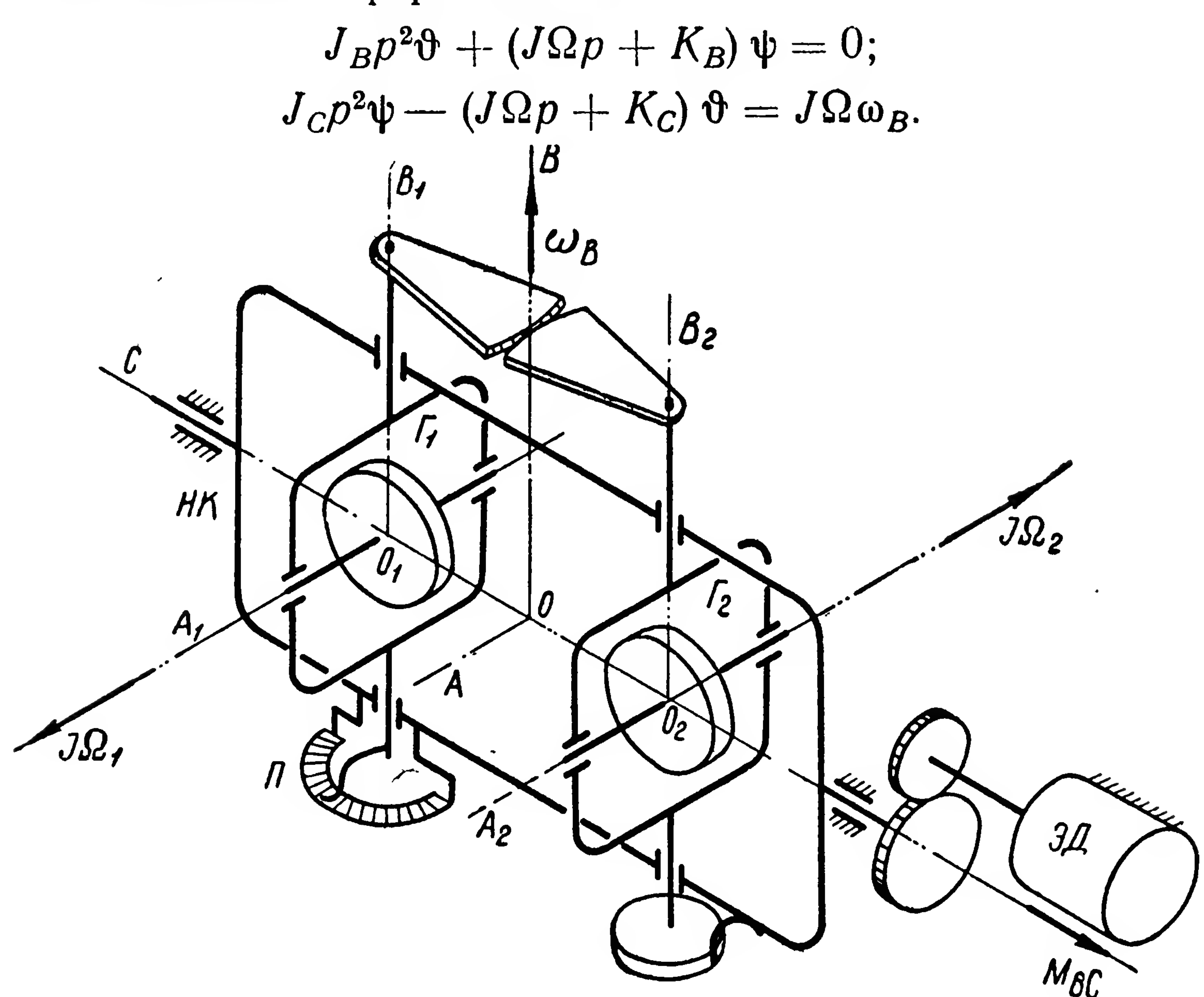


Рис. 195. Одноосная двухгироскопная рама.

Разрешив полученную систему относительно переменной ψ, найдем дифференциальное уравнение

$$J_BJ_Cp^4\psi + J^2\Omega^2p^2\psi + J\Omega(K_B + K_C)p\psi + $$
$$+ K_BK_C\psi = J_BJ\Omega p^2\omega_B,$$

из которого следует, что вращение объекта вокруг оси прецессии гирорамы влияет на ее отклонение по оси стабилизации.

Для устранения указанного влияния гирораму снабжают двумя гироскопами $Г_1$ и $Г_2$ (рис. 195), обладающими одинаковыми по величине, но противоположными по направлению кинетическими моментами $J\Omega_1$ и $J\Omega_2$. Гироскопы связаны между собой либо зубчатыми секторами, жестко соединенными с их внутренними кардановыми кольцами, либо антипараллелограммом [14, стр. 431].

При действии на описываемую гирораму внешнего возмущающего момента M_{BC} сразу же возникнет прецессия гироскопов

вокруг осей O_1B_1 и O_2B_2 во взаимно противоположных направлениях. Такому движению зубчатые секторы не оказывают сопративления. Если же объект, на котором установлена гирорама, начнет поворачиваться вокруг оси OB с угловой скоростью ω_B, то гироскопы, стремящиеся сохранить свое положение стабильным в пространстве, начнут поворачиваться внутри рамы $НК$ вокруг осей O_1B_1 и O_2B_2 и притом в одном и том же направлении. Однако этот поворот будет сразу же погашен, так как зубчатые секторы заклинят друг друга и гироскопы вынуждены будут поворачиваться вокруг оси OC вместе с наружным кольцом $НК$. Таким образом, влияние вращения объекта вокруг оси OB на положение гироскопической рамы в пространстве будет автоматически погашаться.

В самом деле, если бы гироскопы не были связаны единым наружным кардановым кольцом $НК$, то движение каждого из них описывалось бы системой уравнений (590). Так как корректирующие моменты гироскопов в рассматриваемом случае имеют противоположные направления, движения гироскопов описывались бы двумя самостоятельными системами дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} J_{B1}\ddot{\vartheta}_1 + J\Omega_1(\dot{\psi}_1 + \omega_C) &= -K_B\psi_1; \\ J_{C1}\ddot{\psi}_1 - J\Omega_1(\dot{\vartheta}_1 + \omega_B) &= -M_{вC1} + K_C\vartheta_1 \end{aligned}\right\} \quad (592)$$

и

$$\left.\begin{aligned} J_{B2}\ddot{\vartheta}_2 + J\Omega_2(\dot{\psi}_2 + \omega_C) &= K_B\psi_2; \\ J_{C2}\ddot{\psi}_2 - J\Omega_2(\dot{\vartheta}_2 + \omega_B) &= -M_{вC2} + K_C\vartheta_2. \end{aligned}\right\} \quad (593)$$

Однако в действительности оба гироскопа установлены в одном наружном кардановом кольце $НК$, которое может вращаться только вокруг одной оси OC. Поэтому углы ψ_1 и ψ_2 являются по существу одним и тем же углом ψ, характеризующим поворот наружного кольца $НК$ вокруг оси OC. Необходимо иметь в виду, что на изменение угла ψ оказывают влияние параметры движения обоих гироскопов. Чтобы отразить это влияние в уравнениях (592) и (593), перепишем их в одну систему, складывая между собой уравнения, описывающие движение гироскопов вокруг оси стабилизации OC. В результате такого действия при $\psi_1 = \psi_2 = \psi$ имеем

$$\left.\begin{aligned} J_{B1}\ddot{\vartheta}_1 + J\Omega_1(\dot{\psi} + \omega_C) &= -K_B\psi; \\ J_{B2}\ddot{\vartheta}_2 + J\Omega_2(\dot{\psi} + \omega_C) &= K_B\psi; \\ (J_{C1} + J_{C2})\ddot{\psi} - \left[J\Omega_1(\dot{\vartheta}_1 + \omega_B) + J\Omega_2(\dot{\vartheta}_2 + \omega_B)\right] &= \\ = -(M_{вC1} + M_{вC2}) + K_C(\vartheta_1 + \vartheta_2). & \end{aligned}\right\} \quad (594)$$

Выше уже говорилось, что гироскопы $Г_1$ и $Г_2$ обладают одинаковыми конструктивными параметрами и отличаются друг от

друга только направлением собственного вращения. Поэтому между величинами, входящими в уравнения (594), существуют следующие зависимости:

$$J_{B1} = J_{B2} = J_B; \qquad \Omega_1 = \Omega; \qquad \Omega_2 = -\Omega;$$
$$\dot{\vartheta}_1 = \dot{\vartheta}; \qquad \vartheta_2 = -\vartheta.$$

Суммарное значение моментов инерции J_{C1} и J_{C2} представляет собой момент инерции J_C системы относительно оси OC. Сумма моментов $M_{вC1}$ и $M_{вC2}$ определяет величину внешнего возмущающего момента $M_{вC}$, действующего на гироскопическую раму относительно ее оси стабилизации OC. Учитывая указанные зависимости в системе уравнений (594), будем иметь

$$J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega(\dot{\psi} + \omega_C) = -K_B\psi;$$
$$-J_B\ddot{\vartheta} - J\Omega(\dot{\psi} + \omega_C) = K_B\psi;$$
$$J_C\ddot{\psi} - 2J\Omega\dot{\vartheta} = -M_{вC} + K_C(\vartheta - \vartheta).$$

Как следует из полученной системы, уравнения движения гироскопов вокруг их осей подвесов O_1B_1 и O_2B_2 в кардановом кольце $НК$ полностью идентичны. Поэтому при исследовании характера движения рассматриваемой гирорамы можно ограничиться одним из них. Для управления стабилизирующим двигателем $ЭД$ (рис. 195) потенциометр $П$ должен быть установлен по оси прецессии какого-либо одного гироскопа. Также необходим лишь один датчик для создания моментов коррекции гирорамы. При этих условиях последняя система уравнений принимает вид

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\psi} + K_B\psi &= -J\Omega\omega_C; \\ J_C\ddot{\psi} - 2J\Omega\dot{\vartheta} - K_C\vartheta &= -M_{вC}. \end{aligned}\right\} \qquad (595)$$

Решение усеченных уравнений системы (595) определяется по выражениям

$$\psi = C_1 e^{-\frac{K_B t}{J\Omega}} - \frac{J\Omega}{K_B}\omega_C,$$

$$\vartheta = C_2 e^{-\frac{K_C t}{2J\Omega}} + \frac{M_{вC}}{K_C},$$

которые подтверждают сказанное выше о том, что на положение равновесия одноосной двухгироскопной рамы угловая скорость ω_B вращения объекта не влияет.

Поэтому во всех тех случаях, когда ω_B может вносить существенную ошибку в стабилизацию заданного положения, гирораму снабжают двумя связанными между собой гироскопами. Это в полной мере относится и к двухосной гироскопической раме. Только в трехосной пространственной раме нет необходимости

устанавливать два гироскопа по каждой оси стабилизации: взаимодействие между всеми тремя каналами стабилизации обеспечивает автоматическую компенсацию влияния вращения основания на изменение в пространстве положения равновесия трехосной гироскопической рамы.

§ 96. УСТОЙЧИВОСТЬ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ РАМЫ

Выясним характер движения гирорамы в пространстве после импульсного действия момента внешней силы, полагая, что положение ее корпуса неподвижно ($\omega_B = \omega_C = 0$) и корректирующее устройство отсутствует ($K_B = 0$). При этих условиях уравнения (590), переписанные в символической форме, будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} J_B p^2 \vartheta + J\Omega p \psi = 0; \\ J_C p^2 \psi - (J\Omega p + K_C)\vartheta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{596}$$

Характеристическое уравнение для системы (596) может быть записано в виде определителя

$$\begin{vmatrix} J_B p^2, & J\Omega p \\ -(J\Omega p + K_C), & J_C p^2 \end{vmatrix} = 0,$$

раскрыв который, найдем

$$p^4 + \frac{J^2\Omega^2}{J_B J_C} p^2 + \frac{J\Omega K_C}{J_B J_C} p = 0.$$

Обозначив коэффициенты

$$\frac{J^2\Omega^2}{J_B J_C} = a, \quad \frac{J\Omega K_C}{J_B J_C} = b$$

и учтя, что они удовлетворяют условию

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 > 0,$$

по аналогии с решением уравнения (130) находим значения корней:

$$p_1 = U + V;$$

$$p_{2,3} = -\frac{1}{2}(U + V) \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}(U - V);$$

$$p_4 = 0.$$

Для рассматриваемого случая

$$U = \sqrt[3]{-\frac{J\Omega K_C}{2J_B J_C} + \sqrt{\left(\frac{J\Omega K_C}{2J_B J_C}\right)^2 + \left(\frac{J^2\Omega^2}{3J_B J_C}\right)^3}};$$

$$V = \sqrt[3]{\frac{J\Omega K_C}{2J_B J_C} - \sqrt{\left(\frac{J\Omega K_C}{2J_B J_C}\right)^2 + \left(\frac{J^2\Omega^2}{3J_B J_C}\right)^3}}.$$

Из полученных выражений следует, что положительным будет либо значение вещественного корня, либо значение вещественной

части комплексных сопряженных корней. Это обстоятельство говорит о том, что положение равновесия гироскопической рамы в данном случае неустойчиво (см. § 13).

Для обеспечения устойчивости гирорамы в ее систему вводят успокоитель $УС$ (рис. 196), создающий момент сил демпфирования

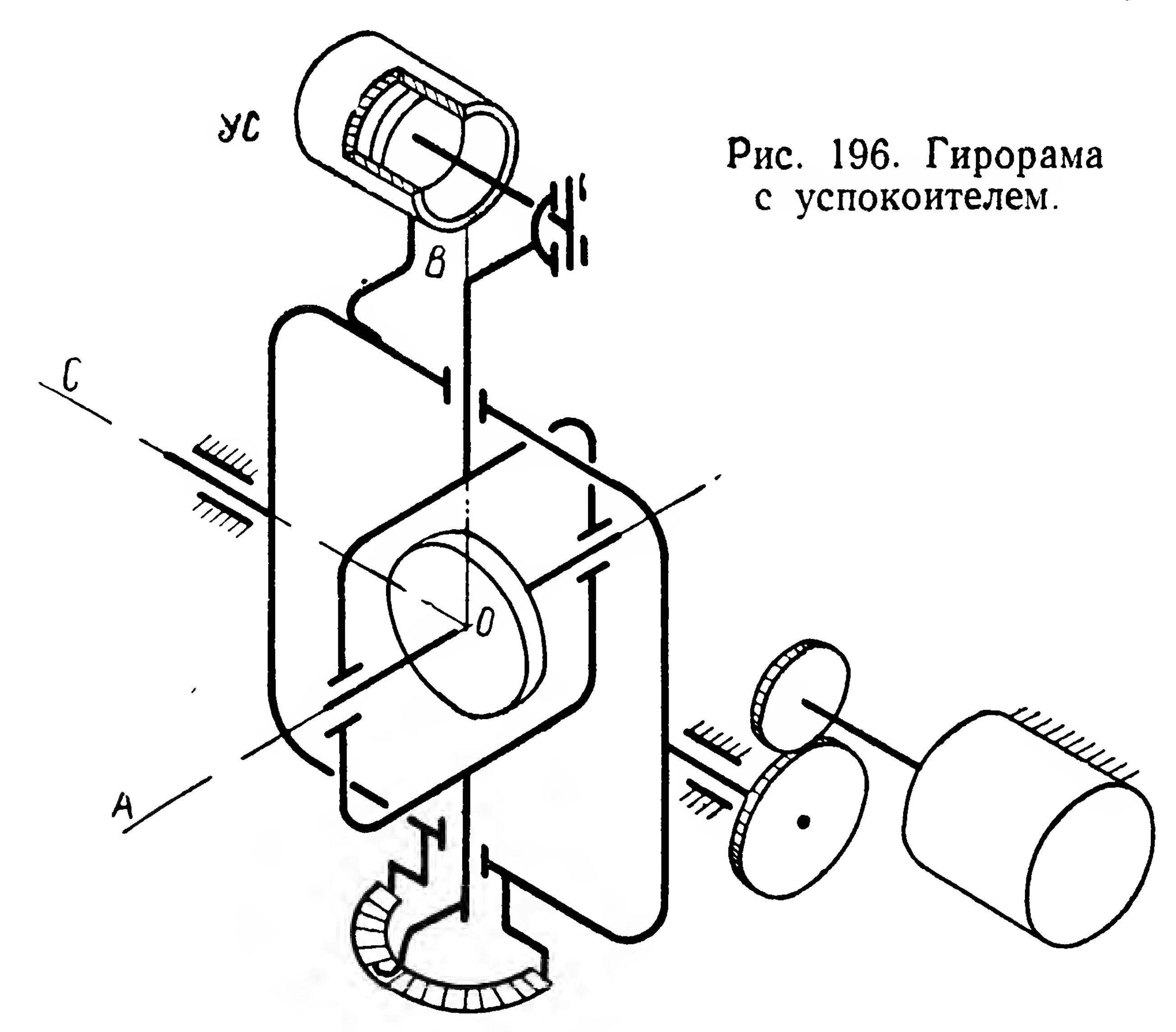


Рис. 196. Гирорама с успокоителем.

относительно оси прецессии OB.[1] Так как величина демпфирующего момента пропорциональна угловой скорости $\dot{\vartheta}$, то, учитывая в системе (596) член $\mu p\vartheta$, где μ — коэффициент момента сил демпфирования, можем записать

$$\left.\begin{aligned} (J_B p^2 + \mu p)\,\vartheta + J\Omega p\psi = 0; \\ J_C p^2\psi - (J\Omega p + K_C)\,\vartheta = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (597)$$

Составив для системы (597) определитель

$$\begin{vmatrix} (J_B p^2 + \mu p), & J\Omega p \\ -(J\Omega p + K_C), & J_C p^2 \end{vmatrix} = 0,$$

находим характеристическое уравнение

$$p^4 + \frac{\mu}{J_B} p^3 + \frac{J^2\Omega^2}{J_B J_C} p^2 + \frac{J\Omega K_C}{J_B J_C} p = 0. \qquad (598)$$

Выносяза скобки общий множитель p, определим значение одного из четырех корней уравнения (598):

$$p_4 = 0.$$

[1] Демпфирующий момент может быть осуществлен и относительно оси стабилизации. Для этого на практике используется обычно противоэлектродвижущая сила стабилизирующего двигателя (см. [37, стр. 324]).

В оставшемся уравнении

$$p^3 + \frac{\mu}{J_B} p^2 + \frac{J^2\Omega^2}{J_B J_C} p + \frac{J\Omega K_C}{J_B J_C} = 0 \qquad (599)$$

по аналогии с (493) введем замену

$$p = q - \frac{\mu}{3J_B}, \qquad (600)$$

в соответствии с которой (599) примет вид

$$q^3 + aq + b = 0, \qquad (601)$$

где

$$a = -\frac{\mu^2}{3J_B^2} + \frac{J^2\Omega^2}{J_B J_C}; \quad b = \frac{2\mu^3}{27J_B^3} - \frac{J^2\Omega^2\mu}{3J_B^2 J_C} + \frac{J\Omega K_C}{J_B J_C}. \qquad (602)$$

Так как коэффициенты уравнения (601) удовлетворяют условию

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 > 0,$$

то в соответствии с решением уравнения (132) можем записать:

$$q_1 = U + V;$$

$$q_{2,3} = -\frac{1}{2}(U + V) \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}(U - V),$$

где

$$U = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}};$$

$$V = \sqrt{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

Подставив в последние выражения значения коэффициентов a и b из (602), найдем, что и в этом случае либо вещественный корень q_1, либо вещественная часть комплексных сопряженных корней q_2 и q_3 уравнения (601) будут положительны. Однако и вещественные корни и вещественные части комплексных корней характеристического уравнения (599) могут быть отрицательными. Действительно, как следует из зависимости (600), при соответствующей величине коэффициента μ момента сил демпфирования даже при положительном значении q величина p может быть отрицательной. Таким образом, движение гироскопической рамы, снабженной успокоителем, будет устойчивым.

Сложность практического вычисления корней характеристического уравнения увеличивается с возрастанием степени уравнения. Поэтому при исследовании устойчивости движения можно

воспользоваться теоремой Гурвица,[1] позволяющей судить об устойчивости системы не вычисляя значений корней характеристического уравнения.

При исследовании уравнений движения гироскопических приборов и устройств наиболее часто приходится встречаться с характеристическими уравнениями четвертой степени, в общем случае имеющими вид

$$a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0.$$

Согласно теореме Гурвица корни такого уравнения будут вещественными отрицательными или комплексными с отрицательной вещественной частью только в том случае, когда его коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3 и a_4 удовлетворяют следующим условиям:

$$a_0 > 0;\ a_1 > 0;\ a_2 > 0;\ a_3 > 0;\ a_4 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} > 0$$

Нетрудно заметить, что между записанными условиями существует определенная зависимость. Действительно, раскрыв определители,[2] будем иметь

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3;$$

$$\Delta_3 = a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 = a_3 \Delta_2 - a_1^2 a_4;$$

$$\Delta_4 = a_4 (a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2) = a_4 \Delta_3.$$

Таким образом, для того чтобы характеристическое уравнение четвертой степени не имело положительных вещественных корней или комплексных корней с положительной вещественной частью, необходимо и достаточно выполнить два условия:

$$\left.\begin{aligned} &a_0 > 0;\ a_1 > 0;\ a_2 > 0;\ a_3 > 0;\ a_4 > 0; \\ &\Delta_3 = a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0. \end{aligned}\right\} \qquad (603)$$

---

[1] См.: Е. П. Попов. Динамика систем автоматического регулирования. ГИТТЛ, 1954, стр. 283.

[2] См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Т. III, ч. I, ГИТТЛ, 1949, стр. 21.

Условия (603) накладывают определенные требования на соотношения между параметрами гироскопической рамы. Действительно, обращаясь к характеристическому уравнению (598) системы (597), описывающей движение одноосной гирорамы, убеждаемся в том, что все его коэффициенты положительны. Тем самым удовлетворяются первые неравенства условия устойчивости (603). Подставив в последнее неравенство (603) значения входящих в него коэффициентов, будем иметь

$$\frac{J\Omega K_C}{J_B J_C}\left(\frac{\mu}{J_B}\cdot\frac{J^2\Omega^2}{J_B J_C} - 1\,\frac{J\Omega K_C}{J_B J_C}\right) - \frac{\mu^2}{J_B^2}\,0 > 0$$

или

$$\frac{J^2\Omega^2 K_C}{J_B^2 J_C^2}\left(\frac{\mu J\Omega}{J_B} - K_C\right) > 0. \qquad (604)$$

Так как множитель

$$\frac{J^2\Omega^2 K_C}{J_B^2 J_C^2} \neq 0,$$

то неравенство (604) будет иметь место лишь при условии

$$\frac{\mu J\Omega}{J_B} - K_C > 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{\mu}{J_B} > \frac{K_C}{J\Omega}. \qquad (605)$$

Таким образом, если параметры гироскопической рамы выбраны так, что неравенство (605) соблюдено, то ее движение будет устойчивым.

Пример 38. Проверить устойчивость движения одноосной гироскопической рамы, обладающей кинетическим моментом $J\Omega = 1600$ *Гсмсек*. Моменты инерции гирорамы относительно осей прецессии и стабилизации $J_B = 0{,}37$ *Гсмсек*^{2} и $J_C = 0{,}8$ *Гсмсек*^{2}. Коэффициенты моментов стабилизирующего двигателя и сил демпфирования $K_C = 6000$ *Гсм/рад* и $\mu = 25$ *Гсм/рад*.

Характеристическое уравнение (598) в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$p^4 + \frac{25}{0{,}37}\,p^3 + \frac{1600^2}{0{,}37\cdot 0{,}8}\,p^2 + \frac{1600\cdot 6000}{0{,}37\cdot 0{,}8}\,p = 0$$

или

$$p^4 + 68p^3 + 875\cdot 10^4 p^2 + 326\cdot 10^5 p = 0.$$

Как видим, все коэффициенты полученного уравнения больше нуля и тем самым удовлетворяют первому условию (603). Вычислим величину Δ_3 для рассматриваемой гирорамы:

$$\Delta_3 = 326\cdot 10^5\,(68\cdot 875\cdot 10^4 - 1\cdot 326\cdot 10^5) - 68^2\cdot 0 = 18{,}3\cdot 10^{15} > 0.$$

Естественно, что при этом будет соблюдаться и условие (605):

$$\frac{\mu}{J_B} = \frac{25}{0,37} = 67,57 > \frac{K_C}{J\Omega} = \frac{6000}{1600} = 3,7.$$

Таким образом, параметры гироскопической рамы, удовлетворяющие условиям (603), выбраны правильно и ее движение будет устойчивым.

§ 97. ДЕМПФИРОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ РАМЫ ПРОТИВОЭЛЕКТРОДВИЖУЩЕЙ СИЛОЙ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО ДВИГАТЕЛЯ

Представим себе одноосную гироскопическую раму (рис. 197), напряжение которой снимается с потенциометра *П* и после усиления в усилителе *УС* подается на обмотку якоря стабилизирующего двигателя. Обмотка возбуждения двигателя *СД* питается от

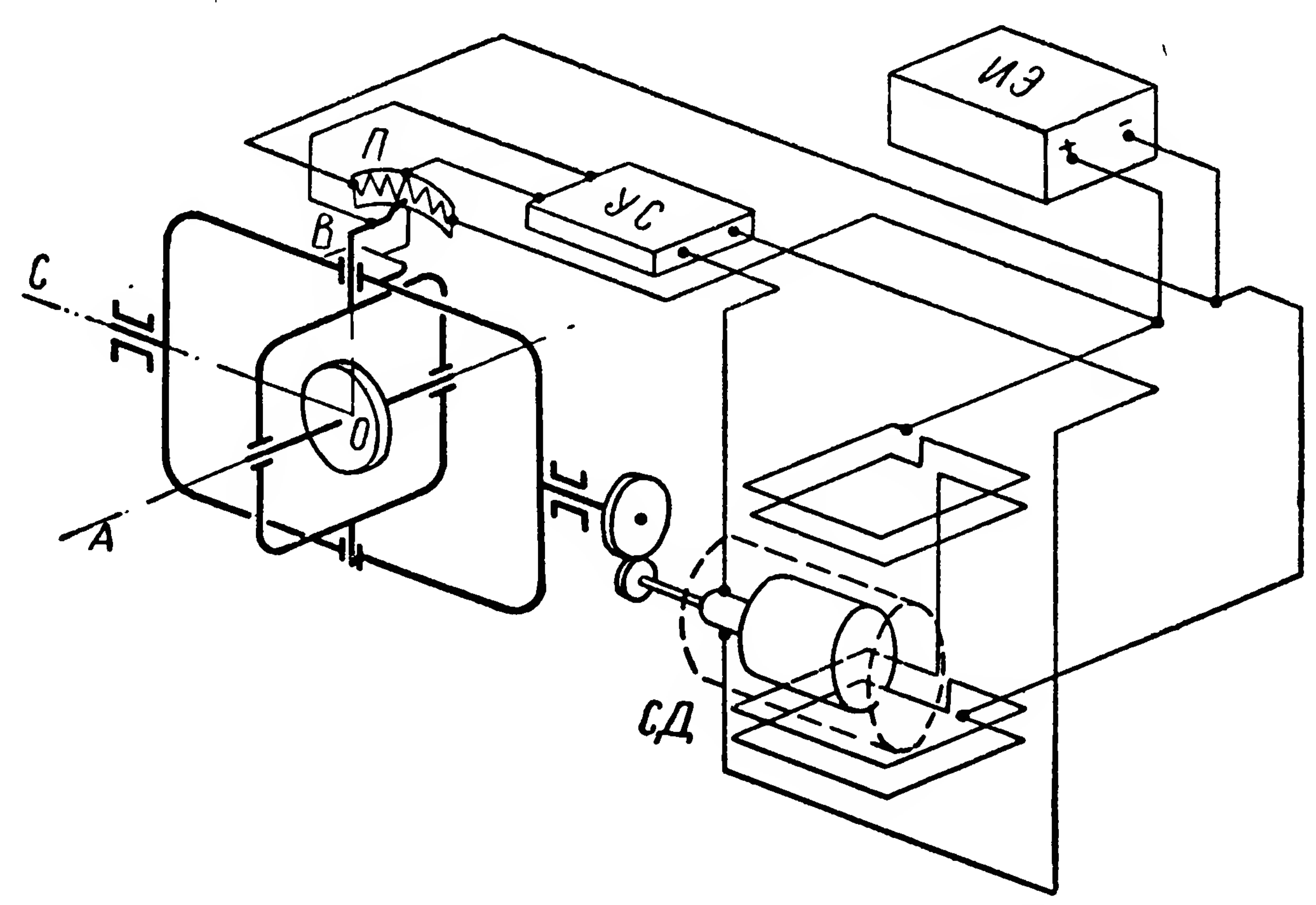


Рис. 197. Схема демпфирования гирорамы противоэлектродвижущей силой стабилизирующего двигателя.

источника электрической энергии постоянного тока. Как известно,[1] момент M_{CD} электрического двигателя постоянного тока с независимым возбуждением с достаточной для практики точностью определяется выражением

$$M_{CD} = c_м I,$$

где $c_м$ — машинная постоянная двигателя;

I — сила тока в обмотке якоря двигателя.

Будем полагать, что усилитель *УС* безынерционный и мощность источника энергии *ИЭ* значительно превышает мощность, потребляемую стабилизирующим двигателем. Пусть угловые скорости

[1] См.: А. А. Воронов. Элементы теории автоматического регулирования. Воениздат, 1954, стр. 119.

вращения корпуса гирорамы в пространстве $\omega_B = \omega_C = 0$ и возмущающий момент $M_{вC} = 0$. При этих условиях движение гироскопической рамы по аналогии с (588) будет описываться уравнениями

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\psi} &= 0; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\dot{\vartheta} &= M_{CD} = c_{м}I. \end{aligned}\right\} \quad (606)$$

Сила тока I в обмотке якоря будет определяться по уравнению в цепи якоря

$$L\frac{dI}{dt} + RI + c_e\Phi i\dot{\psi} = U,$$

где L — коэффициент самоиндукции в цепи якоря;
R — суммарное сопротивление в цепи якоря и усилителя;
$c_e\Phi$ — коэффициент противоэлектродвижущей силы;
i — передаточное отношение зубчатой передачи между валом стабилизирующего двигателя *СД* и осью *ОС* гирорамы;
U — напряжение в обмотке якоря, практически пропорциональное углу ϑ поворота гироскопа вокруг оси *ОВ* прецессии,

$$U = K_C\vartheta,$$

здесь K_C — коэффициент пропорциональности.

Учитывая сказанное, перепишем систему (606) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\psi} &= 0; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\dot{\vartheta} &= c_{м}I; \\ L\dot{I} + RI + c_e\Phi i\dot{\psi} &= U; \\ U &= K_C\vartheta. \end{aligned}\right\} \quad (607)$$

Подставив в третье уравнение системы (607) значение U из ее четвертого уравнения и значение силы тока I из второго, найдем

$$J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\psi} = 0;$$

$$\frac{LJ_C}{c_{м}}\dddot{\psi} - \frac{LJ\Omega}{c_{м}}\ddot{\vartheta} + \frac{RJ_C}{c_{м}}\ddot{\psi} - \frac{RJ\Omega}{c_{м}}\dot{\vartheta} + c_e\Phi i\dot{\psi} - K_C\vartheta = 0.$$

Переходя к символической форме записи

$$J_Bp^2\vartheta + J\Omega p\psi = 0;$$

$$\left(\frac{LJ_C}{c_{м}}p^3 + \frac{RJ_C}{c_{м}}p^2 + c_e\Phi ip\right)\psi -$$

$$-\left(\frac{LJ\Omega}{c_{м}}p^2 + \frac{RJ\Omega}{c_{м}}p + K_C\right)\vartheta = 0$$

и составляя определитель

$$\begin{vmatrix} J_B p^2, & J\Omega p \\ -\left(\frac{LJ\Omega}{c_м} p^2 + \frac{RJ\Omega}{c_м} p + K_C\right), & \left(\frac{LJ_C}{c_м} p^3 + \frac{RJ_C}{c_м} p^2 + c_e\Phi i p\right) \end{vmatrix} = 0,$$

найдем характеристическое уравнение системы (607):

$$p\left[\frac{LJ_BJ_C}{c_м} p^4 + \frac{RJ_BJ_C}{c_м} p^3 + \left(\frac{LJ^2\Omega^2}{c_м} + J_Bc_e\Phi i\right) p^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{RJ^2\Omega^2}{c_м} p + J\Omega K_C\right] = 0. \qquad (608)$$

Один из корней уравнения (608) равен нулю. Это значит, что положение равновесия рассматриваемой гирорамы безразличное. В любом произвольно заданном в пространстве положении при устойчивости движения гирорама будет сохранять стабильное положение. Необходимое для устойчивого движения соотношение между параметрами гирорамы определяется критерием Гурвица (603), в соответствии с которым

$$\frac{RJ^2\Omega^2}{c_м}\left[\frac{RJ_BJ_C}{c_м}\left(\frac{LJ^2\Omega^2}{c_м} + J_Bc_e\Phi i\right) - \frac{LJ_BJ_C}{c_м}\cdot\frac{RJ^2\Omega^2}{c_м}\right] -$$

$$-\left(\frac{RJ_BJ_C}{c_м}\right)^2 J\Omega K_C > 0$$

или после преобразований

$$J\Omega c_e\Phi i > J_C K_C,$$

откуда

$$\frac{c_e\Phi i}{J_C} > \frac{K_C}{J\Omega}. \qquad (609)$$

При соблюдении условия (609) момент, создаваемый противоэлектродвижущей силой относительно оси стабилизации гирорамы, интенсивность которого характеризуется коэффициентом $c_e\Phi i$, обеспечивает демпфирование ее собственных колебаний.

§ 98. ТОЧНОСТЬ СТАБИЛИЗАЦИИ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ РАМЫ

Исследования устойчивости движения гироскопической рамы еще недостаточно для того, чтобы судить о качестве ее работы. Одним из основных факторов, характеризующих работу гирорамы, является максимальная величина ее отклонений от заданного положения при воздействии на нее внешних возмущающих моментов. Чем меньше величина указанных отклонений, тем выше при одних и тех же максимально возможных внешних возмущениях точность удержания гирорамой заданного положения, или, как говорят, точность ее стабилизации. Чтобы определить зна-

чения углов отклонений гирорамы под действием переменного момента $M_{вC}(t)$, перепишем систему уравнений (597) в следующем виде:

$$J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\psi} + \mu\dot{\vartheta} = 0;$$
$$J_C\ddot{\psi} - J\Omega\dot{\vartheta} - K\vartheta = M_{вC}(t).$$

Решение этой системы будет зависеть от закона изменения во времени внешнего возмущающего момента $M_{вC}$. Будем полагать, что последний изменяется по гармоническому закону $M_{вC} = M_0 \sin qt$. Тогда рассматриваемая система уравнений примет вид

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\psi} + \mu\dot{\vartheta} = 0; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\dot{\vartheta} - K\vartheta = M_0 \sin qt. \end{aligned}\right\} \quad (610)$$

Частные решения системы (610) будем искать в виде

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_r = N\cos qt + L\sin qt; \\ \psi_r = N^*\cos qt + L^*\sin qt, \end{aligned}\right\} \quad (611)$$

где N, L, N^*, L^* — амплитуды колебаний.

Продифференцируем дважды выражения (611) по времени и подставим значения ϑ_r, ψ_r и их производных в систему (610):

$$-J_Bq^2N\cos qt - J_Bq^2L\sin qt - J\Omega qN^*\sin qt +$$
$$+ J\Omega qL^*\cos qt - \mu qN\sin qt + \mu qL\cos qt = 0;$$
$$-J_Cq^2N^*\cos qt - J_Cq^2L^*\sin qt + J\Omega qN\sin qt - J\Omega qL\cos qt -$$
$$-KN\cos qt - KL\sin qt = M_0\sin qt.$$

Приравняв коэффициенты при тригонометрических членах в правой и левой частях этих тождеств и решив полученные при этом уравнения, найдем

$$\left.\begin{aligned} N = \frac{J\Omega aM_0}{a^2+b^2}; \qquad L = -\frac{J\Omega bM_0}{a^2+b^2}; \\ N^* = \frac{M_0}{a^2+b^2}(J_Bqb - \mu a); \qquad L^* = \frac{M_0}{a^2+b^2}(J_Bqa + \mu b), \end{aligned}\right\} \quad (612)$$

где

$$a = J^2\Omega^2q - J_BJ_Cq^3; \qquad b = J\Omega K - J_Cq^2\mu. \quad (613)$$

Подставив значения (612) в первое уравнение (611), будем иметь

$$\vartheta_r = \frac{J\Omega aM_0}{a^2+b^2}\cos qt - \frac{J\Omega bM_0}{a^2+b^2}\sin qt.$$

Следовательно, амплитуда вынужденных колебаний гироскопа вокруг оси прецессии

$$\vartheta_{r\,\max} = \sqrt{N^2 + L^2} = \frac{J\Omega M_0}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

или после подстановки значений a и b из (613)

$$\vartheta_{r\,\max} = \frac{J\Omega M_0}{\sqrt{(J^2\Omega^2 q - J_B J_C q^3)^2 + (J\Omega K - J_C q^2 \mu)^2}}. \tag{614}$$

Конструктивные параметры гироскопической рамы должны быть такими, чтобы амплитуда ее колебаний вокруг оси прецессии при заданных условиях работы не превышала нескольких градусов.

Из второго уравнения (611) при использовании коэффициентов (612) получаем

$$\psi_r = \frac{M_0}{a^2 + b^2}(J_B q b - \mu a)\cos qt + \frac{M_0}{a^2 + b^2}(J_B q a + \mu b)\sin qt.$$

Следовательно, амплитуда вынужденных колебаний гироскопической рамы вокруг оси стабилизации определится из выражения

$$\psi_{r\,\max} = \sqrt{N^{*2} + L^{*2}} = \frac{M_0\sqrt{J_B^2 q^2 + \mu^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

или, учитывая равенства (613),

$$\psi_{r\,\max} = \frac{M_0\sqrt{J^2{}_B q^2 + \mu^2}}{\sqrt{(J^2\Omega^2 q - J_B J_C q^3)^2 + (J\Omega K - J_C q^2 \mu)^2}}. \tag{615}$$

Величина $\psi_{r\,\max}$ не должна превышать допустимого отклонения гирорамы от заданного направления, определяемого заданной точностью стабилизации.

Пример 39. Определить амплитуду вынужденных колебаний гироскопической рамы, установленной на объекте, совершающем гармонические колебания вокруг оси стабилизации гирорамы с периодом $T = 1$ сек. Максимальное значение момента, воздействующего на гирораму относительно ее оси стабилизации, $M_0 = 100$ *Гсм*. Параметры гироскопической рамы те же, что и в примере 38.

Вычислим круговую частоту вынужденных колебаний:

$$q = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\cdot 3{,}14}{1} = 6{,}28 \text{ сек.}^{-1}.$$

Подставив числовые значения параметров гирорамы в выражение (615), будем иметь

$$\psi_{r\,\max} = \frac{100\sqrt{0{,}37^2\cdot 6{,}28^2 + 25^2}}{\sqrt{(1600^2\cdot 6{,}28 - 0{,}37\cdot 0{,}8\cdot 6{,}28^3)^2 + (6000\cdot 1600 - 0{,}8\cdot 6{,}28^2\cdot 25)^2}} =$$

$$= 1{,}34\cdot 10^{-4} \text{ рад.} = 0{,}46 \text{ угл. мин.}$$

§ 99. ВЛИЯНИЕ СИЛ ТРЕНИЯ В ОПОРАХ ПОДВЕСА ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ РАМЫ НА ТОЧНОСТЬ СТАБИЛИЗАЦИИ

При анализе точности гироскопической рамы необходимо выяснить влияние на характер ее движения сил трения в опорах подвеса. С этой целью в уравнениях (588) учтем моменты сил трения. В результате будем иметь

$$J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega(\dot{\psi} + \omega_C) = M_{\text{т}\,B},$$
$$J_C\ddot{\psi} - J\Omega(\dot{\vartheta} + \omega_B) - K\vartheta = -M_{\text{в}\,C} + M_{\text{т}\,C}.$$

Предположим, что в рассматриваемом случае возмущающий момент $M_{\text{в}\,C}$ равен нулю, а основание гирорамы вращается в пространстве с угловыми скоростями ω_B и ω_C. При этих условиях, согласно изложенному в § 37, после того, как амплитуды нутационных колебаний гироскопа снизятся до своего предела, направления действия моментов сил трения относительно осей подвеса гироскопа определятся лишь направлениями угловых скоростей ω_B и ω_C. Поэтому исходные уравнения принимают вид

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega(\dot{\psi} + \omega_C) &= M_{0\,\text{т}B}\operatorname{sign}(\omega_B); \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega(\dot{\vartheta} + \omega_B) - K\vartheta &= M_{0\,\text{т}C}\operatorname{sign}(\omega_C). \end{aligned}\right\} \qquad (616)$$

В том случае, когда основание прибора совершает гармонические колебания с частотой q, изменения угловых скоростей ω_B и ω_C подчинены зависимостям

$$\omega_B = \omega_{0\,B}\sin qt; \qquad \omega_C = \omega_{0\,C}\cos qt;$$

учитывая их в уравнениях (616), будем иметь

$$J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega(\dot{\psi} + \omega_{0\,C}\cos qt) = M_{0\,\text{т}\,B}\operatorname{sign}(\sin qt);$$
$$J_C\ddot{\psi} - J\Omega(\dot{\vartheta} + \omega_{0\,B}\sin qt) - K\vartheta = M_{0\,\text{т}\,C}\operatorname{sign}(\cos qt).$$

Разложив правые части полученных уравнений в ряд Фурье (252) и ограничившись его первым членом, можем записать

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\dot{\psi} &= -J\Omega\omega_{0\,C}\cos qt + \frac{4M_{0\,\text{т}\,B}}{\pi}\sin qt; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\dot{\vartheta} - K\vartheta &= J\Omega\omega_{0\,B}\sin qt + \frac{4M_{0\,\text{т}\,C}}{\pi}\cos qt. \end{aligned}\right\} \qquad (617)$$

Решение (617) аналогично решению системы (610). Разыскивая решения в виде (611), определяют описанным выше методом (см. § 98) значения амплитуд изменения углов ϑ и ψ. По величинам этих амплитуд судят о точности стабилизации гирорамой заданного положения. В тех случаях, когда угловые скорости ω_B и ω_C вращения основания остаются постоянными, уравнения (616)

при пренебрежении в них нутационными членами принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi} &= -\omega_C + \frac{M_{0\,\text{т}\,B}}{J\Omega}; \\ \dot{\vartheta} + \frac{K}{J\Omega}\vartheta &= -\omega_B - \frac{M_{0\,\text{т}\,C}}{J\Omega}. \end{aligned}\right\} \qquad (618)$$

Момент сил трения $M_{0\,\text{т}\,C}$, действующий на гироскопическую раму относительно ее оси стабилизации, оказывает влияние лишь на положение внутреннего карданова кольца в наружном. Действительно, решив второе уравнение (618), найдем

$$\vartheta = Ce^{-\frac{K}{J\Omega}t} - \frac{J\Omega\omega_B + M_{0\,\text{т}\,C}}{K}.$$

Как видим, момент $M_{0\text{т}\,C}$ влияет лишь на величину угла поворота внутреннего кольца вокруг оси прецессии гироскопической рамы, не вызывая поворота последней вокруг оси стабилизации.

Из первого уравнения (618) следует, что момент сил трения $M_{0\text{т}\,B}$ оказывает влияние на точность стабилизации гироскопической рамой заданного положения. В самом деле, в случае вращения основания с угловой скоростью ω_C гироскопическая рама, сохраняющая положение своего наружного кольца неизменным в пространстве при $M_{0\,\text{т}\,B} = 0$ должна поворачиваться относительно основания с угловой скоростью

$$\dot{\psi} = -\omega_C. \qquad (619)$$

При моменте сил трения $M_{0\,\text{т}\,B} \neq 0$, угловая скорость $\dot{\psi}$ поворота гироскопа вокруг оси стабилизации определится из выражения

$$\dot{\psi} = -\frac{J\Omega\omega_C - M_{0\,\text{т}\,B}}{J\Omega}.$$

Угловая скорость $\dot{\psi}$ не будет отвечать равенству (619). До тех пор, пока $J\Omega\omega_C$ меньше $M_{0\,\text{т}\,B}$, гирорама будет поворачиваться вместе с основанием как одно тело. И лишь после того, как $J\Omega\omega_C$ станет больше $M_{0\,\text{т}\,B}$, гирорама начнет стабилизировать свое положение в пространстве, причем тем точнее, чем больше величина $J\Omega\omega_C$ по сравнению с моментом сил трения $M_{0\,\text{т}\,B}$. Та минимальная угловая скорость $\omega_{C\,\min}$ вращения основания, которую, как говорят, будет «чувствовать» гироскопическая рама, определится из равенства

$$J\Omega\omega_{C\,\min} = M_{0\,\text{т}\,B}$$

и, следовательно,

$$\omega_{C\,\min} = \frac{M_{0\,\text{т}\,B}}{J\Omega}. \qquad (620)$$

Как видим, чем меньше момент сил трения относительно оси прецессии, тем точнее гироскопическая рама стабилизирует заданное положение в пространстве.

Пример 40. Гироскопическая рама, обладающая кинетическим моментом $J\Omega = 2000$ *Гсмсек*, должна стабилизировать заданное положение с точностью одной угловой минуты в минуту времени. Определить допустимую величину момента сил трения по оси прецессии.

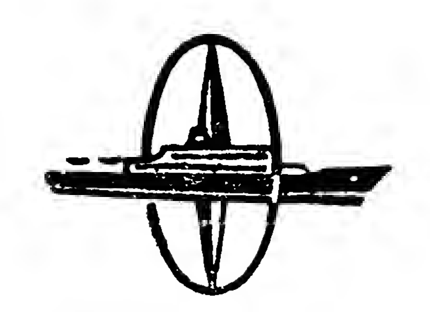
Найдем значение минимальной угловой скорости основания гирорамы, на которую последняя должна реагировать:

$$\omega_{C\,\min} = \frac{1}{1 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 57{,}3} = 4{,}84 \cdot 10^{-6}\ \text{сек.}^{-1}.$$

Подставив значение $\omega_{C\,\min}$ в формулу (620), определим допустимую величину момента сил трения:

$$M_{0\,\dot{\text{т}}\,B} = J\Omega\omega_{C\,\min} = 2000 \cdot 4{,}84 \cdot 10^{-6} = 0{,}01\ \textit{Гсм}.$$

Таким образом, для обеспечения требуемой точности гироскопической рамы момент сил трения относительно ее оси прецессии должен быть весьма малым, что достигается обычно использованием воздушных, жидкостных и других типов специальных опор подвеса гироскопа в наружном кардановом кольце.



Глава XIII

ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ, СТАБИЛИЗАЦИИ И КОНТРОЛЯ

§ 100. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ В АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ СТАБИЛИЗАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ ПОДВИЖНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Гироскоп почти с первых лет его применения начали использовать в качестве основного измерительного элемента в системах автоматического управления подвижными объектами. В конце восьмидесятых годов прошлого столетия был создан гироскопический стабилизатор морской торпеды [4, стр. 102; 8, стр. 248], обеспечивающий ее движение в заданном азимутальном направлении. Немного позднее, в начале XX века, после появления первых образцов мореходных гирокомпасов были созданы гироскопические рулевые, обеспечивающие автоматическую стабилизацию корабля на выбранном курсе [1, стр. 296]. А еще через несколько лет на конкурсе 1914 года по безопасности самолетовождения демонстрировался гироскопический автопилот, управляющий полетом летательного аппарата без вмешательства летчика [26, стр. 113].

Особенно интенсивное использование гироскопов в системах автоматического управления объектами наблюдается в последние десятилетия. Освоение космического пространства обусловило необходимость полной автоматизации средств управления, стабилизации и контроля, обеспечивающих практическое осуществление движения объекта по заранее намеченной траектории. При этом в общем комплексе автоматических устройств, предназначаемых для решения указанных задач, выполнение целого ряда функций возлагается на гироскопические приборы [42, стр. 286].

В современных автоматических системах управления движением объектов гироскопические приборы измеряют, дифференцируют и интегрируют не только угловые, но и линейные величины, характеризующие параметры движения. Естественно, что каждый такой гироскопический прибор, используемый в качестве отдельного звена того или иного автоматического устройства, будет оказывать непосредственное влияние на характер работы

всего автомата в целом. От динамических свойств гироскопических элементов во многом зависят быстродействие и точность автоматического осуществления желаемого процесса, будь то процесс стабилизации, управления или контроля.

В теории автоматического регулирования для оценки динамических свойств отдельных звеньев системы, независимо от их физических и конструктивных разновидностей, используются единые методы. Среди этих методов наиболее широкое распространение в последние годы получил частотный метод анализа, [1] следуя которому необходимо в первую очередь определить передаточные функции отдельных звеньев системы. Получаемая непосредственно из дифференциальных уравнений, описывающих движение рассматриваемого звена, передаточная функция позволяет по своему виду составить суждение о характере возможных переходных процессов в данном звене и о его влиянии на статические и динамические свойства автоматической системы в целом.

§ 101. СТРУКТУРНАЯ СХЕМА И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ, ЛИШЕННЫХ ИЗБИРАТЕЛЬНОСТИ

Рассмотренные выше гироскопические приборы по их динамическим свойствам можно разделить на группы. Так, астатические гироскопы (гл. VI), гироскопы направления (гл. VII) и некорректируемые гироскопы с тремя степенями свободы имеют одно общее свойство — все они лишены избирательности.

Общность динамических свойств указанных гироскопических приборов подтверждается тем, что и уравнения (280), описывающие движение астатического гироскопа, и уравнения (291) движения гироскопа направления могут быть заменены одной объединяющей их системой дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\left(\dot{\psi} + \omega_C\right) &= M_B; \\ J_C\ddot{\psi} - J\Omega\left(\dot{\vartheta} + \omega_B\right) &= M_C. \end{aligned}\right\} \tag{621}$$

Переписав уравнения (621) в символической форме

$$\left.\begin{aligned} J_B p^2\vartheta + J\Omega p\psi &= M_B - J\Omega\omega_C; \\ J_C p^2\psi - J\Omega p\vartheta &= M_C + J\Omega\omega_B, \end{aligned}\right\} \tag{622}$$

определим из первого уравнения системы (622) значение ϑ, а из второго — значение ψ:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= \frac{1}{J_B p^2}\left(M_B - J\Omega\omega_C - J\Omega p\psi\right); \\ \psi &= \frac{1}{J_C p^2}\left(M_C + J\Omega\omega_B + J\Omega p\vartheta\right). \end{aligned}\right\} \tag{623}$$

[1] См.: Основы автоматического регулирования. Под редакцией В. В. Солодовникова, т. I, гл. XII, Машгиз, 1954.

При исследовании процессов, протекающих в автоматизированных системах, необходимо знать динамические свойства их отдельных элементов. Для облегчения составления схемы той или иной автоматизированной системы в теории автоматического регулирования принято отдельные звенья системы изображать условно в виде прямоугольников. [1] С одной стороны такого прямоугольника изображается стрелкой входная величина, с другой — выходная, связанная с входной той или иной зависимостью, определяемой динамическими свойствами рассматриваемого звена. Принципиальная схема любой автоматической системы может быть представлена так называемой структурной схемой, составленной из отдельных звеньев, которые могут быть соединены последовательно, параллельно и в замкнутые контуры.

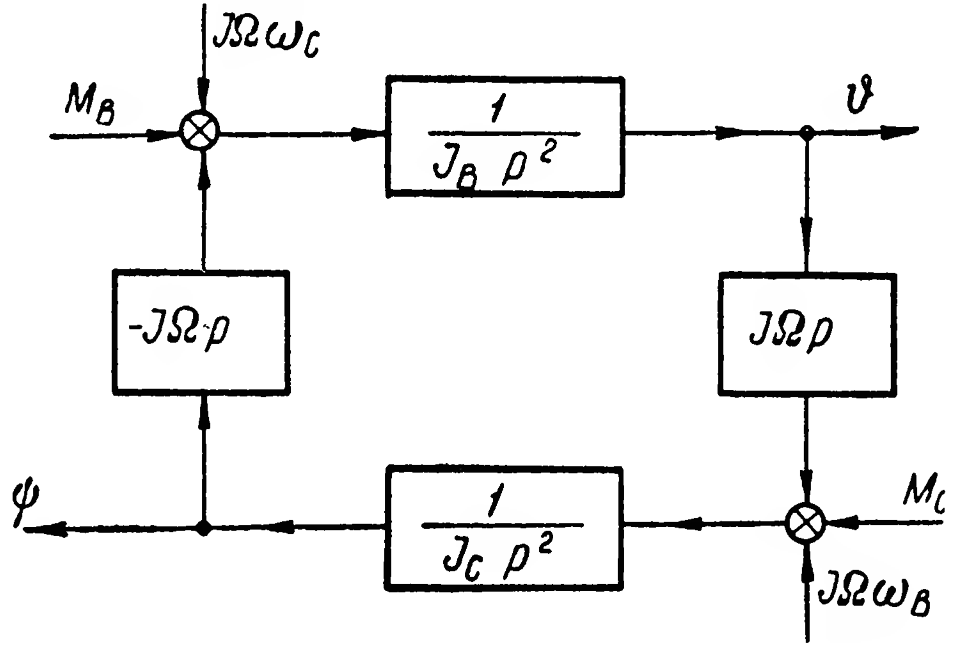


Рис. 198. Структурная схема гироскопа, лишенного избирательности.

В общем случае автоматические системы могут состоять из нескольких контуров, в связи с чем в определенных точках входные и выходные величины, или, как их еще называют, сигналы, будут либо суммироваться, либо разветвляться. Для указания мест таких соединений в структурных схемах приняты специальные обозначения. [2] В точках разветвления сигнала линия, указывающая путь его прохождения, расщепляется и идет дальше к двум или нескольким звеньям системы. Точки суммирования сигналов, в отличие от точек разветвлений, обозначаются на структурных схемах небольшим кружком.

Следуя указанному методу, по уравнению (623) можно составить структурную схему гироскопа с тремя степенями свободы, не обладающего избирательностью. Такая структурная схема состоит в данном случае из четырех звеньев (рис. 198) и дает наглядное представление о реакции гироскопа на действие возмущающих факторов. Из схемы видно, что действие относительно осей подвеса гироскопа моментов внешних сил M_B и M_C и моментов $J\Omega\omega_C$ и $J\Omega\omega_B$, порождаемых вращением основания прибора, вызывает повороты гироскопа вокруг обеих осей подвеса. Вращение гироскопа вокруг одной оси подвеса влияет на характер его движения вокруг второй оси и наоборот; такое взаимное влияние проявляется в результате действия относительно осей

[1] См.: А. А. Фельдбаум. Вычислительные устройства в автоматических системах. ГИФМЛ, 1959, стр. 29.

[2] См.: В. Оппель. Основы техники автоматического регулирования. Госэнергоиздат, 1960, стр. 40.

подвеса моментов $-J\Omega p\psi$ и $J\Omega p\vartheta$ гироскопических реакций.

Структурная схема (рис. 198) еще не дает возможности установить зависимости изменения углов ϑ и ψ поворотов гироскопа от возмущающих факторов. Для определения таких зависимостей должны быть найдены передаточные функции гироскопа с тремя степенями свободы, не обладающего избирательностью. С этой целью в уравнениях (622) исключим поочередно переменные ϑ и ψ. В результате будем иметь

$$\vartheta = \frac{J_C}{J_B J_C p^2 + J^2\Omega^2}\left(M_B - J\Omega\omega_C - \frac{J\Omega}{J_C p} M_C - \frac{J^2\Omega^2}{J_C p}\omega_B\right);$$

$$\psi = \frac{J_B}{J_B J_C p^2 + J^2\Omega^2}\left(M_C + J\Omega\omega_B + \frac{J\Omega}{J_B p} M_B - \frac{J^2\Omega^2}{J_B p}\omega_C\right).$$

Приняв обозначения

$$\frac{J_B J_C}{J^2\Omega^2} = T^2; \quad \frac{J_B}{J^2\Omega^2} = N_B; \quad \frac{J_C}{J^2\Omega^2} = N_C,$$

перепишем полученные выражения в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= \frac{N_C}{T^2p^2+1}\left(M_B - J\Omega\omega_C - \frac{M_C}{N_C J\Omega p} - \frac{\omega_B}{N_C p}\right); \\ \psi &= \frac{N_B}{T^2p^2+1}\left(M_C + J\Omega\omega_B + \frac{M_B}{N_B J\Omega p} - \frac{\omega_C}{N_B p}\right). \end{aligned}\right\} \quad (624)$$

По равенствам (624) можно определить передаточные функции рассматриваемого гироскопа, характеризующие зависимости углов ϑ и ψ от любого возмущающего фактора. Для этого необходимо в формулах (624) все возмущающие факторы, кроме одного, принять равными нулю и при этом условии найти отношения выходных величин ϑ и ψ к входному воздействию. [1] Определим передаточные функции гироскопа с тремя степенями свободы, не обладающего избирательностью, при наличии лишь одного возмущающего фактора, например внешнего момента M_B. В этом случае все остальные возмущающие факторы M_C, ω_B и ω_C равны нулю, в связи с чем уравнения (624) примут вид

$$\vartheta = \frac{N_C}{T^2p^2+1} M_B; \quad \psi = \frac{M_B}{(T^2p^2+1)J\Omega p},$$

---

[1] В теории автоматического регулирования широкое распространение получили методы анализа, использующие преобразования Лапласа. Передаточной функцией в форме преобразований Лапласа называется отношение изображения выходной величины к изображению входной величины при нулевых начальных условиях. Структурная схема дает графическое представление зависимостей между изображениями для внешнего возмущения и для переменных данной системы (см., например, А. А. Красовский и Г. С. Поспелов. Основы автоматики и технической кибернетики. Госэнергоиздат, 1962). Указанные методы приводят к тем же результатам, которые получают при применении символического метода, использованного в настоящей книге.

откуда, определяя отношения каждой выходной величины к возмущающему параметру, находим искомые передаточные функции:

$$\left.\begin{aligned} W(p)^{\vartheta}_{M_B} &= \frac{\vartheta}{M_B} = \frac{1}{T^2p^2+1}N_C; \\ W(p)^{\psi}_{M_B} &= \frac{\psi}{M_B} = \frac{1}{T^2p^2+1}\cdot\frac{1}{J\Omega p}. \end{aligned}\right\} \qquad (625)$$

Пользуясь передаточными функциями (625), можно составить суждение о динамических свойствах исследуемой системы. В рассматриваемом случае из выражений передаточных функций следует, что при действии относительно внутренней оси подвеса момента M_B внешних сил движение гироскопа, характеризуемое изменениями углов ϑ и ψ, складывается из гармонической и постоянной составляющих.

На гармонические колебания, представляющие собой нутационные колебания гироскопа (см. гл. II), указывает наличие в выражениях (625) колебательного звена [1] с передаточной функцией $\frac{1}{T^2p^2+1}$. На систематическое возрастание угла ψ, характеризующего поворот гироскопа вокруг наружной оси подвеса, указывает наличие в системе интегрирующего звена с передаточной функцией $\frac{1}{J\Omega p}$.

Аналогичным образом могут быть найдены передаточные функции рассматриваемого гироскопа и для других возмущающих факторов. Однако и непосредственно по формулам (624) можно составить суждение о реакции гироскопа на рассматриваемые возмущения. В самом деле, из уравнений (624) следует, что вынужденный поворот основания прибора приводит к возникновению нутационных колебаний и, кроме того, к видимому уходу гироскопа вокруг осей OB и OC с угловыми скоростями ω_B и ω_C соответственно.

Необходимо иметь в виду, что любое возмущенное движение гироскопа, включенного в автоматическую систему, повлечет за собой соответствующие отклонения ее от заданного режима работы. Правда, во многих случаях, например в системах автоматической стабилизации подвижных объектов, нутационные колебания гироскопа, вызванные тем или иным внешним возмущением, оказывают пренебрежимо малое влияние на поведение системы. Зато его прецессионное движение будет ею практически копироваться. С другой стороны, при использовании гироскопа в системах автоматического контроля, например в самопишущих приборах, нутационные колебания могут оказывать непосредственное влияние на точность измерения контролируемой вели-

[1] См.: Е. П. Попов. Динамика систем автоматического регулирования. ГИТТЛ, 1954, стр. 175.

чины. Вот почему изменения углов ϑ и ψ, характеризуемые уравнениями (624), должны соответствующим образом учитываться при оценке точности автоматической системы.

§ 102. СТРУКТУРНАЯ СХЕМА И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ КОРРЕКТИРУЕМЫХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ

Наиболее характерными примерами гироскопических приборов, снабженных корректирующими устройствами, являются гиромагнитные компасы (гл. VIII) и гироскопические горизонты (гл. X). Системы уравнений (356) и (499), описывающие движения гироскопов в этих приборах, весьма близки по виду. Это обстоятельство указывает на общность динамических свойств гиромагнитного компаса и гироскопического горизонта, что позволяет объединить рассматриваемые уравнения в одну систему. Пренебрегая силами трения и угловой скоростью ω_D, приведем системы (356) и (499) к общему виду:

$$\left.\begin{aligned} &J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\left(\dot{\psi} + \omega_C\right) = -K_B(\psi - \varepsilon_C) + M_B;\\ &J_C\ddot{\psi} - J\Omega\left(\dot{\vartheta} + \omega_B\right) = K_C(\vartheta - \varepsilon_B) + M_C;\\ &J_{\text{и}\,B}\ddot{\varepsilon}_B + K_{\text{и}\,B}\varepsilon_B = M_{\text{и}\,B};\\ &J_{\text{и}\,C}\ddot{\varepsilon}_C + K_{\text{и}\,C}\varepsilon_C = M_{\text{и}\,C}. \end{aligned}\right\} \quad (626)$$

Переписав уравнения (626) в символической форме

$$\left.\begin{aligned} &J_Bp^2\vartheta + (J\Omega p + K_B)\psi = M_B - J\Omega\omega_C + K_B\varepsilon_C;\\ &J_Cp^2\psi - (J\Omega p + K_C)\vartheta = M_C + J\Omega\omega_B - K_C\varepsilon_B;\\ &(J_{\text{и}\,B}p^2 + K_{\text{и}\,B})\varepsilon_B = M_{\text{и}\,B};\\ &(J_{\text{и}\,C}p^2 + K_{\text{и}\,C})\varepsilon_C = M_{\text{и}\,C} \end{aligned}\right\} \quad (627)$$

и определив из них переменные ϑ, ψ, ε_B и ε_C, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta = \frac{1}{J_Bp^2}\left[M_B - J\Omega\omega_C + K_B\varepsilon_C - (J\Omega p + K_B)\psi\right];\\ &\psi = \frac{1}{J_Cp^2}\left[M_C + J\Omega\omega_B - K_C\varepsilon_B + (J\Omega p + K_C)\vartheta\right];\\ &\varepsilon_B = \frac{1}{J_{\text{и}\,B}p^2 + K_{\text{и}\,B}}M_{\text{и}\,B};\\ &\varepsilon_C = \frac{1}{J_{\text{и}\,C}p^2 + K_{\text{и}\,C}}M_{\text{и}\,C}. \end{aligned}\right\} \quad (628)$$

Пользуясь полученными уравнениями (628), составим структурную схему корректируемого гироскопа (рис. 199). Из сравнения этой схемы со структурной схемой гироскопа, лишенного избирательности (рис. 198), следует, что в рассматриваемом случае на систему, кроме возмущающих моментов M_B, M_C, $J\Omega\omega_B$ и $J\Omega\omega_C$, действуют внешние возмущения $M_{\text{и}\,B}$ и $M_{\text{и}\,C}$. Эти воз-

мущения проходят соответственно через звенья $\frac{1}{J_{иB}p^2+K_{иB}}$ и $\frac{1}{J_{иC}p^2+K_{иC}}$, представляющие собой передаточные функции чувствительных элементов корректирующих устройств, а затем через звенья K_B и K_C, характеризующие передаточные функции датчиков моментов, порождая дополнительные погрешности гироскопа. Необходимо также отметить и изменение главного замкнутого контура системы, обусловленное наличием моментов $K_B\varepsilon_C$

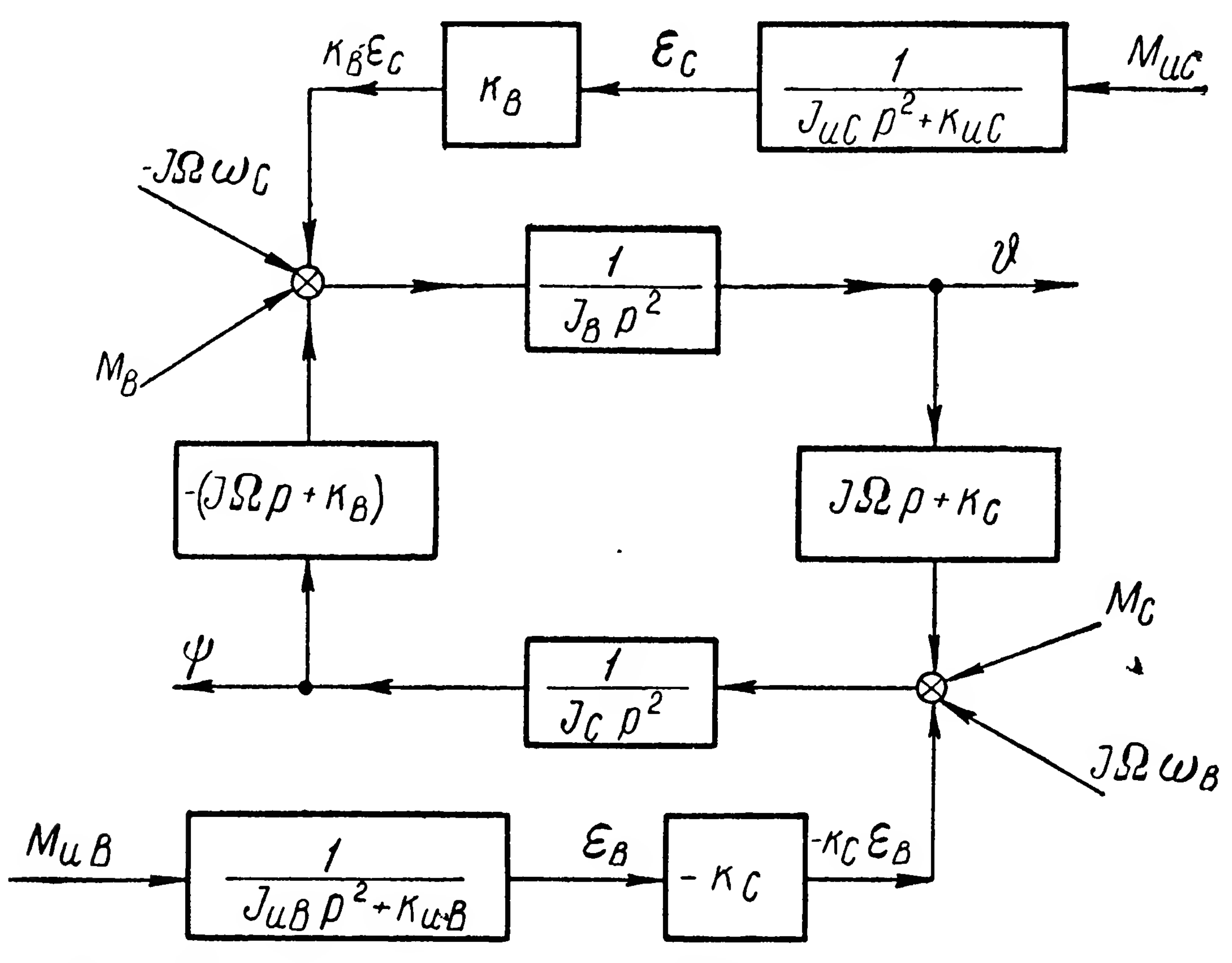


Рис. 199. Структурная схема корректируемого гироскопа.

и $K_C\varepsilon_B$, накладываемых на гироскоп устройствами коррекции.

Определим, как и ранее (§ 101), зависимости углов ϑ и ψ поворота гироскопа вокруг осей подвеса от перечисленных выше возмущающих моментов. Исключив с этой целью из системы уравнений (628) сначала переменные ψ, ε_B и ε_C, а затем ϑ, ε_B и ε_C, можем записать

$$\left.\begin{aligned}\vartheta = {} & \frac{1}{J_BJ_Cp^4+J^2\Omega^2p^2+J\Omega K_Bp+J\Omega K_Cp+K_BK_C}\times \\ & \times\Big[-(J\Omega p+K_B)M_C+J_Cp^2M_B-J_CJ\Omega p^2\omega_C- \\ & -(J\Omega p+K_B)J\Omega\omega_B+J_Cp^2\frac{K_BM_{иC}}{J_{иC}p^2+K_{иC}}+ \\ & +(J\Omega p+K_B)\frac{K_CM_{иB}}{J_{иB}p^2+K_{иB}}\Big]; \\ \psi = {} & \frac{1}{J_BJ_Cp^4+J^2\Omega^2p^2+J\Omega K_Bp+J\Omega K_Cp+K_BK_C}\times\end{aligned}\right\} \quad (629)$$

$$\times \left[(J\Omega p + K_C) M_B + J_B p^2 M_C + J_B J\Omega p^2 \omega_B - \right.$$
$$- (J\Omega p + K_C) J\Omega \omega_C - J_B p^2 \frac{K_C M_{и\,B}}{J_{и\,B} p^2 + K_{и\,B}} +$$
$$\left. + (J\Omega p + K_C) \frac{K_B M_{и\,C}}{J_{и\,C} p^2 + K_{и\,C}}\right].$$

Если в знаменателе множителя перед квадратными скобками уравнений (629) вынести произведение $K_B K_C$, то выражение рассматриваемого знаменателя примет вид

$$J_B J_C p^4 + J^2 \Omega^2 p^2 + J\Omega K_B p + J\Omega K_C p + K_B K_C = L =$$
$$= K_B K_C \left[\frac{J_B J_C}{K_B K_C} p^4 + \frac{J^2\Omega^2}{K_B K_C} p^2 + J\Omega \left(\frac{1}{K_C} + \frac{1}{K_B}\right) p + 1\right].$$

Разделив многочлен, заключенный в квадратные скобки, последнего равенства на двучлен $\frac{J_B J_C}{J^2\Omega^2} p^2 + 1$, можем записать

$$L = K_B K_C \left(\frac{J_B J_C}{J^2\Omega^2} p^2 + 1\right) \left[\frac{J^2\Omega^2}{K_B K_C} p^2 + \frac{J\Omega \left(\frac{1}{K_C} + \frac{1}{K_B}\right) p + 1}{\frac{J_B J_C}{J^2\Omega^2} p^2 + 1}\right].$$

Произведя приближенные вычисления,[1] найдем

$$L = K_B K_C \left(\frac{J_B J_C}{J^2\Omega^2} p^2 + 1\right) \left[\frac{J^2\Omega^2}{K_B K_C} p^2 + 1 + J\Omega \left(\frac{1}{K_C} + \frac{1}{K_B}\right) p - \right.$$
$$\left. - \frac{J_B J_C}{J^2\Omega^2} p^2\right]. \qquad (630)$$

Учитывая, что в корректируемых гироскопических приборах (гл. VIII и X) практически всегда выполняются неравенства

$$\frac{J\Omega}{K_C} \gg \frac{\sqrt{J_B J_C}}{J\Omega}; \quad \frac{J\Omega}{K_B} \gg \frac{\sqrt{J_B J_C}}{J\Omega},$$

пренебрежем последним слагаемым в квадратных скобках выражения (630); в результате получим

$$L = K_B K_C \left(\frac{J_B J_C}{J^2\Omega^2} p^2 + 1\right) \left[\frac{J^2\Omega^2}{K_B K_C} p^2 + J\Omega \left(\frac{1}{K_C} + \frac{1}{K_B}\right) p + 1\right],$$

или

$$L = K_B K_C \left(\frac{J_B J_C}{J^2\Omega^2} p^2 + 1\right) \left(\frac{J\Omega}{K_B} p + 1\right) \left(\frac{J\Omega}{K_C} + 1\right). \qquad (631)$$

[1] См.: А. Ю. Ишлинский. Приближенные вычисления. Энциклопедический справочник. Машиностроение. Т. I, кн. 1, Машгиз, 1947, стр. 111.

Подставив (631) в уравнения (629) и введя обозначения

$$\frac{J_B J_C}{J^2\Omega^2} = T^2; \quad \frac{J_{и\,B}}{K_{и\,B}} = T^2_{и\,B}; \quad \frac{J_{и\,C}}{K_{и\,C}} = T^2_{и\,C};$$

$$\frac{J\Omega}{K_B} = T_B; \quad \frac{J\Omega}{K_C} = T_C,$$

будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta &= \frac{1}{K_B K_C (T^2 p^2 + 1)(T_B p + 1)(T_C p + 1)} \times \\
&\times \Big[-K_B (T_B p + 1) M_C + J_C p^2 M_B - J_C J\Omega p^2 \omega_C - \\
&- K_B (T_B p + 1) J\Omega\omega_B + J_C \frac{K_B}{K_{и\,C}} \cdot \frac{p^2}{T^2_{и\,C} p^2 + 1} M_{и\,C} + \\
&+ \frac{K_B K_C}{K_{и\,B}} \cdot \frac{T_B p + 1}{T^2_{и\,B} p^2 + 1} M_{и\,B} \Big]; \\
\psi &= \frac{1}{K_B K_C (T^2 p^2 + 1)(T_B p + 1)(T_C p + 1)} \times \\
&\times \Big[K_C (T_C p + 1) M_B + J_B p^2 M_C + J_B J\Omega p^2 \omega_B - \\
&- K_C (T_C p + 1) J\Omega\omega_C - J_B \frac{K_C}{K_{и\,B}} \cdot \frac{p^2}{T^2_{и\,B} p^2 + 1} M_{и\,B} + \\
&+ \frac{K_B K_C}{K_{и\,C}} \cdot \frac{T_C p + 1}{T^2_{и\,C} p^2 + 1} M_{и\,C} \Big].
\end{aligned}\right\} \quad (632)$$

Уравнения (632) позволяют судить о влиянии возмущающих факторов на движение гироскопа, снабженного корректирующими устройствами. Как следует из этих уравнений, любой из возмущающих факторов вызывает прежде всего нутационные колебания гироскопа, определяемые колебательным звеном с передаточной функцией $\frac{1}{T^2p^2+1}$. Кроме того, в отличие от некорректируемого гироскопа [см. уравнения (624)], прецессионное движение в данном случае имеет апериодический характер, на что указывает наличие в уравнениях (632) апериодических звеньев $\frac{1}{T_Bp+1}$ и $\frac{1}{T_Cp+1}$.

Уравнения (632) позволяют также проанализировать влияние возмущающих факторов, вызывающих отклонения измерителей корректирующего устройства, на уходы гироскопа от требуемого направления. Будем, например, полагать, что на систему действует лишь внешний момент $M_{и\,C}$. При этом условии передаточ-

ные функции, определяемые из уравнений (632), будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} W(p)^{\vartheta}_{M_{\text{и}\,C}} &= \frac{J_C p^2}{K_C K_{\text{и}\,C}\left(T^2p^2+1\right)\left(T_B p+1\right)\left(T_C p+1\right)\left(T^2_{\text{и}\,C}p^2+1\right)};\\ W(p)^{\psi}_{M_{\text{и}\,C}} &= \frac{1}{K_{\text{и}\,C}\left(T^2p^2+1\right)\left(T_B p+1\right)\left(T^2_{\text{и}\,C}p^2+1\right)}. \end{aligned}\right\} \quad (633)$$

Как видим, действие внешнего момента $M_{\text{и}\,C}$ на измеритель корректирующего устройства, установленный по наружной оси подвеса, вызывает сложное движение гироскопа. В этом случае он будет совершать вокруг обеих осей подвеса вынужденные колебания, порождаемые колебаниями измерителя. На это указывает колебательное звено с передаточной функцией $\frac{1}{T^2_{\text{и}\,C}p^2+1}$.

Кроме вынужденных колебаний, гироскоп будет совершать нутационные колебания, на что указывает наличие в системе второго колебательного звена с передаточной функцией $\frac{1}{T^2p^2+1}$. Одновременно гироскоп будет поворачиваться вокруг наружной оси подвеса, двигаясь апериодически вслед за поворотами измерителя; об этом свидетельствует апериодическое звено с передаточной функцией $\frac{1}{T_B p+1}$. По внутренней оси подвеса на апериодические составляющие движения гироскопа, согласно передаточной функции $W(p)^{\vartheta}_{M_{\text{и}\,C}}$, оказывают влияние оба измерителя, так как в системе имеются два апериодических звена, обладающих соответственно передаточными функциями $\frac{1}{T_B p+1}$ и $\frac{1}{T_C p+1}$.

Исследуя аналогичным образом влияние на поведение гироскопа других возмущающих факторов, можно оценить действие гироскопического прибора на динамические свойства автоматической системы, в которой он используется в качестве отдельного звена.

§ 103. ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИЕ ГИРОСКОПЫ

В системах автоматического управления объектами во многих случаях для более качественного осуществления процессов регулирования или слежения необходимо иметь непрерывные сведения не только об углах, но еще и об угловых скоростях и ускорениях отклонения объекта от заданной траектории движения. Иными словами, необходимо вести непрерывные измерения не только углов поворота объекта, но и их производных. В качестве гироскопического прибора, дифференцирующего изменяющуюся во времени величину угла поворота подвижного объекта вокруг той или иной оси, может быть использован рассмотренный выше (гл. XI) гиротахометр с двумя степенями свободы.

Такой гиротахометр измеряет угловую скорость ω_C вращения основания прибора вокруг его оси OC (см. § 87). Если указанную ось OC совместить с какой-либо осью объекта, то с потенциометра $П$ гиротахометра (см. рис. 182) будет сниматься сигнал, пропорциональный угловой скорости поворота объекта вокруг выбранной оси. Пусть, например, ось OC совмещена с вертикальной осью объекта, вокруг которой он поворачивается на угол α. Тогда угловая скорость ω_C будет равна $\dot{\alpha}$ и, следовательно, угол ϑ_r поворота гиротахометра вокруг оси его подвеса, согласно выражению (566), будет равен

$$\vartheta_r = -\frac{J\Omega}{K}\dot{\alpha}.$$

Как видим, гироскопический тахометр с двумя степенями свободы действительно производит дифференцирование угла поворота объекта.

При наличии в приборе успокоителя движение рассматриваемого дифференцирующего гироскопа будет описываться уравнением (563). Если опустить из рассмотрения малую величину $\omega_D\vartheta$ и учесть возможность воздействия на гироскоп относительно оси его подвеса внешнего возмущающего момента M, то уравнение (563) примет вид

$$\ddot{\vartheta} + \frac{\mu}{J_B}\dot{\vartheta} + \frac{K}{J_B}\vartheta = \frac{M}{J_B} - \frac{J\Omega}{J_B}\dot{\alpha}$$

или в символической форме записи

$$(J_B p^2 + \mu p + K)\,\vartheta = M - J\Omega p\,\alpha,$$

откуда находим

$$\vartheta = \frac{1}{J_B p^2 + \mu p + K}(M - J\Omega p\alpha). \tag{634}$$

Вынесем в знаменателе равенства (634) коэффициент K за скобку

$$\vartheta = \frac{1}{K\left(\frac{J_B}{K}p^2 + \frac{\mu}{K}p + 1\right)}(M - J\Omega p\alpha)$$

и введем по аналогии с изложенным в § 101 и 102 обозначение

$$\frac{J_B}{K} = T^2.$$

Если при этом коэффициент μ момента сил демпфирования выразить через коэффициент ν затухания (см. § 89)

$$\frac{\mu}{K} = \frac{\nu\sqrt{J_B K}}{K} = \nu\sqrt{\frac{J_B}{K}} = \nu T,$$

то уравнение (634) может быть переписано в виде

$$\vartheta = \frac{1}{K(T^2p^2+\nu Tp+1)}(M - J\Omega p\alpha). \tag{635}$$

Из уравнения (635) можно определить передаточные функции гиротахометра по отношению к углу α поворота объекта

$$W(p)_\alpha^\vartheta = \frac{J\Omega p}{K(T^2p^2+\nu Tp+1)} \tag{636}$$

и по отношению к возмущающему моменту M

$$W(p)_M^\vartheta = \frac{1}{K(T^2p^2+\nu Tp+1)}. \tag{637}$$

Как уже говорилось выше (§ 89), динамические свойства гироскопического тахометра могут быть достаточно полно охарактеризованы его амплитудно-частотными характеристиками (см. рис. 187). Полученные выражения (636) и (637) передаточных функций дают возможность посредством подстановки $p = iq$ перейти к частотным характеристикам дифференцирующего гироскопа.[1] Так, например, произведя указанную подстановку в выражении (636), будем иметь

$$W(iq)_\alpha^\vartheta = \frac{J\Omega}{K} iq \frac{1}{(1-T^2q^2)+\nu Tiq} =$$

$$= \frac{J\Omega}{K} iq \frac{1}{(1-T^2q^2)+\nu Tiq} \cdot \frac{(1-T^2q^2)-\nu Tiq}{(1-T^2q^2)-\nu Tiq}.$$

После простейших преобразований, разделив вещественную и мнимые части, найдем

$$W(iq)_\alpha^\vartheta = \frac{J\Omega}{K} \cdot \frac{\nu Tq^2}{(1-T^2q^2)^2+(\nu Tq)^2} + i\frac{J\Omega}{K} \cdot \frac{(1-T^2q^2)q}{(1-T^2q^2)^2+(\nu Tq)^2} =$$

$$= U(q) + iV(q), \tag{638}$$

где $U(q)$ и $V(q)$ — вещественная и мнимая частотные характеристики соответственно.

Определив модуль комплексной величины (638)

$$|W(iq)_\alpha^\vartheta| = \sqrt{U(q)^2 + V(q)^2} = \frac{J\Omega q}{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-T^2q^2)^2+(\nu Tq)^2}} \tag{639}$$

и ее аргумент

$$\arg W(iq)_\alpha^\vartheta = \operatorname{arc\,tg} \frac{V(q)}{U(q)} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1-T^2q^2}{\nu Tq}, \tag{640}$$

---

[1] См.: Н. Т. Кузовков. Теория автоматического регулирования, основанная на частотных методах. Оборонгиз, 1960, стр. 92.

получим возможность построить амплитудно-частотную (639) и фазо-частотную (640) характеристики дифференцирующего гироскопа, аналогичные характерисгикам, приведенным на рис. 187.

В инженерной практике построение частотных характеристик выполняют обычно в логарифмическом масштабе, благодаря чему значительно сокращаются вычислительные работы. Для оценки наклона графиков логарифмических частотных характеристик используются специальные единицы — октава по оси абсцисс и децибел по оси ординат. [1] Октавой называется отрезок по оси абсцисс, соответствующий изменению частоты q в два раза. В логарифмическом масштабе частот отрезок, изображающий октаву, имеет одну и ту же длину, не зависящую от величины q и равную lg 2, так как

$$\lg 2q - \lg q = \lg 2 + \lg q - \lg q = \lg 2.$$

При этом по оси абсцисс наносятся цифры, соответствующие значениям логарифмов частот q, равных 1; 10; 100 и т. д. (рис. 200). Весьма часто используется единица измерения — декада,— характеризующая отрезок по оси абсцисс, соответствующий изменению q в десять раз.

По оси ординат откладываются логарифмические единицы — децибелы, — позволяющие оценивать отношения между двумя величинами. Связь между числом децибел и соответствующим ему числом σ (см. рис. 187), характеризуется зависимостью

$$20 \lg \sigma = 20 \lg |W(iq)|.$$

По оси абсцисс логарифмической фазо-частотной характеристики откладываются те же единицы, что и в логарифмической амплитудно-частотной характеристике, а по оси ординат — значение угла λ, определяемое из выражения (640):

$$\lambda = \operatorname{arc\,tg} \frac{V(q)}{U(q)}.$$

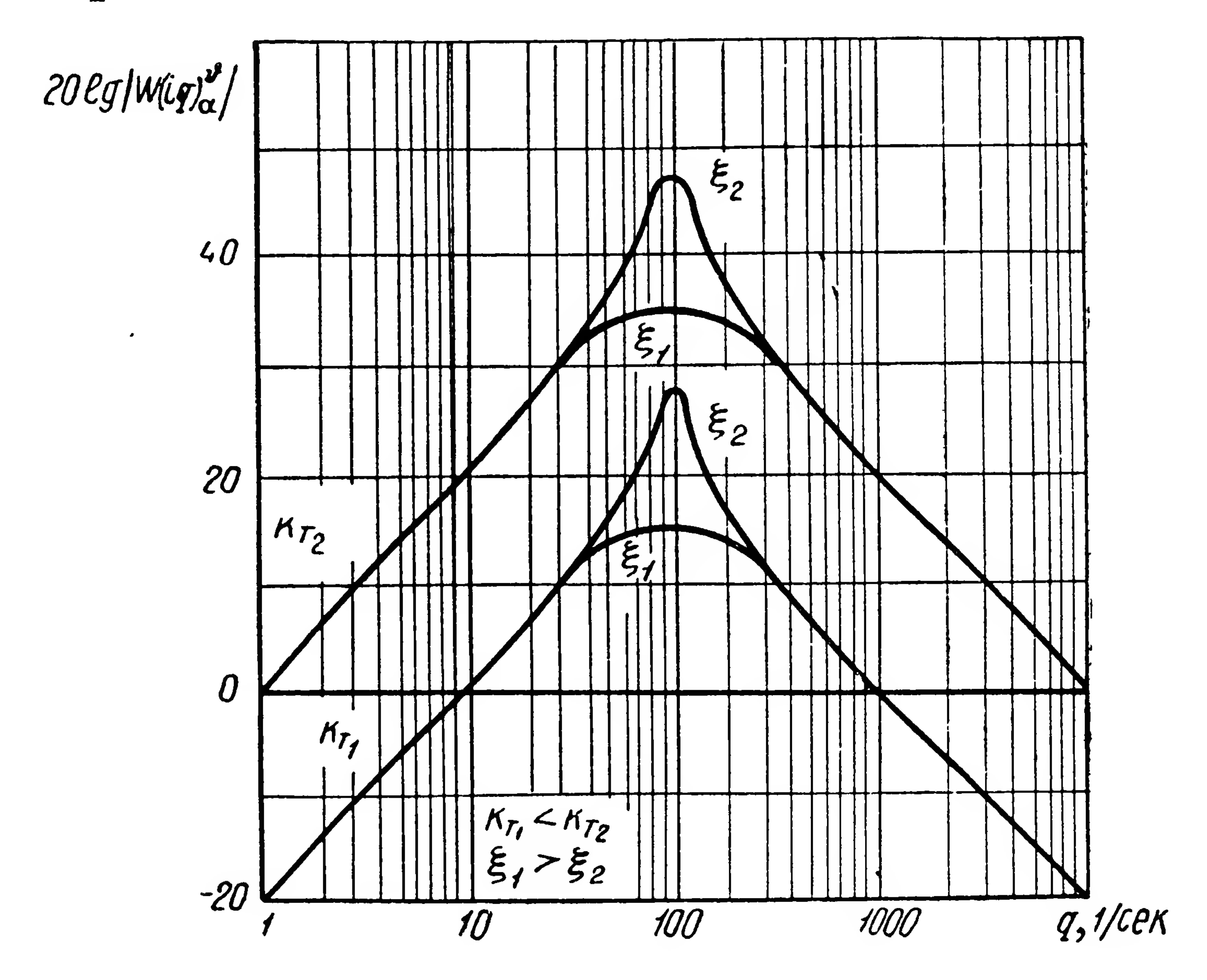
Пример логарифмических частотных характеристик дифференцирующего гироскопа приведен на рис. 200. Проанализировав эти характеристики, нетрудно заметить, что при частотах колебаний объекта, лежащих ниже частоты $\frac{1}{T}$ собственных колебаний гиротахометра, последний ведет себя как идеальное дифференцирующее звено.[2] Действительно, для таких частот ампли-

---

[1] См.: А. А. Воронов. Элементы теории автоматического регулирования. Воениздат, 1954, стр. 205.

[2] Об оценке динамических свойств звеньев по логарифмическим частотным характеристикам см., например, Е. П. Попов. Динамика систем автоматического регулирования. ГИТТЛ, 1954, стр. 190.

тудно-частотные характеристики (рис. 200) имеют постоянный положительный наклон, равный $+20$ *дб/дек*, а фазо-частотные характеристики обладают постоянным положительным сдвигом, равным $\frac{\pi}{2}$. Из приведенных характеристик следует также, что



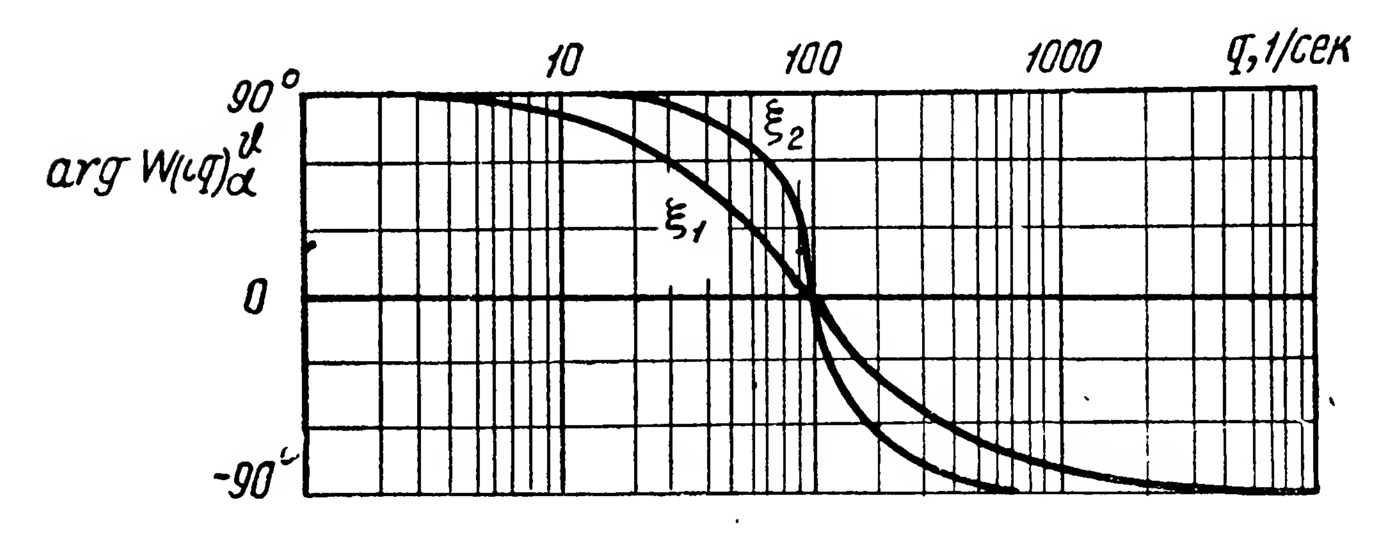


Рис. 200. Частотные характеристики дифференцирующего гироскопа.

при частотах колебаний объекта, лежащих в районе частоты $\frac{1}{T}$ или превышающих ее, операция дифференцирования, выполняемая гиротахометром, сопровождается недопустимо большими динамическими погрешностями, определяемыми наличием колебательного звена в его передаточной функции (636). Из сказанного следует, что частота собственных колебаний дифференцирующего гироскопа, зависящая лишь от его конструктивных параметров, должна значительно превышать возможные значения частот ко-

лебаний объекта. Обычно на практике рекомендуется частоту собственных колебаний гиротахометра выбирать в 5—10 раз больше максимально возможной частоты колебаний объекта.

Частотные характеристики, приведенные на рис. 200, построены при различных значениях $\kappa_T = \frac{J\Omega}{K}$ и $\xi = \nu$. Как видно из графиков, увеличение коэффициента $\frac{J\Omega}{K}$ усиления гиротахометра повышает его чувствительность. Уменьшение коэффициента ν затухания колебаний гиротахометра увеличивает как амплитудные, так и фазовые погрешности прибора.

§ 104. ИНТЕГРИРУЮЩИЕ ГИРОСКОПЫ

С помощью гироскопических приборов можно не только дифференцировать, но и интегрировать отдельные величины. Так, гироскоп направления, центр тяжести которого смещен относительно точки подвеса вдоль главной оси (рис. 108), является по существу интегратором ускорения силы тяжести. Действительно, согласно изложенному в § 48, прецессия такого гироскопа вокруг наружной оси подвеса OC происходит с угловой скоростью

$$\dot{\psi} = \frac{Gl}{J\Omega}.$$

Если в последнем равенстве вес G гироскопа заменить его массой m, то получаемое выражение

$$\dot{\psi} = \frac{ml}{J\Omega} g$$

показывает, что величина угла поворота

$$\psi = \int \dot{\psi}\, dt = \frac{ml}{J\Omega} \int g\, dt$$

пропорциональна интегралу от ускорения g силы тяжести.

Описанное свойство гироскопа с тремя степенями свободы широко используется на практике для интегрирования линейных ускорений. Представим (рис. 201) гироскоп с тремя степенями свободы, центр тяжести которого смещен вдоль главной оси OA на расстояние l от точки подвеса O. Пусть ось гироскопа OC совмещена с осью Ox_c объекта. При такой установке прибора в случае ускорения $\dot{V}_x$ объекта вдоль оси Ox_c возникает сила инерции $m\dot{V}_x$ массы m гироскопа, создающая момент $m\dot{V}_x l$ относительно оси OB. В результате появившегося возмущения гироскоп начнет прецессировать вокруг оси OC с угловой скоростью

$$\dot{\psi} = \frac{ml}{J\Omega} \dot{V}_x. \tag{641}$$

Величина угла ψ поворота гироскопа в плоскости $y_c O z_c$ объекта будет определяться интегралом

$$\psi = \int \dot{\psi}\, dt = \frac{ml}{J\Omega} \int \dot{V}_x\, dt = \frac{ml}{J\Omega} V_x + C. \qquad (642)$$

Как видим, величина угла ψ пропорциональна скорости V_x, достигнутой объектом к данному моменту времени. Однако необходимо иметь в виду, что целый ряд факторов может вносить ошибки в показания прибора. Так, например, ускорение $\dot{V}_z$

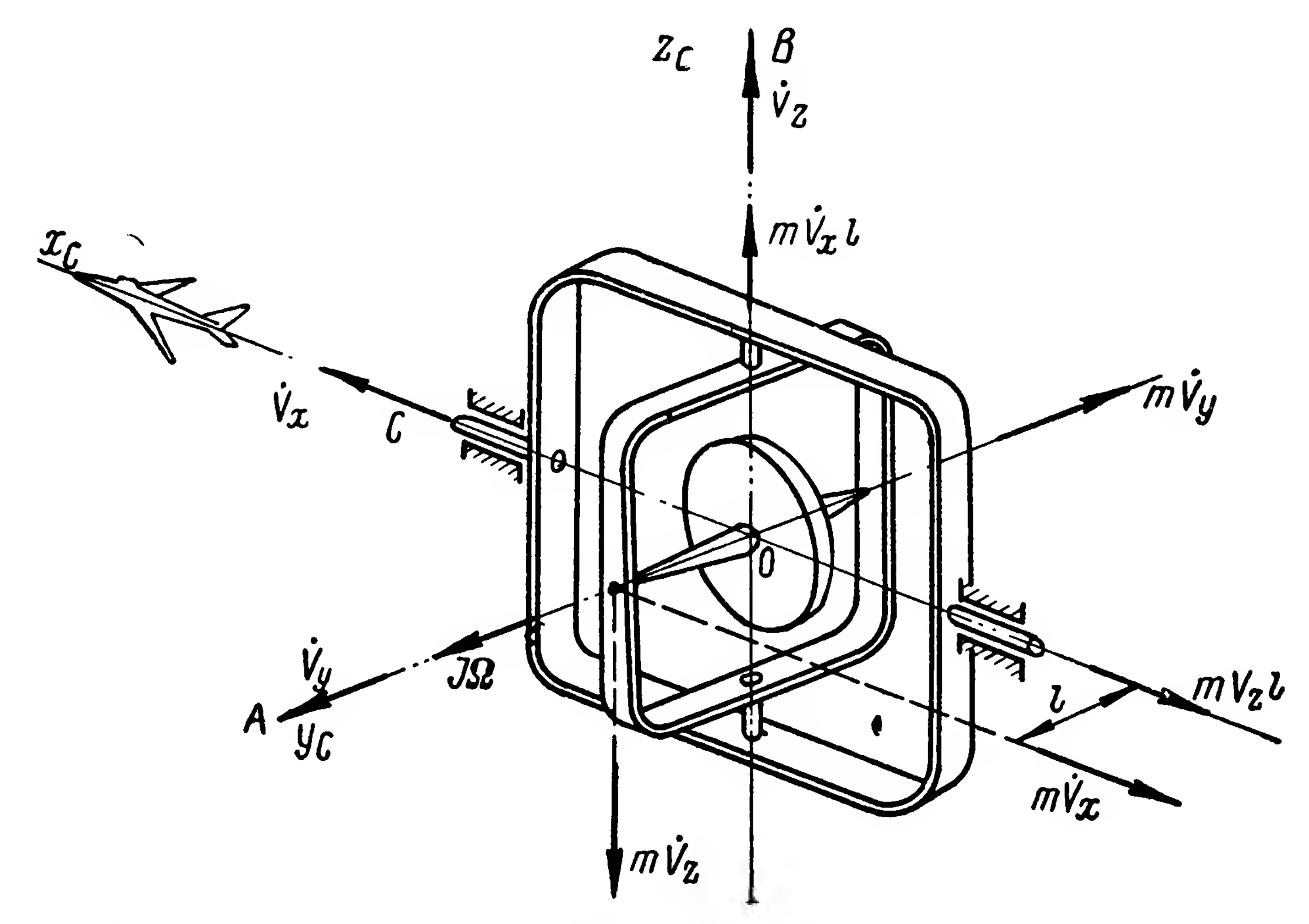


Рис. 201. Гироскопический интегратор линейных ускорений.

объекта порождает момент $m\dot{V}_z l$ относительно оси OC, обусловливающий прецессию гироскопа вокруг оси OB. В результате перпендикулярность между кольцами подвеса нарушится, что приведет к уменьшению плеча l и тем самым к изменению масштаба измерения угла $\dot{\psi}$.

Для устранения указанного недостатка в современных конструкциях гироскопических интеграторов линейных ускорений [42, стр. 325] ось B^*B^* подвеса внутреннего карданова кольца BK (рис. 202) смещают относительно плоскости COB наружного кольца HK на расстояние l. При этом центр тяжести гироскопа располагают на пересечении осей OA, OB и OC. Нетрудно заметить, что при перемещениях основания такого гироскопа вдоль осей OA и OB с ускорениями $\dot{V}_A$ и $\dot{V}_B$ силы инерции его массы не порождают моментов относительно осей подвеса OB и OC. И только ускорение $\dot{V}_C$ вдоль оси OC будет порождать момент сил инерции относительно оси B^*B^*, а тем самым и прецессию гироскопа вокруг оси OC с угловой скоростью, определяемой по выражению (641).

Чтобы сохранить перпендикулярность между карданными кольцами *ВК* и *НК*, прибор снабжают корректирующим устройством. При повороте внутреннего кольца вокруг оси B^*B^* вместе с ним поворачивается и движок потенциометра *П*, с обмотки которого снимается сигнал, управляющий моментом корректирующего двигателя *ЭД*. Момент, создаваемый электродвигателем *ЭД* относительно оси *ОС*, обеспечивает выдерживание перпендикулярного положения между внутренним *ВК* и наружным *НК* кольцами подвеса.

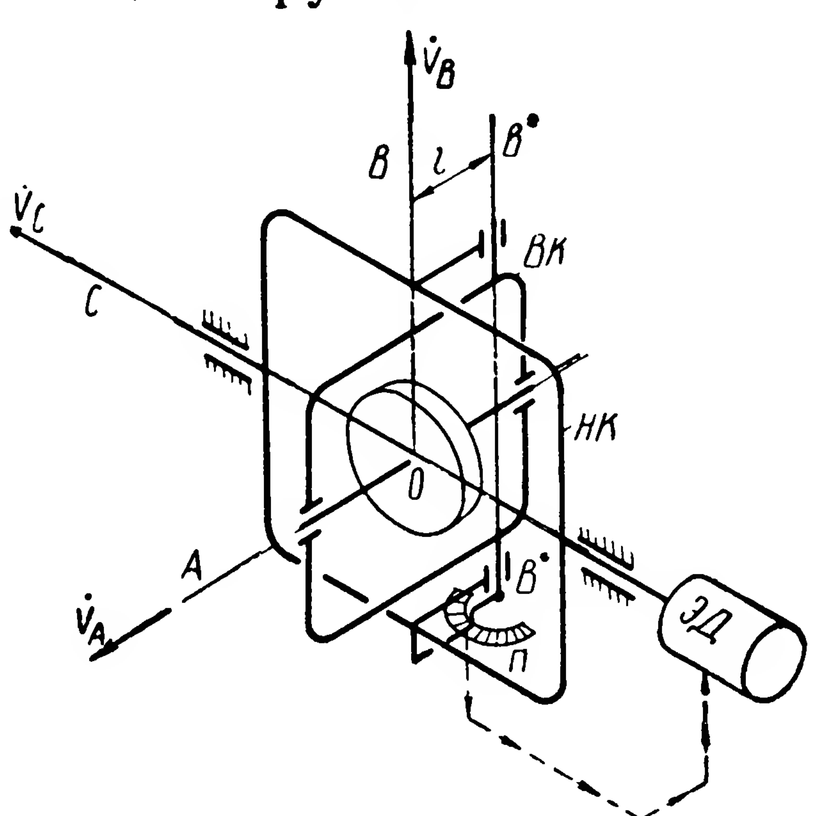


Рис. 202. Гироинтегратор с коррекцией.

В общем случае при движении объекта по криволинейной траектории, когда продольная ось O_cx_c объекта изменяет с течением времени угол β своего наклона к плоскости горизонта (рис. 203), описанный гироскопический интегратор будет реагировать не только на ускорение объекта $\dot{V}_x$ вдоль продольной оси O_cx_c, но также на его центростремительное ускорение $V\dot{\beta}$ и на ускорение

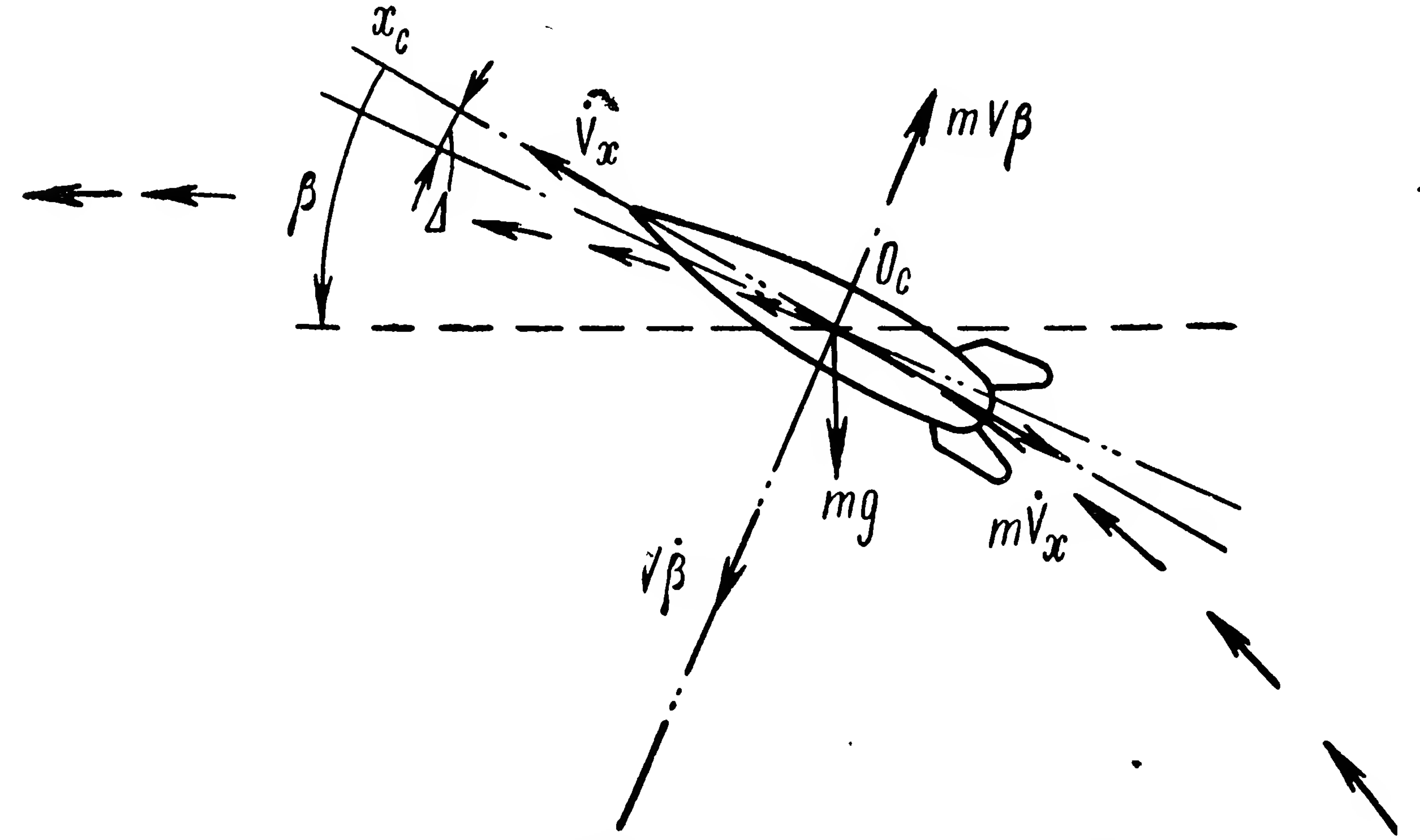


Рис. 203. Направления действия сил инерции массы акселерометра.

силы тяжести g. При угле атаки Δ сумма проекций сил $m\dot{V}_x$, $mV\dot{\beta}$ и mg на продольную ось O_cx_c, с которой совмещена наружная ось подвеса гироскопа, определяется равенством

$$R = m\left[\dot{V}_x + V\dot{\beta}\sin\Delta + g\sin(\beta - \Delta)\right].$$

Учитывая зависимость между ускорениями объекта $\dot{V}$ по касательной к траектории и $\dot{V}_x$ вдоль его продольной оси $O_c x_c$, перепишем последнее равенство в следующем виде:

$$R = m\left[\dot{V}\cos\Delta + V\dot{\beta}\sin\Delta + g\sin(\beta - \Delta)\right].$$

Сила R при смещении l центра тяжести ротора и внутреннего карданова кольца относительно внутренней оси подвеса (рис. 203) обусловит прецессию гироскопа вокруг его наружной оси с угловой скоростью

$$\dot{\psi} = \frac{Rl}{J\Omega} = \frac{ml}{J\Omega}\left[\dot{V}\cos\Delta + V\dot{\beta}\sin\Delta + g\sin(\beta - \Delta)\right],$$

и, следовательно, за время t гироскоп совершит поворот вокруг своей наружной оси подвеса на угол ψ, равный

$$\psi = \int_0^t \dot{\psi}\,dt = \frac{ml}{J\Omega}\int_0^t \left[\dot{V}\cos\Delta + V\dot{\beta}\sin\Delta + g\sin(\beta - \Delta)\right]dt.$$

Полученное выражение показывает, что гироскопический интегратор с тремя степенями свободы при определении скорости V объекта по касательной к траектории движения вносит ошибки, которые могут быть вычислены заранее, если объекту задана определенная программа движения.

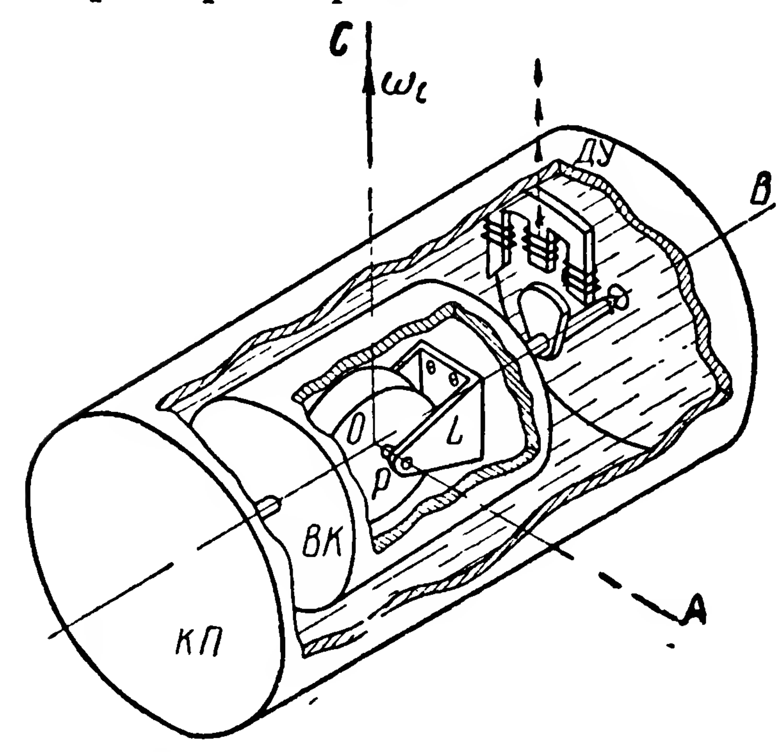


Рис. 204. Гироинтегратор угловых скоростей.

С помощью гироскопических приборов могут интегрироваться и угловые скорости вращения объекта. Предназначаемый для этой цели гироскоп выполняется обычно на поплавковом подвесе (рис. 204) и имеет две степени свободы. Схема такого гироскопа аналогична рассмотренному выше (см. рис. 186) поплавковому гиротахометру. Отличие между ними состоит лишь в том, что у рассматриваемого гироскопического интегратора отсутствует датчик восстанавливающего момента.

При вынужденном повороте корпуса *КП* такого прибора вокруг оси *OC* с угловой скоростью ω_C гироскоп будет двигаться вокруг оси *OB* (рис. 204). Характер этого движения описывается уравнением (563), в котором коэффициент $K = 0$. Если, кроме того, не принимать во внимание возможную угловую скорость ω_D вращения корпуса *КП* прибора вокруг оси *OD*, то уравнение движения получит вид

$$\ddot{\vartheta} + \frac{\mu}{J_B}\dot{\vartheta} = -\frac{J\Omega}{J_B}\omega_C. \qquad (643)$$

При медленном изменении ω_C решение уравнения (643), может быть записано в приближенном[1] виде

$$\vartheta = C_1 e^{-\frac{\mu}{J_B}t} - \frac{J\Omega}{\mu}\int_0^t \omega_C\,dt + C_2. \tag{644}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определятся начальными условиями. Будем полагать, что в начальный момент времени $\vartheta(0) = 0$; $\dot{\vartheta}(0) = 0$. При этих условиях из выражения (644) и его первой производной имеем

$$\vartheta(0) = C_1 + C_2 = 0;\quad \dot{\vartheta}(0) = -\frac{\mu}{J_B}C_1 - \frac{J\Omega}{\mu}\omega_C = 0,$$

откуда следует

$$C_1 = -\frac{J_B J\Omega\omega_C}{\mu^2};\quad C_2 = \frac{J_B J\Omega\omega_C}{\mu^2}.$$

Подставив значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 в выражение (644), получим зависимость

$$\vartheta = \frac{J_B J\Omega\omega_C}{\mu^2}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{J_B}t}\right) - \frac{J\Omega}{\mu}\int_0^t \omega_C\,dt, \tag{645}$$

характеризующую изменение угла ϑ поворота гироскопа вокруг оси подвеса OB.

При сообщении корпусу *КП* прибора вращения вокруг оси OC с угловой скоростью ω_C сразу же возникает движение гироскопа вокруг оси OB. Указанное движение будет ускоренным до тех пор, пока момент $\mu\dot{\vartheta}$ сил демпфирования не уравновесит гироскопический момент $J\Omega\omega_C$. С этого мгновения ускоренное движение гироскопа прекратится, и величина его угла поворота ϑ практически будет пропорциональна интегралу от угловой скорости ω_C.

Для подтверждения сказанного определим угловую скорость $\dot{\vartheta}$. Продифференцировав (645) по времени, будем иметь

$$\dot{\vartheta} = -\frac{J\Omega\omega_C}{\mu}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{J_B}t}\right),$$

откуда следует, что при достаточной величине коэффициента μ угловая скорость $\dot{\vartheta}$ гироскопа весьма быстро приобретет значение

$$\dot{\vartheta} = -\frac{J\Omega\omega_C}{\mu};$$

[1] Подробнее см. [8, стр. 242].

следовательно, значение угла ϑ определяется равенством

$$\vartheta = -\frac{J\Omega}{\mu}\int_0^t \omega_C\,dt.$$

Таким образом, угол ϑ поворота гироскопа вокруг оси OB с достаточной для практики степенью точности пропорционален интегралу от угловой скорости ω_C, или, что то же самое, углу поворота корпуса $КП$ прибора вокруг оси OC.

При использовании гироскопических интеграторов в автоматических системах необходимо учитывать их динамические погрешности, обусловливаемые собственным движением гироскопов. Динамические характеристики интегратора линейных ускорений могут быть определены по аналогии с изложенным в § 101 и 102. Для определения динамических свойств интегратора угловых скоростей перепишем уравнение (643) в символической форме и учтем возможность воздействия на гироскоп внешнего возмущающего момента M_B:

$$(J_B p^2 + \mu p)\,\vartheta = M_B - J\Omega\omega_C.$$

Полагая $\omega_C = \dot{\alpha} = p\alpha$, находим

$$\vartheta = \frac{M_B}{J_B p^2 + \mu p} - \frac{J\Omega p}{J_B p^2 + \mu p}\,\alpha. \qquad (646)$$

Введем обозначение

$$\frac{J_B}{\mu} = T.$$

В соответствии с уравнением (646) передаточные функции гироскопического интегратора угловых скоростей определятся выражениями: по отношению к измеряемой величине α

$$W(p)_\alpha^\vartheta = \frac{\vartheta}{\alpha} = -\frac{J\Omega}{\mu(Tp+1)} \qquad (647)$$

и по отношению к внешнему возмущающему моменту M_B

$$W(p)_{M_B}^\vartheta = \frac{\vartheta}{M_B} = \frac{1}{\mu p(Tp+1)}. \qquad (648)$$

По частотным характеристикам прибора можно составить полное суждение о его динамических свойствах. Так, например, частотная характеристика интегрирующего гироскопа по отношению к измеряемой величине α в соответствии с передаточной функцией (647) будет иметь вид

$$W(iq)_\alpha^\vartheta = -\frac{J\Omega}{\mu(Tiq+1)}.$$

Разделив в полученном выражении вещественную и мнимую части

$$W(iq)_\alpha^\vartheta = -\frac{J\Omega}{\mu(T^2q^2+1)} + i\frac{J\Omega Tq}{\mu(T^2q^2+1)} = U(q) + iV(q),$$

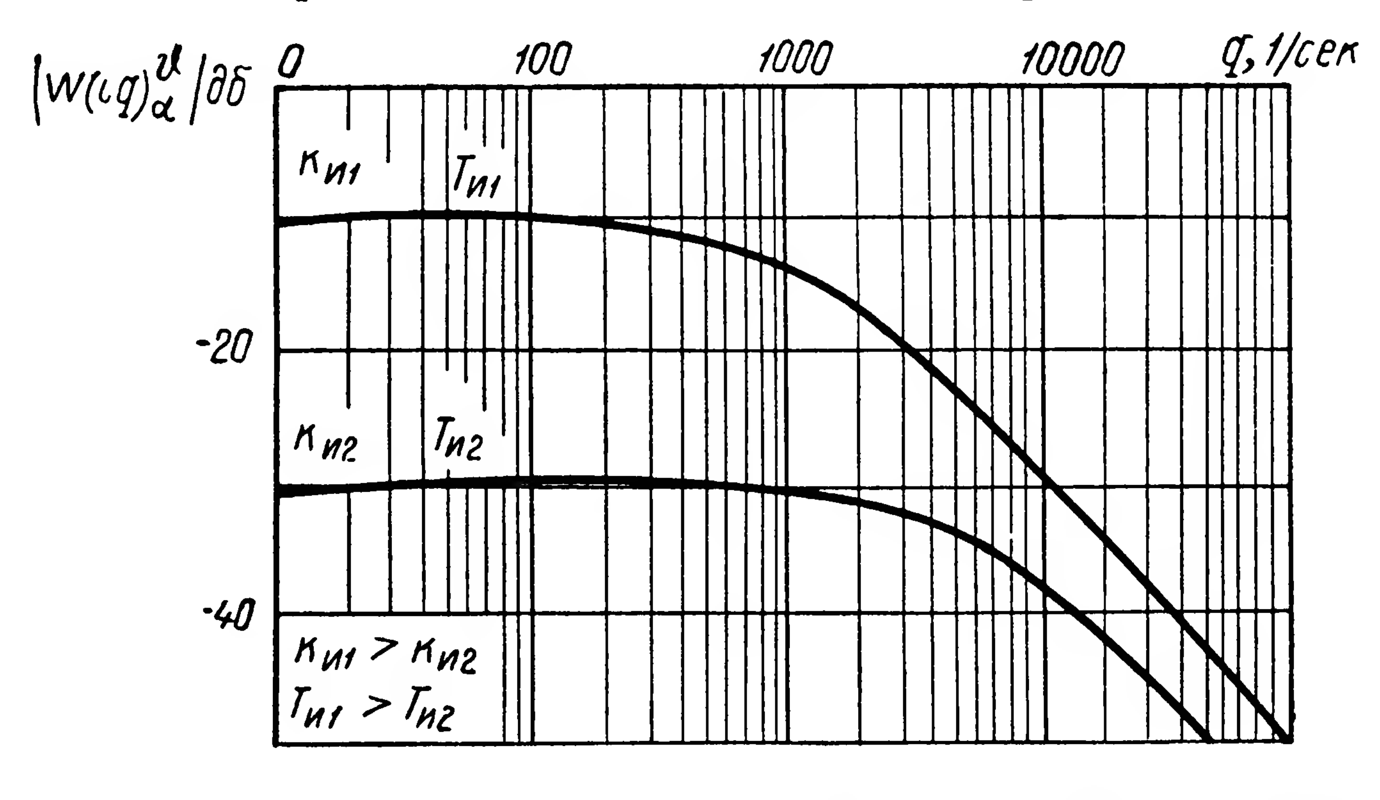
определим модуль комплексной величины

$$|W(iq)_\alpha^\vartheta| = \sqrt{U_{(q)}^2 + V_{(q)}^2} = \frac{J\Omega}{\mu}\cdot\frac{1}{\sqrt{T^2q^2+1}} \qquad (649)$$

и ее аргумент

$$\arg W(iq)_\alpha^\vartheta = \operatorname{arc\,tg}\frac{V(q)}{U(q)} = \operatorname{arc\,tg} Tq. \qquad (650)$$

В соответствии с уравнениями (649) и (650) на рис. 205 приведены амплитудные и фазовые частотные характеристики интегрирующего гироскопа, построенные для различных значений



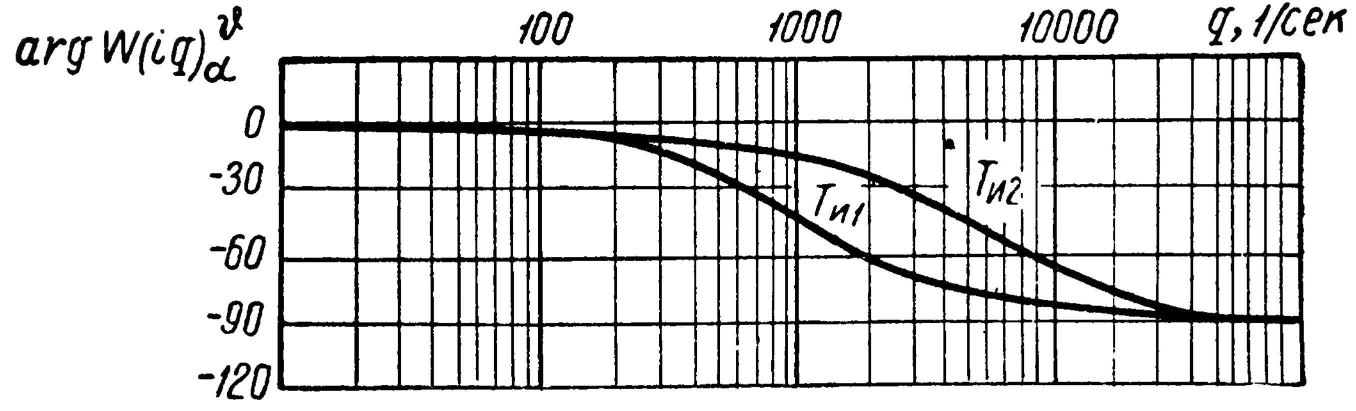


Рис. 205. Частотные характеристики интегрирующего гироскопа.

его постоянной времени T и коэффициента усиления $\kappa_и = \frac{J\Omega}{\mu}$. Из частотных характеристик следует, что при колебаниях объекта с частотой q меньшей, чем частота $\frac{1}{T}$, операция интегрирования измеряемой угловой скорости осуществляется практически без динамических искажений. Об этом свидетельствуют прямолинейные участки кривых амплитудно-частотных характеристик. При

приближении частоты q к $\frac{1}{T}$ показания гироскопического интегратора начнут искажаться, на что указывает постепенный наклон рассматриваемых кривых к оси абсцисс. Когда q станет больше $\frac{1}{T}$, прибор будет обладать недопустимо большими амплитудными и фазовыми искажениями. Поэтому для обеспечения нормальной работы интегрирующего гироскопа в автоматической системе того или иного назначения необходимо, чтобы максимальная частота $q_{\text{пах}}$ возможных колебаний объекта во всех случаях удовлетворяла неравенству

$$q_{\max} \ll \frac{1}{T},$$

что достигается малой постоянной времени T.

Рассмотренные гироскопические интеграторы угловых скоростей используются не только в автоматических системах стабилизации и управления объектами, но также и в гироскопических рамах (гл. XII) для управления стабилизирующими двигателями.

§ 105. ИНТЕГРАЦИОННЫЙ ГИРОСКОП И ГИРОСКОПИЧЕСКОЕ РЕЛЕ

С помощью гироскопа можно выполнить одновременно дифференцирование и интегрирование угловой скорости вращения объекта. Прибор, осуществляющий эти функции, называемый интеграционным гироскопом, отличается от интегратора угловых скоростей (см. рис. 204) тем, что его внутреннее карданово кольцо и успокоитель соединены упругой связью (рис. 206).

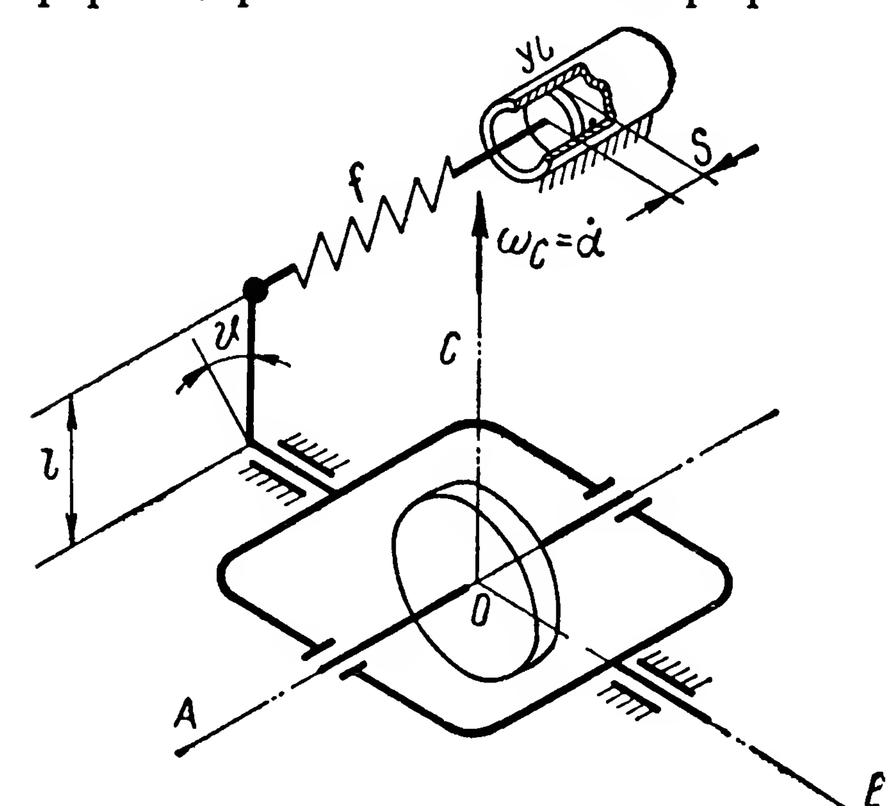


Рис. 206. Интеграционный гироскоп.

При вращении объекта вокруг оси OC прибора с угловой скоростью $\omega_C = \dot{\alpha}$ гироскоп начнет поворачиваться вокруг оси OB, вызывая тем самым деформацию пружины f и поступательное перемещение поршня в цилиндре успокоителя $УС$. Положение рассматриваемой механической системы будет характеризоваться двумя независимыми переменными — углом ϑ поворота гироскопа вокруг оси OB и перемещением s поршня успо-

коителя *УС* относительно корпуса прибора. Поэтому движение системы опишется следующими двумя уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} J_B\ddot{\vartheta} + cl^2\left(\vartheta - \frac{s}{l}\right) &= -J\Omega\dot{\alpha}; \\ m_п\ddot{s} + \chi\dot{s} + c(s - \vartheta l) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{651}$$

где c — коэффициент жесткости пружины f;

l — расстояние от оси OB до точки крепления пружины f;

$m_п$ — масса поршня успокоителя;

χ — коэффициент демпфирующей силы успокоителя.

Опустив из рассмотрения члены $J_B\ddot{\vartheta}$ и $m_п\ddot{s}$, определяющие собственные колебания гироскопа и поршня успокоителя, и исключив из системы уравнений (651) переменную s, найдем

$$\vartheta_r = -\frac{J\Omega}{cl^2}\dot{\alpha} - \frac{J\Omega}{\chi l^2}\alpha. \tag{652}$$

Как видим, угол поворота интеграционного гироскопа зависит одновременно и от угловой скорости $\dot{\alpha}$ и от ее интеграла. Практически он пропорционален углу α поворота объекта и его первой производной по времени. Описанный гироскопический прибор как бы «чувствует» тенденцию к изменению угла α, поэтому его иногда называют еще форсирующим гироскопом.

Если в интеграционном гироскопе пружину f выполнить абсолютно жесткой, что соответствует условию $c = \infty$, то первый член выражения (652) станет равным нулю и прибор будет работать как интегратор угловых скоростей (см. рис. 204). Если же поршень лишить свободы перемещения в цилиндре успокоителя *УС*, что соответствует условию $\chi = \infty$, то равным нулю станет второй член выражения (652). В этом случае прибор будет работать как гиротахометр с двумя степенями свободы (см. рис. 186). Таким образом, описанный интеграционный гироскоп как бы объединяет в себе функции двух приборов — и гиротахометра и гироскопического интегратора угловых скоростей.

В ряде схем автоматического управления при возникновении вращательного движения объекта необходимо выключать из работы автомата отдельные механизмы и включать их снова, когда вращение объекта прекращается. В некоторых системах требуется реверсировать действие отдельных элементов схемы при изменении направления вращения объекта. Для выполнения указанных задач в автоматических системах в качестве реле, управляющего соответствующими механизмами, также используются гироскопические приборы.

Представим себе гироскоп с двумя степенями свободы (рис. 207), с кардановым кольцом которого жестко соединен рычажок r, а на корпусе *КП* прибора установлен кронштейн с двумя изоли-

рованными друг от друга контактами b_1 и b_2. Если корпус *КП* такого прибора начать поворачивать вокруг оси *OC* с угловой скоростью ω_C, то гироскоп сразу же начнет вращаться вокруг оси *OB* (см. § 8). Вместе с гироскопом вокруг оси *OB* будет поворачиваться и рычажок r, который замкнет один из контактов b_1 или b_2, жестко соединенных с корпусом *КП* прибора. В результате в обмотку $ЭО_1$ или $ЭО_2$ соответствующего механизма будет подан электрический ток. Как видим, описываемый гироскопический прибор работает по схеме реле, в связи с чем он получил название гироскопического реле, или сокращенно гирореле.

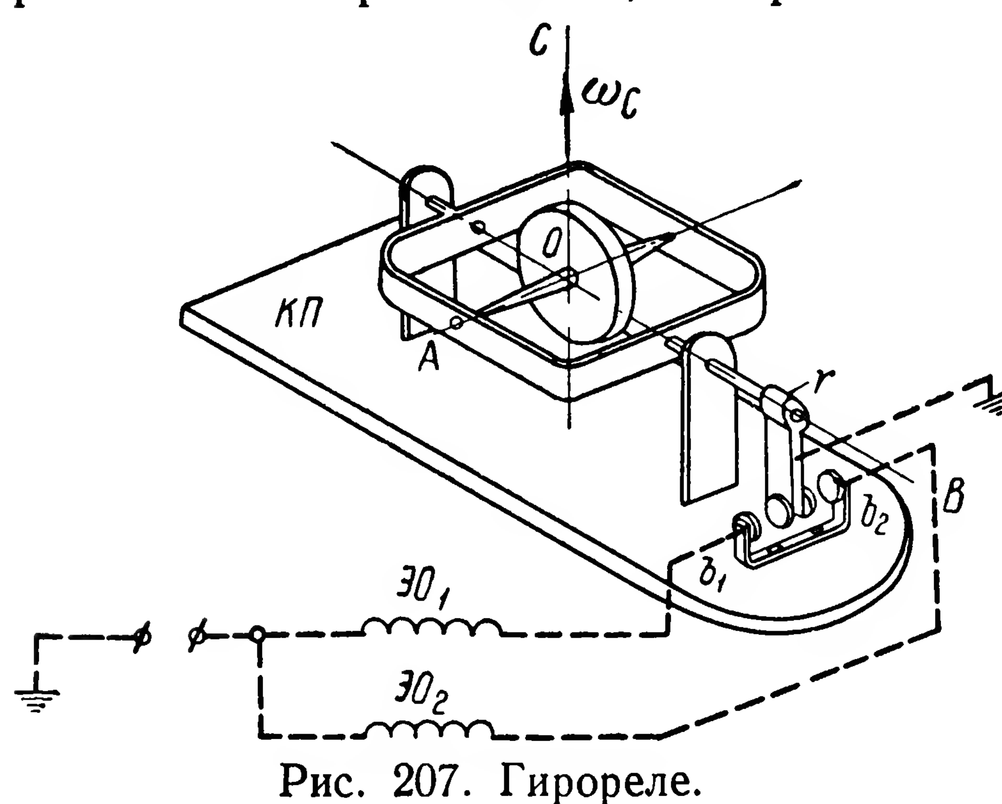


Рис. 207. Гирореле.

В зависимости от направления вращения корпуса *КП* гироскопическое реле будет переключать электрический ток с одной обмотки $ЭО_1$ на другую $ЭО_2$. Давление между поверхностями рычажка r и приемного контакта b_1 или b_2, определяемое равенством

$$P = \frac{J\Omega}{l}\,\omega_C,$$

будет зависеть от угловой скорости ω_C, кинетического момента $J\Omega$ и длины l рычажка r.

Вполне очевидно, что для обеспечения надежной работы гирореле величина P, даже и при минимальном значении ω_C, должна отвечать установленным нормам контактных давлений.

§ 106. ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ГИРОСКОПОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ОБЪЕКТА

Для осуществления навигационных систем, автоматически управляющих движением объекта по заданной траектории, необходимо иметь приборы, непрерывно определяющие географические координаты объекта, — его широту φ и долготу λ. На принципиальную возможность использования гироскопических приборов для решения этой задачи указывал еще Л. Фуко, который предложил применить гироскоп для определения географической широты места.

Представим, что гироскоп с двумя степенями свободы (рис. 208) установлен на земной поверхности так, что его ось подвеса *OB* расположена перпендикулярно плоскости $\xi O \zeta$ географического меридиана. При таком размещении прибора главная ось *OA*

гироскопа может перемещаться лишь в плоскости меридиана. Как известно (см. § 27), в этой же плоскости находится и вектор $\overline{\Omega}_з$ угловой скорости суточного вращения Земли, который составляет с полуденной линией $O\xi$ угол φ, равный углу географической широты места.

Таким образом, гироскоп при угле ϑ между направлением вектора $\overline{\Omega}_з$ и главной осью OA будет вынужден совершать вращение не только вокруг своей главной оси OA, но одновременно еще и вокруг оси OC с угловой скоростью $\Omega_з \sin\vartheta$. В соответствии с изложенным в § 62 уравнение движения гироскопа в этом случае, полагая угол ϑ величиной малой, примет вид

$$J_B\ddot{\vartheta} + J\Omega\Omega_з\vartheta = 0.$$

Решение полученного уравнения будет определяться выражением

$$\vartheta = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt,$$

где

$$n = \sqrt{\frac{J\Omega\Omega_з}{J_B}}.$$

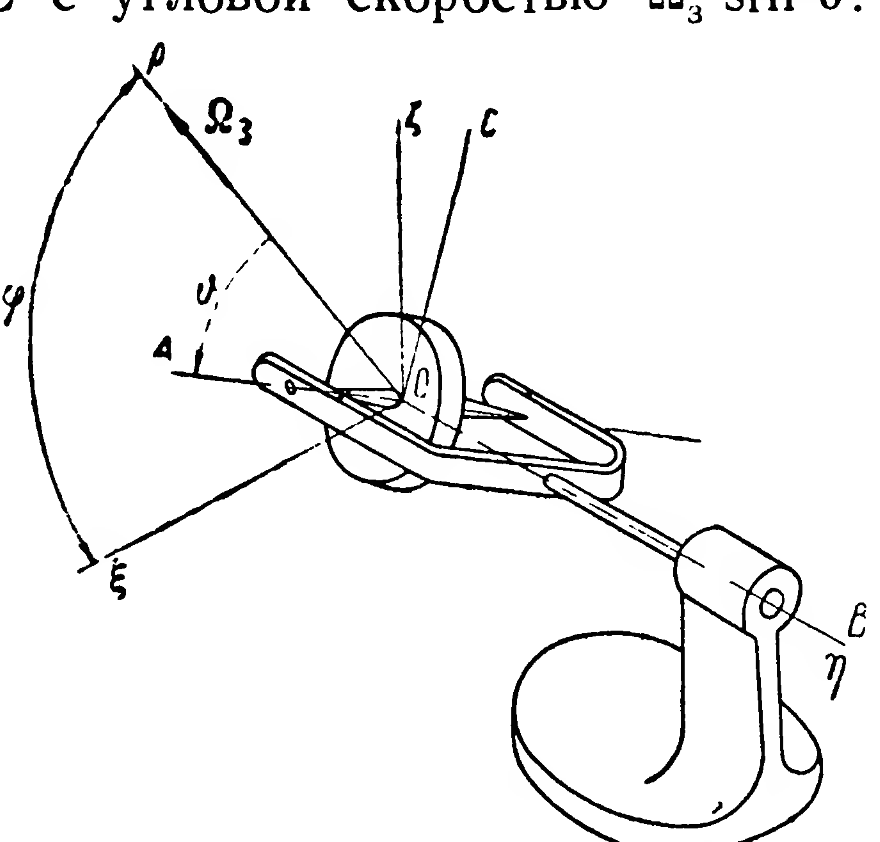


Рис. 208. Гирошпрот.

Из найденного выражения следует, что в рассматриваемом приборе главная ось OA гироскопа совершает гармонические колебания в плоскости меридиана около направления OL, параллельного земной оси. Таким образом, по величине угла, составляемого средним положением главной оси OA с плоскостью $\xi O\eta$ горизонта, можно определить угол φ географической широты места.

Как видим, гироскоп с двумя степенями свободы, установленный неподвижно на земной поверхности указанным выше образом, позволяет определять географическую широту, поэтому такой прибор называется гироширотом Фуко. Однако по причинам, изложенным в § 63, гирошпрот Фуко не может удовлетворительно работать на колеблющемся основании, из-за чего он и не получил практического распространения. Однако поиски возможностей практического осуществления идеи Фуко не прекращаются до нашего времени.

Из работ, посвященных проблеме «гироширота», вызывает интерес работа Ч. Фокса [32, 45]. Согласно его идее на платформе *КП* (рис. 209), стабилизированной с помощью пространственной гирорамы (см. рис. 194) относительно плоскостей $\xi O\eta$ горизонта и $\xi O\zeta$ меридиана, устанавливаются два гироскопа $Г_1$ и $Г_2$ с одинаковыми кинетическими моментами $J\Omega$. Каждый ги-

роскоп обладает двумя степенями свободы, причем оси O_1B_1 и O_2B_2 их подвесов расположены параллельно осям $O\xi$ и $O\zeta$ соответственно.

При вращении платформы *КП* в пространстве вокруг осей $O\xi$, $O\eta$ и $O\zeta$ с угловыми скоростями ω_ξ, ω_η и ω_ζ гироскопы будут стремиться совершить повороты вокруг своих осей подвеса O_1B_1 и O_2B_2. При этом главная ось O_1A_1 будет стремиться совместиться с направлением, параллельным вектору $\bar{\omega}_\zeta$, а главная ось O_2A_2 — с направлением, параллельным вектору $\bar{\omega}_\xi$. Однако как только

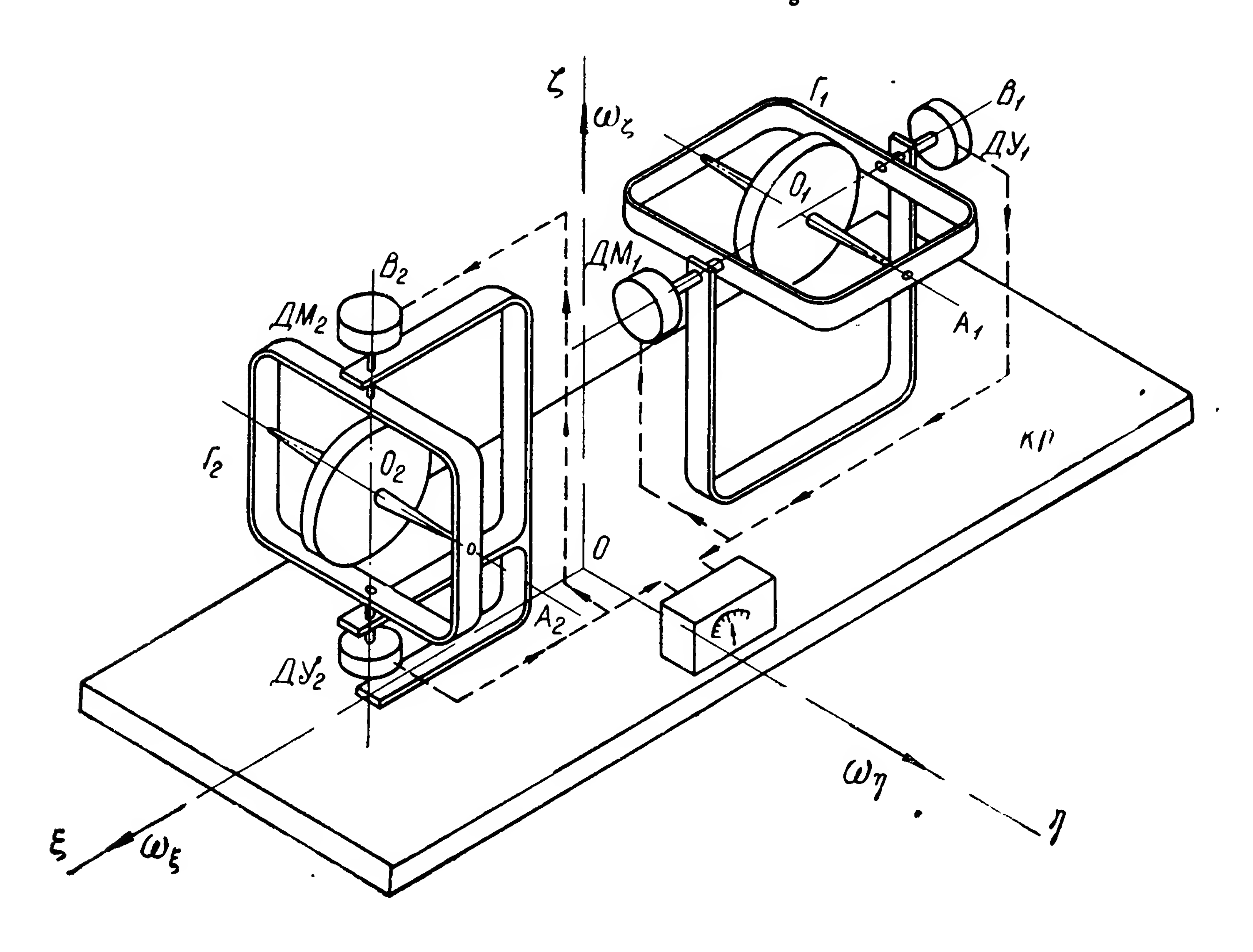


Рис. 209. Гироскопический определитель широты местности.

гироскопы начинают совершать повороты вокруг осей O_1B_1 и O_2B_2, так сразу же сигналы, снимаемые с датчиков углов $ДУ_1$ и $ДУ_2$, будут поступать на датчики моментов $ДМ_1$ и $ДМ_2$. Последние создадут моменты, которые компенсируют моменты гироскопической реакции $J\Omega\omega_\zeta$ и $J\Omega\omega_\xi$.

Таким образом, оба гироскопа будут удерживаться в своем первоначальном положении относительно платформы *КП* точно так же, как это осуществлялось в гиротахометре с приводом на нуль (см. рис. 184). Измеряя моменты M_1 и M_2, создаваемые датчиками моментов $ДМ_1$ и $ДМ_2$, и затем деля эти величины друг на друга, получают сигнал, пропорциональный тангенсу угла географической широты места. Действительно, моменты M_1 и M_2

уравновешивают соответствующие гироскопические моменты, поэтому можем записать

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{J\Omega\omega_\zeta}{J\Omega\omega_\xi} = \frac{\omega_\zeta}{\omega_\xi}$$

или, подставив в последнее соотношение значения угловых скоростей ω_ξ и ω_ζ, определяемые по выражениям (183), найдем

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\Omega_3 \sin\varphi - \frac{V}{R}\cos\beta\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\Omega_3\cos\varphi - \frac{V}{R}\cos\beta\sin\alpha} = \mathrm{tg}\,\varphi. \qquad (653)$$

Как следует из выражения (653), при идеальной стабилизации платформы *КП* по плоскостям горизонта и меридиана отношение моментов M_1 и M_2, создаваемых датчиками *ДМ*$_1$ и *ДМ*$_2$, равно тангенсу широты места φ. Используя это свойство рассматриваемой системы, представляется возможным определить и вторую географическую координату — долготу λ местоположения объекта. При непрерывном измерении отношения между моментами M_1 и M_2 будет известна угловая скорость

$$\dot{\varphi} = \frac{d}{dt}\left(\mathrm{arc\,tg}\frac{M_1}{M_2}\right) = -\frac{\frac{d}{dt}\frac{M_1}{M_2}}{1+\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2} \qquad (654)$$

изменения широты места.

Согласно (180) угловая скорость $\dot{\varphi}$ при условии $\beta = 0$ связана с параметрами движения объекта зависимостью

$$\dot{\varphi} = \frac{V\cos\alpha}{R}.$$

При идеальной работе описываемого гироскопического устройства курс α будет определяться автоматически, так как платформа *КП* сохраняет своё положение стабильным по отношению к плоскости меридиана $\xi O\zeta$. Поэтому, если известна высота h движения объекта над уровнем моря, то скорость V этого движения будет определяться соотношением между известными величинами:

$$V = \frac{R}{\cos\alpha}\dot{\varphi}. \qquad (655)$$

Таким образом, текущие значения широты φ, скорости V и курса α непрерывно выдаются прибором, обеспечивая тем самым непрерывное вычисление угловой скорости ω_{NS}, характеризующей изменение долготы λ. Согласно (181) величина ω_{NS} при $\beta = 0$ будет определяться выражением

$$\omega_{NS} = \dot{\lambda} = -\frac{V\sin\alpha}{R\cos\varphi}.$$

Учитывая значение (655) скорости V, будем иметь

$$\dot{\lambda} = \dot{\varphi} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \varphi},$$

откуда находим текущее значение долготы

$$\lambda = \int_0^t \dot{\varphi} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \varphi} dt + \lambda_0. \qquad (656)$$

Подставив в выражение (656) значение (654) угловой скорости $\dot{\varphi}$ и учтя найденное выше значение широты φ, получим зависимости, определяющие географические координаты:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \operatorname{arc\,tg} \frac{M_1}{M_2}; \\ \lambda &= -\int_0^t \frac{\frac{d}{dt} \frac{M_1}{M_2}}{1 + \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{M_1}{M_2}\right)} dt + \lambda_0 \end{aligned}\right\} \qquad (657)$$

Для вычисления координат φ и λ необходимо непрерывно измерять лишь три величины: α, M_1 и M_2. При выполнении этого требования счетно-решающее устройство сможет выдавать непрерывную информацию о текущих значениях географических координат. Однако сложность практического осуществления описанной идеи заключается в трудности отделения основных сигналов, снимаемых с гироскопов Γ_1 и Γ_2, от тех помех, которые порождаются колебаниями объекта.

§ 107. ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ САМОПИШУЩИЕ ПРИБОРЫ

Характер изменения во времени углов, угловых скоростей и ускорений отклонения объекта от первоначального направления движения в результате действия внешнего возмущения — основной критерий при оценке устойчивости движения объекта. Поэтому при летных или ходовых испытаниях требуются объективные данные об изменениях амплитуд, скоростей и ускорений угловых колебаний объекта, порождаемых различными возмущающими факторами. Эти данные нельзя получить посредством визуальных отсчетов показаний соответствующих гироскопических приборов, в связи с чем и возникла необходимость создания записывающих гироскопических устройств, непрерывно регистрирующих изменение тех или иных параметров.

Каждый из рассмотренных выше гироскопических приборов может быть использован в самопишущем регистрирующем устройстве. Для этого на соответствующем кардановом кольце гироскопа

устанавливается кронштейн с закрепленным на нем приспособлением, оставляющем след на движущейся ленте. Такое приспособление обычно называют пером; оно может быть выполнено в виде карандаша, чернильного пера, накалывающего механизма, электрического разрядника и т. п. На рис. 210 приведены принципиальные схемы трех вариантов самопишущих гироскопических приборов. Снабжая записывающим устройством гироскоп с тремя степенями свободы, получают возможность автоматически регистрировать изменения углов поворота объекта

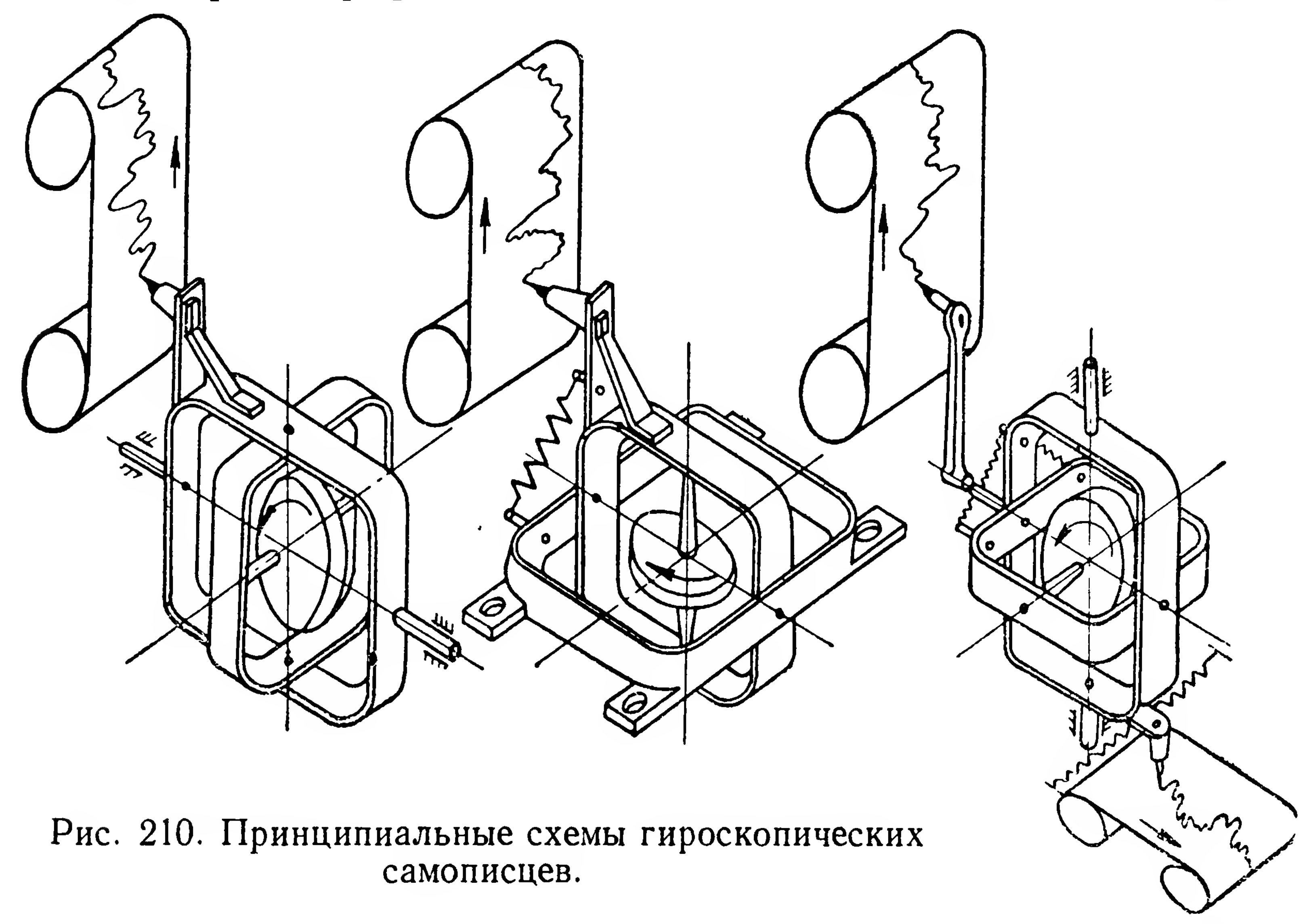


Рис. 210. Принципиальные схемы гироскопических самописцев.

вокруг любой его оси. При установке записывающего устройства на гиротахометре регистрируют угловые скорости объекта, а снабжая пером гиротахоакселерометр, получают возможность регистрировать одновременно и угловую скорость и угловое ускорение.

Для выяснения законов изменения во времени угловых перемещений, скоростей и ускорений объекта вокруг какой-либо одной его оси можно ограничиться лишь одним гироскопом. Действительно, любая записанная кривая после ее графического дифференцирования или интегрирования дает зависимость изменения во времени производной или интеграла зарегистрированной на ленте функции. Если же при изучении законов вращения объекта должны быть зарегистрированы изменения того или иного параметра относительно всех трех взаимно перпендикулярных осей одновременно, то в этом случае прибор должен быть оборудован уже тремя гироскопами.

В качестве примера гироскопического самопишущего прибора, обеспечивающего одновременную запись изменения угловых скоростей вращения объекта вокруг его трех осей, можно привести

гироскопический самописец ЦАГИ. Принцип устройства этого прибора [1] показан на рис. 211. Три гироскопических тахометра $Г_x$, $Г_y$ и $Г_z$, измеряющие угловые скорости ω_x, ω_y и ω_z вращения объекта вокруг трех взаимно перпендикулярных осей O_cx_c,

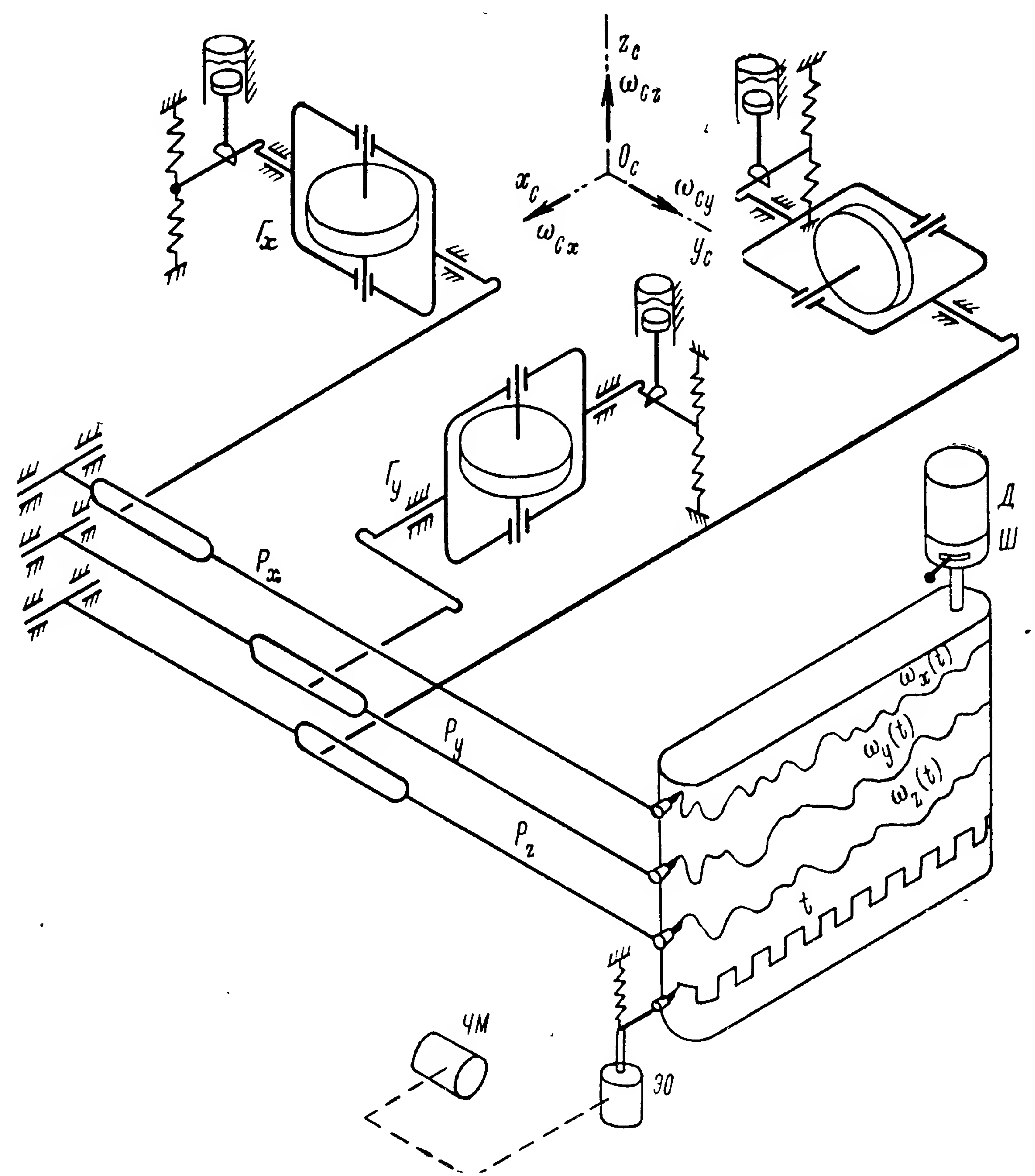


Рис. 211. Пространственный гироскопический самописец угловых скоростей объекта.

O_cy_c и O_cz_c, соединены соответственно с рычагами P_x, P_y и P_z, несущими на себе записывающие устройства.

Так как углы поворотов гиротахометров пропорциональны угловым скоростям объекта, то при их изменениях на движу-

[1] См.: Приборы и аппаратура для летных испытаний самолета. ЦАГИ, 1940, стр. 95.

щейся ленте будут записываться кривые изменения исследуемых угловых скоростей во времени. В результате на ленте будет зарегистрировано одновременное изменение всех трех функций $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$ и $\omega_z(t)$. Для удобства чтения записанных графиков направление собственного вращения каждого гироскопа выбирается таким образом, чтобы положительные значения всех трех измеряемых угловых скоростей откладывались на ленте в одну сторону.

Для нанесения на движущуюся ленту масштаба времени прибор снабжают часовым механизмом *ЧМ* той или иной конструкции. В часовом механизме имеются электрические контакты, замыкание которых происходит через строго определенные промежутки времени. При каждом таком замыкании контактов часового механизма подается ток в обмотку электромагнита отметчика времени *ЭО*. Якорь указанного электромагнита несет на продолжении своей продольной оси записывающее устройство, которое, перемещаясь при каждом импульсе тока поперек движущейся ленты, наносит на ней риски, по которым судят о масштабе времени. Движение ленты осуществляется двигателем *Д* через редуктор *Ш*, имеющий, как правило, несколько ступеней передач. Тем самым существует возможность при записи изменений исследуемых параметров устанавливать наиболее рациональную в данном конкретном случае скорость перемещения ленты.

Точность регистрации исследуемого процесса при использовании гироскопических самопишущих приборов зависит от нескольких факторов: от точности самого гироскопа, используемого в приборе, от тех нагрузок, которые обусловливаются наличием записывающего устройства, и, наконец, от ошибок передающих механизмов, вызываемых люфтами и упругими деформациями рычажных или любых других передач между гироскопом и пером записывающего устройства.



ЛИТЕРАТУРА

1. Блинов И. А., Жерлаков А. В. и др. Электронавигационные приборы. Изд-во «Морской транспорт», 1960.

2. Богданович М. М., Мочалин В. С., Ильин П. А. Элементы теории навигационных гироскопических приборов. Изд-во «Морской транспорт», 1956.

3. Браславский Д. А., Логунов С. С., Пельпор Д. С. Расчет и конструкция авиационных приборов. Оборонгиз, 1954.

4. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. ГИТТЛ, 1955.

5. Бутенин Н. В. О влиянии сил сухого и вязкого трения на движение оси свободного гироскопа, установленного на неподвижном основании. Известия высших учебных заведений. Приборостроение. Т. III, № 5, 1960.

6. Гофман А. А. Определение характеристик гиротахометров и гиротахоакселерометров на упругом подвесе. Вопросы прикладной гироскопии. Вып. III, Судпромгиз, 1962.

7. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применения. Т. I, Изд-во иностр. лит., 1952.

8. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применения. Т. II, Изд-во иностр. лит., 1952.

9. Droздович В. Н. Исследование фрикционных автоколебаний гироскопа. Вопросы теории и расчета гироприборов и приборов точной механики. Вып. 36, ЛИТМО, 1958.

10. Дувакин А. П. Вибрационный гироскоп (обзор). Механика. Сборник переводов № 1 (53). Изд-во иностр. лит., 1955.

11. Ильин П. А., Сергеев М. А. Сухопутный двухстепенной гирокомпас с воздушными шаровыми опорами. Вопросы теории и расчета гироприборов и приборов точной механики. Вып. 36, ЛИТМО, 1958.

12. Ишлинский А. Ю. Об уравнениях задачи определения местоположения движущегося объекта посредством гироскопов и измерений ускорений. ПММ, т. XXI, вып. 6, 1957.

13. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, т. XX, вып. 4, 1956.

14. Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем. Изд-во АН СССР, 1963.

15. Коган В. М. Новый способ регулирования маятникового момента в однороторном апериодическом гирокомпасе. Информационный сборник «Судовождение и связь». Вып. 74, ЦНИИМФ, Л. 1962.

16. Коптяев П. П. Двухрежимный гироскопический компас с электромагнитной коррекцией и апериодическим приведением гирокомпаса в меридиан. Вопросы прикладной гироскопии. Вып. 2, Судпромгиз, 1960.

17. Крылов А. Н., Крутков Ю. А. Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений. Изд-во АН СССР, 1932.

18. Кудревич Б. И. Теория гироскопических приборов. Т. I, Судпромгиз, 1963.

19. Лавров В. Н. Практика разработки и применения гирокомпасов в горном деле. Известия высших учебных заведений. Приборостроение. Т. IV, вып. 1, 1961.

20. Левенталь Е. Б. О некоторых явлениях трения при вибрации и качаниях, влияющих на показания приборов. Точная индустрия, № 4 и 5, 1937.

21. Летов А. М. К теории гирополукомпасов. Инженерный сборник. Т. XIII, Изд-во АН СССР, 1952.

22. Лунц Я. Л. О движении по инерции гироскопа в кардановом подвесе. Известия высших учебных заведений. Приборостроение. Т. II, № 3, 1959.

23. Меркин Д. Р. Гироскопические системы. ГИТТЛ, 1956.

24. Николаи Е. Л. Гироскоп в кардановом подвесе. ГИТТЛ, 1944.

25. Николаи Е. Л. Теория гироскопов. Гостехиздат, 1948.

26. Ольман Е. В., Токарев В. П., Соловьев Я. И. Автопилоты. Оборонгиз, 1946.

27. Павлов В. А. Основы конструирования гироскопических приборов. Оборонгиз, 1946.

28. Павлов В. А. Авиационные гироскопические приборы. Оборонгиз, 1954.

29. Павлов В. А. Гироскопический эффект, его проявления и использование. Судпромгиз, 1961.

30. Павлов В. А. Систематический дрейф гироскопа в кардановом подвесе, обусловливаемый факторами, порождающими колебания системы. Известия высших учебных заведений. Приборостроение. Т. IV, № 1, 1961.

31. Павлов В. А. Влияние крутящего момента гиромотора на движение гироскопа в кардановом подвесе. Известия высших учебных заведений. Приборостроение. Т. VI, № 1, 1963.

32. Павлов И. В. О возможности автоматического определения географических координат подвижных платформ. Труды ЛИАП, вып. XXVIII, 1959.

33. Павлов И. В. Ошибки кардановых подвесов гироскопических приборов. Информационно-технический сборник № 1. Судпромгиз, 1959.

34. Пельпор Д. С. Свободное движение гироскопа, заключенного в кардановом подвесе. Научные доклады высшей школы. Машиностроение и приборостроение, № 3, 1958.

35. Проект однорельсовой жироскопической железной дороги Петроград — Гатчино системы П. П. Шиловского. Госиздат, П., 1922

36. Ривкин С. С. Теория гироскопических устройств. Ч. I, Судпромгиз, 1962.

37. Сайдов П. И., Слив Э. И., Чертков Р. И. Вопросы прикладной теории гироскопов. Судпромгиз, 1961.

38. Свешников А. А. О движении гироскопического маятника при случайных перемещениях его точки подвеса. ПММ, т. XXVI, вып. 3, 1962.

39. Сломянский Г. А., Прядилов Ю. Н. Поплавковые гироскопы и их применение. Оборонгиз, 1958.

40. Тихменев С. С. О виражных ошибках гирополукомпасов, вызываемых влиянием коррекции горизонтальности оси гироскопа. Элементы теории и расчета гироскопических и навигационных приборов. МВТУ им. Н. Э. Баумана. Сборник № 48, Оборонгиз, 1955.

41. Тихменев С. С. К вопросу об «уводе» гироскопа на кардановом подвесе при его нутации. Известия высших учебных заведений. Приборостроение. Т. II, № 5, 1959.

42. Феодосьев В. И., Синярев Г. Б. Введение в ракетную технику. Оборонгиз, 1960.

43. Фридлендер Г. О., Козлов М. С. Авиационные гироскопические приборы. Оборонгиз, 1961.

44. Хохлов А. Ф. Теория и техническое применение автоматических устройств. Машгиз, 1959.

45. Fox Ch. The mecanical determination of position and velocity on the earth's surface. Proceedings of the Cambrige philosophical society. Vol. 45, part. 2, April 1949.

46. Chatterton I. B. Some General Comparisons Between the Vibratory and Conventional Rate Gyro. Journal of the Aeronautical sciences. Vol. 22, No 9, 1955.

47. Grammel R., Ziegler H. Der kardanisch gelagerte schnelle symmetrisches Kreisel mit Lagerreibung. Ingenieur Archiv. Bd. 24, No 6, 1956.

48. Inglis C. E. Gyroscopic Principles and Applications. The Engineer, XI, 26, London, 1943.

49. Magnus K. Beitrage zur Dynamik des Kräftefreien, kardanisch gelagerten Kreisels. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Bd. 35, No 1—2, 1955.

50. Mielke H. Raketentechnik. Veb Verlag Technik. Berlin, 1959.

51. Plymale B., Goodstein R. Nutation of Free Gyro Subjected to an Impulse. Journal of applied Mechanics. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Vol. 22, No 3, 1955.

52. North — Seeking Gyro Is Accurate within 5 Seconds. Missiles and Rockets, Vol. V, No 53, 1959.

53. Rawlings A. L. The theory of the Gyroscopic Compass and its deviations. The Macmillan Company. New York, 1944.

54. Savet P. Gyroscopes: theory and design. Mc. Graw-Hill book Company. New York, 1961.



ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава IV

Уравнения движения гироскопа в подвижной системе координат и их анализ

Глава V

Влияние сил трения в опорах подвеса на движение гироскопа

Глава VI

Астатический гироскоп

Глава VII

Гироскоп направления

Глава VIII

Гиромагнитный компас

Глава IX

Гироскопический компас

Глава X

Гировертикаль

Глава XI

Гироскопические приборы для измерения угловых скоростей и ускорений

Глава XII

Гироскопические рамы

Глава XIII

Гироскопические приборы
в системах автоматического управления, стабилизации и контроля



ВСЕВОЛОД АЛЕКСАНДРОВИЧ ПАВЛОВ

ТЕОРИЯ ГИРОСКОПА И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ

Темплан 1964 г. № 8

Научный редактор д-р техн. наук *С. С. Ривкин*

Рецензенты: д-ра техн. наук *П. И. Сайдов* и *С. Ф. Фармаковский*

Редактор *Г. П. Квочкина*

Переплет художника *В. У. Фонарева*

Технический редактор *Л. М. Шишкова*

Корректоры *М. П. Бушева* и *Л. Н. Степнова*

Сдано в набор 21/V 1964 г. Подписано к печати 5/VIII 1964 г. Формат бумаги 60 × 90[1]/[16]. Физ. п. л. 31,0. Уч.-изд. л. 29,3. Изд. № 1348-63 М-11458. Тираж 9000 экз. Цена 1 руб. 23 коп.

Зак. 1879

Издательство «Судостроение», Ленинград, Д-65, ул. Гоголя, 8

Ленинградская типография № 6
Главполиграфпрома
Государственного комитета Совета Министров
СССР по печати.
Ленинград, Моисеенко, 10

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
33	9-я сверху	где l —	где $2l$
50	15-я »	$(\dot{\Phi} - \dot{\Psi} \sin \vartheta_0 -$	$(\dot{\Phi} - \dot{\psi} \sin \vartheta_0 -$
82	1-я снизу	$+ V_C \sin^2 nt +$	$+ V_C \sin^3 nt +$
84	10-я »	$+ J\Omega\psi \cos \vartheta_0 =$	$+ J\Omega\dot{\psi} \cos \vartheta_0 =$
140	1-я сверху	Оси O_3U	Оси O_3K_1
275	1-я снизу	$+ \frac{R}{V} \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi \cdot$	$+ \frac{V}{R} \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi \cdot$
342	13-я »	углом Δ	угол Δ
348	9-я »	$- V) V \operatorname{tg} \alpha$	$- V) \dot{V} \operatorname{tg} \alpha$
370	5-я сверху	$+ \frac{2\lambda Gl (Gl - K)}{J^2\Omega^2} \vartheta =$	$+ \frac{2\lambda Gl (Gl - K)}{J^2\Omega^2} =$
398	13-я »	$e^{-\frac{K}{J\Omega}}$	$e^{-\frac{K}{J\Omega} t}$
405	15-я »	$= \beta - \frac{M_к}{J\Omega},$	$= \dot{\beta} - \frac{M_к}{J\Omega},$
421	9-я снизу	$- \frac{J\Omega\omega_{0C} (K - J_B q^2)}{(K - J_B q)^2 + \mu^2 q^2} \cdot$	$- \frac{V\Omega\omega_{0C} (K - J_B q^2)}{(K - J_B q^2)^2 + \mu^2 q^2} \cdot$

В. А. Павлов. Заказ 1879

Цена 1 р. 23 к.

«СУДОСТРОЕНИЕ» • 1964